Письменный экзамен за первый семестр

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 50 баллов.

Задача 1. На евклидовой плоскости произвольно заданы четыре различные точки A, B, C, D.

а) **(10 баллов)** Всегда ли существует такая инверсия σ, что точки $\sigma(A)$, $\sigma(B)$, $\sigma(C)$, $\sigma(D)$ не коллинеарны и образуют четыре последовательных вершины параллелограмма?

б) **(10 баллов)** Если такие инверсии существуют, то можно ли получить из заданных точек A, B, C, D не подобные друг другу параллелограммы $\sigma(A)\sigma(B)\sigma(C)\sigma(D)$?

Задача 2 (10 баллов). Зафиксируем какой-нибудь четырёхмерный параллелепипед Π, выберем в нём вершину A и рассмотрим четырёхмерный симплекс Δ с вершинами в A и тех четырёх вершинах параллелепипеда Π, которые соединённы ребром с противоположной к A вершиной параллелепипеда Π. Зависит ли неориентированный[1] объём симплекса Δ от выбора вершины A?

Задача 3 (10 баллов). В трёхмерном аффинном пространстве над произвольным полем заданы шесть занумерованных парами цифр $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ точек p_{ij}, никакие четыре из которых не компланарны. Покажите, что четыре плоскости, натянутые на тройки точек, индексы которых имеют непустое пересечение[2], тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда четыре плоскости, натянутые на тройки точек, индексы которых не содержат одну из цифр[3], пересекаются в одной точке.

Задача 4 (10 баллов). Покажите, что полная группа G стандартного четырёхмерного куба

$$I^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -1 \leqslant x_i \leqslant 1 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant 4\}$$

порождается отражениями в гиперплоскостях. Опишите какую-нибудь камеру Вейля группы G и найдите все попарные углы между её стенками. Опишите все элементы группы G, имеющие максимальную длину[4] относительно выбранной Вами камеры и найдите эту длину.

Задача 5 (10 баллов). Трёхмерный многогранник Гельфанда – Цейтлина, отвечающий тройке вещественных чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, задаётся в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x_{23}, x_{13}, x_{12}) шестью неравенствами $\lambda_1 \leqslant x_{12} \leqslant \lambda_2 \leqslant x_{23} \leqslant \lambda_3$ и $x_{12} \leqslant x_{13} \leqslant x_{23}$. Нарисуйте этот многогранник, найдите его объём и площади всех его граней. Если общий случай кажется слишком непонятным, решите (с потерей 3 баллов) задачу для $\lambda = (1, 2, 3)$.

Задача 6 (10 баллов). Дана прямоугольная матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ и столбец $b \in \mathbb{R}^m$ той же высоты, что и матрица. Докажите, что система неравенств $Ax \leqslant b$ на столбец $x \in \mathbb{R}^n$ имеет решение , если и только если любое неотрицательное решение $y \in \mathbb{R}^{m*}_{\geqslant 0}$ системы уравнений $yA = 0$ удовлетворяет неравенству $yb \geqslant 0$.

[1] Т. е. рассматриваемый с точностью до умножения на ± 1.

[2] Т. е. на тройки $\{p_{12}, p_{13}, p_{14}\}$, $\{p_{12}, p_{23}, p_{24}\}$, $\{p_{13}, p_{23}, p_{34}\}$, $\{p_{14}, p_{24}, p_{34}\}$.

[3] Т. е. на тройки $\{p_{12}, p_{23}, p_{13}\}$, $\{p_{12}, p_{24}, p_{14}\}$, $\{p_{13}, p_{14}, p_{34}\}$, $\{p_{23}, p_{24}, p_{34}\}$.

[4] Где под *длиной* элемента $g \in G$ относительно системы простых корней понимается минимальное количество простых отражений, композицией которых является g.