Проективные пространства

Г9◇1° **(двойное отношение[1])**. Покажите, что для любой упорядоченной четвёрки различных точек на $\mathbb{P}_1$ *двойное отношение* $[p_1,\, p_2;\, p_3,\, p_4] \overset{\text{def}}{=} (\det(p_1,p_3)\cdot\det(p_2,p_4)) \,:\, (\det(p_1,p_4)\cdot\det(p_2,p_3))$ корректно определено и не зависит от выбора координат, и что две четвёрки точек проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда их двойные отношения одинаковы.

Г9◇2°. Пусть $[p_1,\, p_2;\, p_3,\, p_4] = \vartheta$. Найдите $[p_{\sigma(1)},\, p_{\sigma(2)};\, p_{\sigma(3)},\, p_{\sigma(4)}]$ для всех перестановок $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ и опишите все ϑ, для которых число различных ответов будет меньше, чем для общего ϑ.

Г9◇3° **(четырёхвершинник)**. На $\mathbb{P}_2$ произвольно заданы 4 разных точки, никакие 3 из которых не коллинеарны. Шесть прямых, соединяющих всевозможные пары из них, попарно пересекаются ещё в трёх точках x, y, z, которые соединяются между собою ещё тремя прямыми. Покажите, что все три четвёрки прямых, выделенных таким образом в пучках прямых с центрами в x, y, z, являются гармоническими[2].

Г9◇4. В стандартной карте $U_0 \subset \mathbb{P}_2$ даны кривые **а)** $y = x^2$ **б)** $y = x^3$ **в)** $y^2 + (x-1)^2 = 1$ **г)** $y^2 = x^2(x+1)$. Напишите их уравнения в картах U_1 и U_2 и нарисуйте все эти 12 кривых.

Г9◇5. Вложим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{CP}_2$ в качестве действительной части стандартной аффинной карты U_0. **а)** Найдите в $\mathbb{CP}_2$ две точки, лежащие на всех кривых степени 2, видных в $\mathbb{R}^2$ как окружности. **б)** Всякая ли коника, проходящая через эти две точки и имеющая хотя бы 3 неколлинеарные точки в $\mathbb{R}^2$, видна в $\mathbb{R}^2$ как окружность?

Г9◇6 **(рациональная нормальная кривая)**. Рассмотрим 2-мерное векторное пространство U линейных форм $\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1$ от переменных (t_0, t_1) с однородной координатой $(\alpha_0 : \alpha_1)$ на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ и пространство S^dU однородных многочленов $\sum\limits_{n=0}^{d} \binom{d}{n} a_n t_0^n t_1^{d-n}$ степени d от (t_0, t_1) с однородными координатами $(a_0 \colon a_1 \colon \ \dots \ : a_n)$ на $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^dU)$. Покажите, что все описанные ниже кривые $C \subset \mathbb{P}_d$ переводятся друг в друга подходящими линейными проективными автоморфизмами.

а) **(кривая Веронезе)** C есть образ отображения $c_d : \mathbb{P}(U) \xhookrightarrow{\psi \mapsto \psi^d} \mathbb{P}(S^dU)$.

б) $C \subset \mathbb{P}(S^dU)$ задаётся системой квадратных уравнений $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_d \end{pmatrix} = 1$

в) C — образ любого отображения $\mathbb{P}(U) \xrightarrow{F} \mathbb{P}(S^dU)$ заданного в однородных координатах формулой $t = (\alpha_0 : \alpha_1) \longmapsto (f_0(\alpha) : f_1(\alpha) : \ \dots \ : f_d(\alpha))$, где $f_m(\alpha)$ — линейно независимые однородные многочлены степени d от $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$.

г) C — образ отображения $\varphi_{p_0,p_1,\dots,p_d} : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_d$ заданного в однородных координатах формулой $x = (x_0 : x_1) \longmapsto (1/\det(p_0,x) : 1/\det(p_1,x) : \ \cdots \ : 1/\det(p_d,x))$, где $p_\nu = (\alpha_\nu : \beta_\nu) \in \mathbb{P}_1$ — попарно разные точки, и $\det(p_\nu, x) = \alpha_\nu x_1 - \beta_\nu x_0$.

д) Зафиксируем $n+3$ точки $p_1, p_2, \dots, p_n,\ a,\ b,\ c \in \mathbb{P}_n$, никакие $(n+1)$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, обозначим через $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$ пучок гиперплоскостей, проходящий через все точки p_ν, кроме p_i, и зададим проективные изоморфизмы $\psi_{ij} : \ell_j \xrightarrow{\sim} \ell_i$ так, чтобы 3 гиперплоскости пучка ℓ_j, проходящие через точки a, b, c, переходили в аналогичные 3 гиперплоскости пучка ℓ_i; кривая $C = \bigcup\limits_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \ \dots \ \cap \psi_{n1}(H)$.

Г9◇7. Любые ли $n+3$ точки в $\mathbb{P}_n$, никакие $n+1$ из которых линейно не зависимы, лежат на рациональной нормальной кривой C_n?

Г9◇8°. Любые ли m разных точек кривой C_n линейно независимы при $3 \leqslant m \leqslant n+1$?

Г9◇9*. Покажите, что два упорядоченных набора из $n+3$ линейно общих точек на $\mathbb{P}_n$ тогда и только тогда проективно эквивалентны, когда на проведённых через эти наборы рациональных нормальных кривых совпадают двойные отношения любых четвёрок соответственных точек.

---

[1] по-английски *cross-ratio*

[2] точки $p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4 \in \mathbb{P}_1$ называются *гармоническими*, если $[p_1,\, p_2;\, p_3,\, p_4] = -1$