Правильные многогранники

Терминология и обозначения. Многогранником в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка конечного набора точек или, что то же самое, компактное пересечение конечного числа (замкнутых) полупространств. Группой (соотв. собственной группой) многогранника называется группа всех теоретико-множественных отображений из многогранника в себя, индуцированных ортогональными (соотв. собственными ортогональными) преобразованиями $\mathbb{R}^n$. Флагом многогранника называется любая последовательность: вершина, примыкающее к ней ребро, примыкающая к нему двумерная грань, …, примыкающая к ней $(n-1)$-мерная грань (участвуют все промежуточные размерности). Многогранник называется *правильным*, если его группа транзитивно действует на множестве его флагов. Для правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ мы обозначаем через $\ell(P)$ длину его ребра, через $r(P)$ — радиус описанного шара, через $\varrho(P) = \ell^2/4r^2$ — квадрат отношения длины ребра к диаметру описанного шара.

Г$5\frac{1}{2}\diamond$1. Перечислите все движения в собственной и несобственной группах правильных **а)** куба **б)** октаэдра **в)** тетраэдра **г)** додекаэдра **д)** икосаэдра в $\mathbb{R}^3$, а также в группе **е)** правильного плоского n угольника в $\mathbb{R}^3$.

Г$5\frac{1}{2}\diamond$2 (двойственность). Пусть многогранник $P \in V = \mathbb{R}^n$ содержит начало координат в качестве внутренней точки. Покажите, что $P^* = \{\xi \in V^* \mid \xi(v) \geqslant -1 \ \ \forall\, v \in P\ \}$ является содержащим начало координат многогранником в V^* и установите биекцию между k-мерными гранями P и $(n-k-1)$-мерными гранями P^*.

Г$5\frac{1}{2}\diamond$3 (звезда). Покажите, что все вершины правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$, соединённые ребром с заданной вершиной $p \in P$ лежат в одной $(n-1)$-мерной плоскости и образуют в ней правильный многогранник (он обозначается $\mathrm{st}(P)$ и называется *звездой* P).

Г$5\frac{1}{2}\diamond$4 (символ Шлефли). Символом правильного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ называется последовательность из $(n-1)$ натуральных чисел $(\nu_1(P), \nu_2(P), \dots, \nu_{n-1}(P))$, в которой $\nu_1(P)$ равно числу рёбер двумерной грани многогранника P, а подпоследовательность

$$(\nu_2(P), \dots, \nu_{n-1}(P)) = (\nu_1(\mathrm{st}(P)), \dots, \nu_{n-2}(\mathrm{st}(P)))$$

является символом звезды $\mathrm{st}(P)$. Найдите символы: **а)** 3-мерных додекаэдра и икосаэдра **б)** 4-мерного октаплекса **в)** n-мерного симплекса **г)** n-мерного куба **д)** n-мерного кокуба. **е)** Как связаны символы $\mathrm{st}(P)$ и $\mathrm{st}(P^*)$? **ж)** Выразите $\ell(\mathrm{st}(P))$ через $\ell(P)$ и $\nu_1(P)$. **з)** Покажите, что $\varrho(P) = 1 - \varrho^{-1}(\mathrm{st}(P)) \cdot \cos^2(\pi/\nu_1(P))$ зависит только от $\mathrm{st}(P)$.

Г$5\frac{1}{2}\diamond$5. Покажите, что символы всех возможных правильных многогранников $P \subset \mathbb{R}^n$ содержится в следующем списке: **а)** (ν), где $\nu \geqslant 3$ — любое натуральное, когда $n = 2$
б) $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, когда $n = 3$
в) $(3, 3, 3)$, $(3, 3, 4)$, $(4, 3, 3)$, $(3, 4, 3)$, $(3, 3, 5)$, $(5, 3, 3)$, когда $n = 4$
г) $(3, \dots, 3)$, $(3, \dots, 3, 4)$, $(4, 3, \dots, 3)$ для $n \geqslant 5$.

Г$5\frac{1}{2}\diamond$6. Покажите, что выпуклая оболочка вершин стандартного 4-мерного куба, вершин 4-мерного кокуба, гомотетичного стандартному с коэффициентом 2, и всех точек, которые можно получить всевозможными чётными перестановками координат из точек $(\pm\tau, \pm 1, \pm\tau^{-1}, 0)$, где $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение, представляет собою правильный 4-мерный многогранник с символом $(3, 3, 5)$.

Г$5\frac{1}{2}\diamond$7 (теорема Шлефли). Покажите, что для каждого из перечисленных в зад. Г$5\frac{1}{2}\diamond$5 символов Шлефли имеется единственный с точностью до подобия правильный многогранник с таким символом, что даёт полный список всех существующих правильных многогранников.

Г$5\frac{1}{2}\diamond$8. Сколько элементов в собственных группах 4-мерных правильных многогранников с символами **а)** $(3, 4, 3)$ **б)** $(3, 3, 5)$ **в)** $(5, 3, 3)$?

Г$5\frac{1}{2}\diamond$9. Попытайтесь явно перечислить все движения из предыдущей задачи.