Примеры векторных пространств и базисов

Г3◇1. Сколько всего в n-мерном векторном пространстве над конечным полем из q элементов:
а) векторов **б)** упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов
в) k-мерных подпространств?

Г3◇2. Чему равен предел последнего количества при фиксированных n и k и $q \to 1$?

Г3◇3. Всегда ли число элементов конечного поля является степенью его характеристики[1]?

Г3◇4 (пространства многочленов). Укажите базис и найдите размерность пространства
а) многочленов степени $\leqslant n$ от m переменных;
б) однородных многочленов степени d от m переменных;
в) однородных симметрических многочленов степени 10 от 4 переменных;
г) симметрических многочленов степени $\leqslant 3$ от 4 переменных.

Г3◇5. Пусть векторное подпространство $V \subset \Bbbk[x]$ содержит по многочлену каждой из степеней $d = 0, 1, \dots, m$. Верно ли, что оно содержит *все* многочлены степени $\leqslant m$?

Г3◇6. Пусть $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ — два поля, и $\mathbb{F}$ — конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$. Любой ли элемент поля $\mathbb{F}$ является корнем некоторого многочлена из $\Bbbk[x]$?

Г3◇7. Дано $m+1$ попарно разных чисел $a_0, a_1, \dots, a_m \in \Bbbk$. Постройте в пространстве многочленов $\Bbbk[x]_{\leqslant m}$ степени $\leqslant m$ такой базис, в котором координатами многочлена f являются
а) значения f в точках a_i **б)** значения f и его первых m производных в точке a_0
Много ли существует таких базисов?

Г3◇8. Дано несколько разных точек $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Bbbk$ и для каждой точки a_i задано m_i чисел $b_i^{(0)}, b_i^{(1)}, \dots, b_i^{(m_i-1)}$, так что всего таких чисел $b_i^{(j)}$ задано $m+1 = \sum m_i$. Сколько существует многочленов f степени $\leqslant m$, таких что f и его первые $m_i - 1$ производных $f^{(j)}$ принимают предписанные значения $b_i^{(j)}$ в каждой точке a_i?

Г3◇9. Убедитесь, что множество V^M всех функций на данном множестве M со значениями в произвольном векторном пространстве V является векторным пространством (сложение функций и умножение их на константы определяется поточечно). Пусть M — конечное множество из n элементов и $V = \Bbbk$ — основное поле; укажите в V^M базис и найдите $\dim V^M$.

Г3◇10. Составляет ли множество всех подмножеств данного множества M векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2)$ относительно операций $X+Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, $1 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} X$, и $0 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$? Если да, то постройте в нём какой-нибудь базис и найдите его размерность (для конечного M). Обязано ли семейство подмножеств $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ быть линейно независимым, если **а)** $X_i \not\subset \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$ **б)** $X_1 \not\subset X_2 \not\subset \cdots \not\subset X_n$.

Г3◇11. На n-мерном пространстве V задана ненулевая линейная функция $\varphi : V \longrightarrow \Bbbk$. Покажите, что $\ker \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ — векторное подпространство, и найдите $\dim \ker \varphi$.

Г3◇12. Тот же вопрос про *сюрьективную* линейную функцию $\varphi : V \longrightarrow W$, где W — произвольное m-мерное векторное пространство. Покажите, заодно, что $m \leqslant n$.

Г3◇13. Покажите, что для любых пяти различных точек на координатной плоскости $\Bbbk^2$ существует кривая второй степени[2], проходящая через эти пять точек.

Г3◇14. Сколько точек координатного пространства $\Bbbk^3$ гарантированно лежат на поверхности второй степени?

Г3◇15. Любые ли три прямые координатного пространства $\Bbbk^3$ гарантированно лежат на поверхности второй степени?

---

[1] напомним, что *характеристикой* поля называется число элементов в его простом подполе, буде оно конечно; *простое подполе*, в свою очередь, — это наименьшее подполе, содержащее 0 и 1; если простое подполе бесконечно, характеристику полагают равной нулю

[2] т. е. фигура, заданная уравнением $f(x, y) = 0$, где $f \in \Bbbk[x, y]$ — многочлен степени 2