§9. Проективное пространство

9.1. Проективное пространство. С $(n+1)$-мерным векторным пространством V над произвольным полем $\Bbbk$ помимо $(n+1)$-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ связано n-мерное *проективное пространство* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точки которого — одномерные векторные подпространства в V, или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в $\mathbb{A}(V)$. Чтобы видеть их как «обычные» точки, внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость $U_\xi \subset \mathbb{A}(V)$, задаваемую неоднородным линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^*$ — любая ненулевая линейная форма на V (см. рис. 9◇1).

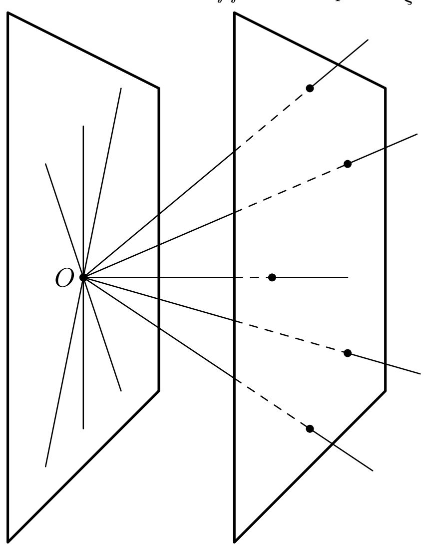

Рис. 9◇1. Проективный мир.

Упражнение 9.1. Убедитесь, что сопоставление $\xi \mapsto U_\xi$ задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами $\xi \in V^*$ и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

Всякий такого рода экран U_ξ называется *аффинной картой* на $\mathbb{P}(V)$. В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порожденные векторами $v \in V$ с $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $U_\xi^{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \setminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств n-мерного векторного подпространства $\operatorname{Ann}(\xi) \subset V$ — проходящей через начало координат параллельной копии гиперплоскости U_ξ. Эти одномерные подпространства составляют $(n-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}(\xi)$, которое называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты U_ξ и обозначается $U_\xi^{(\infty)}$. Точки $U_\xi^{(\infty)}$ можно воспринимать как *направления* в аффинной карте U_ξ.

Итак, n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n$ разбивается в объединение непересекающихся аффинных пространств всех промежуточных размерностей:

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup U_\xi^{(\infty)} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \cdots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0$$

(где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ — это одна точка).

Упражнение 9.2. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек, из которых состоят левая и правая части этого разбиения над конечным полем из q элементов?

9.2. Глобальные однородные координаты. Зафиксируем в V координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ относительно какого-нибудь базиса $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Два ненулевых вектора $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и $w = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ задают одну и ту же точку

$p \in \mathbb{P}_n$, если и только если их координаты пропорциональны. Это равносильно равенству отношений $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant n$ (где мы допускаем равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$). Таким образом, точкам $p \in \mathbb{P}_n$ корректно соответствуют не сами координаты, а только отношения $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ между ними. Эти отношения называется *однородными координатами* точки p в базисе $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \subset V$.

9.3. Локальные аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\}$, отвечающую какому-нибудь ненулевому ковектору $\xi \in V^*$. Любые n линейных форм

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in V^*,$$

такие что $n+1$ форм $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ образуют базис в V^*, задают внутри карты U_ξ *локальные аффинные координаты*. Чтобы вычислить их значения в точке p с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$, следует сначала выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке p, вектор $v = p/\xi(p) \in U_\xi$, а затем вычислить значения n линейных форм ξ_ν на этом векторе. Отметим, что получающиеся таким образом значения локальных аффинных координат $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p)/\xi(p)$ (где $1 \leqslant i \leqslant n$) *нелинейно* зависят от однородных координат точки p.

Пример 9.1

проективная прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, представляющими собою аффинные прямые с уравнениями $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$ (см. рис. 9◇2). Карта U_0 покрывает все точки $\mathbb{P}_1$ кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, которая является единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_0. Точка $(x_0 : x_1)$ с $x_0 \neq 0$ видна в карте U_1 как $(1 : \frac{x_1}{x_0})$ и функция $t = x_1|_{U_0} = x_1/x_0$ может использоваться в качестве локальной аффинной координаты в этой карте. Карта U_1 покрывает все точки $(x_0 : x_1) = (\frac{x_0}{x_1} : 1)$ с $x_1 \neq 0$, и функция $s = x_0|_{U_1} = x_0/x_1$ годится в качестве локальной координаты в U_1. Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 является горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты s и t одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$, видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $s = 1/t$.

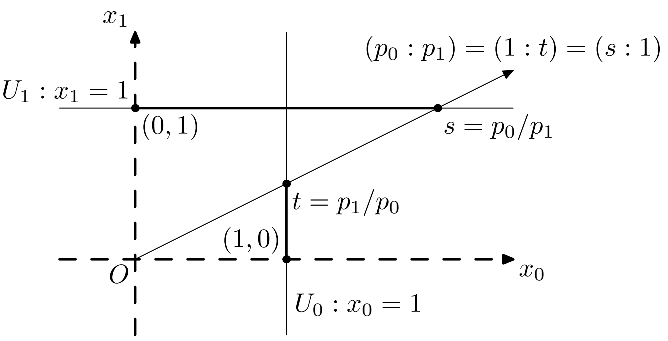

Рис. 9◇2. Стандартные карты на $\mathbb{P}_1$.

Упражнение 9.3. Убедитесь в этом.

Поэтому $\mathbb{P}_1$ можно воспринимать как результат склейки двух аффинных координатных прямых $\mathbb{A}^1$ (одна — с координатой s, другая — с координатой t) по дополнению до начала координат по следующему правилу: точка с координатой s на одной прямой приклеивается к точке с координатой $t = 1/s$ на другой.

Если основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, то в результате такой склейки мы получим окружность диаметра 1, картами на которой служат две диаметрально противоположные касательные прямые (см. рис. 9◇3), а отображения окружности на карты суть центральные проекции из точек, диаметрально противоположных к точке касания этой карты с окружностью.

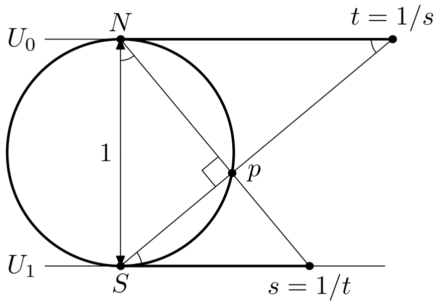

Рис. 9◇3. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$.

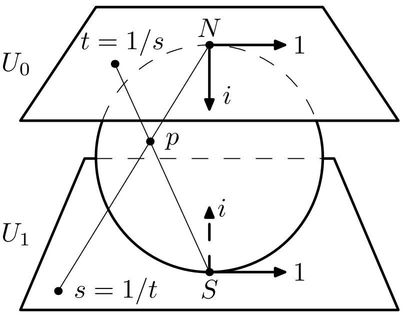

Рис. 9◇4. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

Точно также при $\Bbbk = \mathbb{C}$ в результате склейки двух экземпляров комплексной аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ по правилу $s \leftrightarrow t = 1/s$ мы получим сферу диаметра 1, для которой наши карты являются диаметрально противоположными касательными плоскостями, а сопоставление точке сферы точки на карте задаётся центральной проекцией из диаметрально противоположного к точке касания «полюса» сферы, как на рис. 9◇4: если ориентации касательных плоскостей выбраны согласованным образом, как на рис. 9◇4, комплексные числа s и t будут иметь противоположные аргументы и — согласно рис. 9◇3 — обратные модули.

Проективно-геометрический взгляд на окружность как на прямую, к которой «добавили бесконечно удалённую точку» хорошо согласуется с представлениями о бесконечности, принятыми в математическом анализе: если мы занимаемся анализом на аффинной прямой с координатой t, то стремлению t к бесконечности отвечает стремление точки $s = 1/t$ к нулю; при $st \neq 0$ величины t и $s = 1/t$ являются координатами одной и той же точки $p = (s : 1) = (1 : t) \in \mathbb{P}_1$ и эта точка стремится при $t \to \infty$ к точке $(0 : 1) \in \mathbb{P}_1$, которая не видна в карте с координатой t и является началом координат в карте с координатой s (обратите внимание, что эта картина одинаково осмысленна как над $\mathbb{R}$, так и над $\mathbb{C}$).

Упражнение 9.4*. Убедитесь, что вещественные проективные пространства $\mathbb{RP}_2$ и $\mathbb{RP}_3$ — это лента Мёбиуса с заклеенной диском границей[1] и группа $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ собственных изометрий трёхмерного евклидова пространства.

[1] напомним, что границей ленты Мёбиуса, так же как и границей круга, является окружность

Пример 9.2
стандартное аффинное покрытие $\mathbb{P}_n$ состоит из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в $\mathbb{A}^{n+1}$ уравнениями $\{x_\nu = 1\}$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на U_ν берутся n форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с} \quad 0 \leqslant i \leqslant n\,,\ i \neq \nu\,.$$

Пространство $\mathbb{P}_n$ можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий $U_0, U_1, \dots, U_n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ по их фактическим пересечениям внутри $\mathbb{P}_n$. В однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из всех таких x, у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на U_μ и U_ν это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$, если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

9.4. Задание фигур полиномиальными уравнениями. Если в $(n+1)$-мерном пространстве V над полем $\Bbbk$ зафиксированы координаты $x_0, x_1, \dots, x_n$, то каждому многочлену $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ можно сопоставить функцию

$$\widetilde{f} : \mathbb{A}(V) \longrightarrow \Bbbk\,,$$

значение которой в точке $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ равно $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Функции

$$\varphi : \mathbb{A}(V) \longrightarrow \Bbbk\,,$$

получающиеся таким способом, называются *полиномиальными* функциями на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$.

Упражнение 9.5. Покажите, что полиномиальные функции образуют подалгебру[1] в алгебре всех функций $\mathbb{A}(V) \longrightarrow \Bbbk$, причём эта подалгебра не зависит от выбора базиса в V, использованного для её определения.

Упражнение 9.6. Покажите, что над конечным полем $\Bbbk$ любая функция на $\mathbb{A}(V)$ со значениями в $\Bbbk$ полиномиальна и всегда допускает несколько *различных* представлений в виде $\varphi = \widetilde{f}$ (с разными $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$), а над бесконечным полем, напротив, всегда существуют неполиномиальные функции φ, а равенство полиномиальных функций $\widetilde{f} = \widetilde{g}$ равносильно равенству многочленов $f = g$.

Множество нулей полиномиальной функции $\widetilde{f}$ на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ обозначается через $V(f) = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid f(p) = 0\}$ и называется *аффинной алгебраической гиперповерхностью* степени $\deg f$. Пересечения аффинных алгебраических гиперповерхностей, т. е. множества решений систем полиномиальных уравнений на координаты, называются *аффинными алгебраическими*

[1] т. е. подкольцо и одновременно векторное подпространство

многообразиями. Например, аффинными многообразиями являются аффинные подпространства — они задаются системами линейных уравнений.

На проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ никакой отличный от константы многочлен от однородных координат *не задаёт* никакой функции. Тем не менее, для любого *однородного* многочлена f степени d множество его нулей

$$V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid f(v) = 0 \,\}$$

является корректно определенным подмножеством в $\mathbb{P}(V)$, поскольку

$$f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0$$

Иначе говоря, аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$ представляет собой конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, которые являются точками проективного пространства. Множество этих точек $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени $\deg f$. Пересечения проективных гиперповерхностей, т. е. множества решений систем однородных полиномиальных уравнений, называются *проективными алгебраическими многообразиями*.

Простейшими примерами проективных многообразий являются *проективные подпространства* $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$, ассоциированные с векторными подпространствами $U \subset V$ — они задаются системами однородных линейных уравнений. Например, прямая $(a, b) \subset \mathbb{P}_n$, которая, по определению, представляет собою проективизацию линейной оболочки векторов $a, b \in V$ и состоит из всевозможных точек вида $\lambda a + \mu b$, может быть задана системой линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает подпространство $\operatorname{Ann}(a) \cap \operatorname{Ann}(b) \subset V^*$ (или любой базис в этом подпространстве). Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов из разложения вектора $\lambda a + \mu b \in (a, b)$ можно воспринимать как внутреннюю однородную координату на прямой (a, b).

Упражнение 9.7. Рассмотрим произвольную аффинную карту $U_\xi \subset \mathbb{P}_n$ и произвольное k-мерное проективное подпространство $K \subset \mathbb{P}_n$. Покажите, что либо $K \cap U_\xi = \varnothing$, либо $K \cap U_\xi$ является k-мерным аффинным подпространством в U_ξ.

Упражнение 9.8. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство $\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n$ (в частности, любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются).

Пример 9.3 (аффинные коники)

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C степени 2, заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \tag{9-1}$$

В стандартной карте U_{x_0}, где $x_0 = 1$, в локальных координатах

$$t_1 = x_1|_{U_{x_0}} = x_1/x_0$$
$$t_2 = x_2|_{U_{x_0}} = x_2/x_0$$

уравнение (9-1) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_1^2 = 1$. В стандартной карте U_{x_2}, где $x_2 = 1$, с локальными координатами

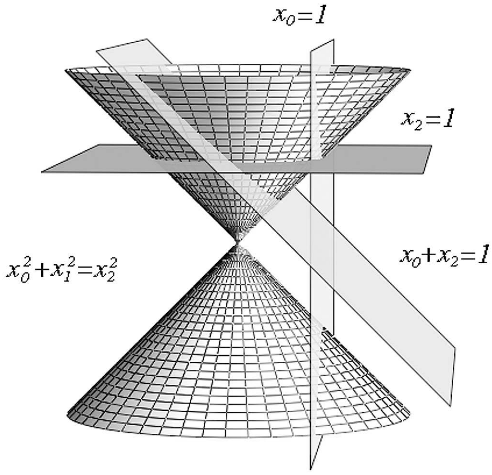

Рис. 9◇5. Аффинные изображения проективной коники.

$$t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$$
$$t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$$

мы получим уравнение окружности:

$$t_0^2 + t_1^2 = 1\,.$$

В карте $U_{x_0+x_2}$, где $x_0 + x_2 = 1$, в локальных аффинных координатах

$$t = x_1|_{U_{x_0+x_2}} = \frac{x_0}{x_0 + x_2}$$
$$u = (x_2 - x_0)|_{U_{x_0+x_2}} = \frac{x_2 - x_0}{x_0 + x_2}$$

мы, перенося в (9-1) x_1^2 слева направо и деля обе части на $(x_2 - x_0)^2$, получаем уравнение параболы $t^2 = u$.

Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (9-1) в различных картах. Вид C в карте $U \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с C, касается C и пересекается с C в двух различных точках (см. рис. 9◇5).

9.4.1. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности

$$S = V(f) \subset \mathbb{A}^n$$

это такая проективная гиперповерхность

$$\overline{S} = V(\overline{f}) \subset \mathbb{P}_n$$

той же степени, что и S, пересечение которой со стандартной аффинной картой U_0 совпадает с S. Если (неоднородный) многочлен степени d, задающий S имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \cdots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где каждый f_i однороден степени i, то проективное замыкание $\overline{S}$ задаётся однородным многочленом

$$\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \cdots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,$$

который получается из f умножением каждого монома на подходящую степень x_0, дополняющую степень всего монома до d, и превращается в f при $x_0 = 1$. Дополнение $\overline{S} \smallsetminus S = \overline{S} \cap U_0^{(\infty)}$ задаётся в однородных координатах $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$ бесконечно удалённой гиперплоскости $x_0 = 0$ уравнением $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Таким образом, лежащие на бесконечности точки гиперповерхности $\overline{S}$ — это в точности нули старшей однородной компоненты уравнения, задающего S . В аффинной геометрии их обычно называют *асимптотическими направлениями* гиперповерхности S .

Например проективным замыканием аффинной кубической кривой $x_1 = x_2^3$ является проективная кривая $x_0^2 x_1 = x_2^3$, которая имеет на бесконечности ровно одну точку $(0 : 1 : 0)$ и в аффинной карте U_1 выглядит как полукубическая парабола $x_0^2 = x_2^3$ с остриём в этой точке.

9.5. Пространство гиперповерхностей. Однородные многочлены фиксированной степени d вместе с нулевым многочленом образуют конечномерное векторное подпространство, которое мы будем обозначать через

$$S^d V^* \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] .$$

Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же гиперповерхность, гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$, которое мы будем называть *пространством гиперповерхностей* степени d в $\mathbb{P}(V)$.

Упражнение 9.9. Найдите размерность пространства гиперповерхностей d-той степени в $\mathbb{P}_n$.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ при фиксированном $p \in \mathbb{P}(V)$ является *линейным уравнением на* $f \in S^d V^*$, гиперповерхности степени d, проходящие через заданную точку p, образуют проективную гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями

$$V(f_1),\ V(f_2),\ \dots\ ,\ V(f_m) ,$$

задаётся уравнением вида

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0 ,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Bbbk$ — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение

$$V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m) .$$

По старинной традиции, одномерные и двумерные линейные системы также называются *пучками* и *связками* соответственно. Поскольку любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, всякий пучок гиперповерхностей (над любым полем!) всегда содержит гиперповерхность, проходящую через любую наперёд заданную точку.

Пример 9.4 (наборы точек на $\mathbb{P}_1$ и кривая Веронезе)
Фиксируем двумерное векторное пространство $U \simeq \Bbbk^2$ с координатами x_0, x_1 и рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Всякое конечное множество точек $p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ (среди которых допускаются и совпадающие) является алгебраической гиперповерхностью, а именно, множеством нулей однородного многочлена d-той степени

$$f(x_0, x_1) = \prod_{\nu=1}^{d} \det(x, p_\nu) = \prod_{\nu=1}^{d} (p_{\nu,1} x_0 - p_{\nu,0} x_1)\,, \quad \text{где } p_\nu = (p_{\nu,0} : p_{\nu,1})\,. \tag{9-2}$$

По аналогии с (неоднородными) многочленами от одной переменной, задающими конфигурации точек на аффинной прямой $\mathbb{A}_1$, мы будем называть точки $p_\nu \in \mathbb{P}_1$ *корнями* однородного многочлена f от переменных x_0, x_1. В этом смысле разложение (9-2) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням. В частности, у однородного многочлена степени d от двух переменных имеется не более d различных корней на $\mathbb{P}_1$, а если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то таковых корней, с учётом кратностей[1], будет ровно d. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ всевозможные d-точечные конфигурации на $\mathbb{P}_1$ взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, ассоциированного с $(d+1)$-мерным векторным пространством однородных многочленов степени d от x_0, x_1.

Конфигурации, в которых все d точек слипаются в одну, образуют (над любым полем!) алгебраическую кривую $C_d \subset \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, которая называется *кривой Веронезе* степени d или *рациональной нормальной кривой* d-той степени. Эта кривая является образом *отображения Веронезе*

$$\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*) \xrightarrow{v_d} \mathbb{P}_d = \mathbb{P}\left(S^d U^*\right)\,, \tag{9-3}$$

переводящего линейную форму $\varphi \in U^*$ (задающую одну точку $p \in \mathbb{P}(U)$) в её d-ю степень $\varphi^d \in S^d(U^*)$ (задающую d-кратную точку p). Если записывать формы $\varphi \in U^*$ и $f \in S^d(U^*)$ в виде

$$\varphi(x) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_\nu a_\nu \cdot \binom{d}{\nu} x_0^{d-\nu} x_1^\nu$$

и использовать отношения коэффициентов $(\alpha_0 : \alpha_1)$ и $(a_0 \colon a_1 \colon \dots : a_d)$ в качестве однородных координат на $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ и на $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ соответственно,

[1] под кратностью корня p понимается максимальная степень линейной формы $\det(t, p)$, на которую делится f

кривая Веронезе будет задаваться параметрическим уравнением

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \longmapsto (a_0 \colon a_1 \colon \ \dots : a_d) = \left(\alpha_0^d : \alpha_0^{d-1}\alpha_1 : \alpha_0^{d-2}\alpha_1^2 : \dots : \alpha_1^d\right) \ . \tag{9-4}$$

Таким образом, C_d состоит из всех точек $(a_0 \colon a_1 \colon \ \dots : a_d) \in \mathbb{P}_d$, координаты которых составляют геометрическую прогрессию. Это условие равносильно тому, что

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1 \ ,$$

и может быть выражено системой однородных уравнений второй степени — обращением в нуль всех 2×2-миноров этой матрицы.

Например, кривая $C_2 \subset \mathbb{P}_2$ образована всеми квадратными трёхчленами $a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + a_2x_1^2$, которые являются полными квадратами. Она задаётся известным из школы уравнением

$$D/4 = -\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0a_2 = 0 \tag{9-5}$$

и допускает следующее параметрическое задание:

$$a_0 = \alpha_0^2 \ , \quad a_1 = \alpha_0\alpha_1 \ , \quad a_2 = \alpha_1^2 \ . \tag{9-6}$$

Пересечение кривой (9-4) с произвольной гиперплоскостью, заданной уравнением $\sum A_\nu a_\nu = 0$, состоит корней $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$ однородного многочлена $\sum A_\nu \cdot \alpha_0^{d-\nu}\alpha_1^\nu$ степени d, каковых имеется не более d. Поэтому при $2 \leqslant m \leqslant d$ никакие $m+1$ точек кривой C_d не лежат в одном $(m-1)$-мерном подпространстве. Над алгебраически замкнутым полем пересечение кривой C_d с любой гиперплоскостью состоит в точности из d точек — именно поэтому мы и сказали выше, что *степень* кривой C_d равна d.

9.6. Дополнительные подпространства и проекции. Проективные подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если $K \cap L = \varnothing$ и $\dim K + \dim L = n - 1$. Например, любые две непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ дополнительны. На языке линейной алгебры дополнительность означает, что соответствующие векторные пространства $U, W \subset V$ трансверсальны: $U \cap V = \{0\}$, и

$$\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = (n+1) = \dim V \ ,$$

откуда $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$, причём обе компоненты этого разложения отличны от нуля, если v не содержится ни в U, ни в W. Это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная прямая $\ell = (q, r)$, проходящая через p и пересекающая каждое из подпространств K, L. В самом деле, в качестве точек q и r, задающих такую прямую, можно взять компоненты u, w разложения вектора v, задающего точку p, и наоборот, если вектор

v, задающий точку p оказался в двумерной линейной оболочке ненулевых векторов $u \in U$ и $w \in W$, то одномерные подпространства, натянутые на u и w должны содержать компоненты разложения вектора v в силу единственности его разложения по U и W.

Для любой пары дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ определено отображение *проектирования на L с центром в K*

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \longrightarrow L \,,$$

тождественно действующее на L и переводящее каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения с L единственной прямой,, проходящей через p и пересекающей и K и L. В согласованных с разложением $V = U \oplus W$ однородных координатах $(x_0 : x_1 : \ \dots : x_n)$ таких, что $(x_0 : x_1 : \ \dots : x_m)$ являются координатами в K, а $(x_{m+1} : x_{m+2} : \ \dots : x_n)$ — в L, проекция π_L^K просто удаляет первые $(m+1)$ координат x_ν с $0 \leqslant \nu \leqslant m$.

Пример 9.5 (проектирование коники на прямую)
Рассмотрим проекцию $\pi_L^p : C \longrightarrow L$ коники C, заданной уравнением $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ из примера (прим. 9.3), на прямую L, заданную уравнением $x_0 = 0$, из точки $p = (1:0:1) \in C$.

В стандартной аффинной карте U_2, где $x_2 = 1$, она выглядит как на рис. 9◇6. Такая проекция устанавливает *бирациональную биекцию* между L и C: каждая проходящая через p прямая $\ell_t = (pt)$, за исключением касательной[1], пересекает C ещё ровно в одной точке $q = q(t)$, отличной от p, и однородные координаты $q = (q_0 : q_1 : q_2)$ и $t = (0 : t_1 : t_2)$ этих точек суть *рациональные* алгебраические функции друг друга:

$$\begin{aligned} (t_1 : t_2) &= (\, q_1 : (q_2 - q_0)\,) \\ (q_0 : q_1 : q_2) &= (\,(t_1^2 - t_2^2) : 2\,t_1 t_2 : (t_1^2 + t_2^2)\,) \end{aligned} \tag{9-7}$$

Упражнение 9.10. Проверьте эти формулы и обратите внимание, что вторая из них, когда $(t_1 : t_2)$ пробегает $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, дает полный список пифагоровых троек[2] $(q_0 : q_1 : q_2)$.

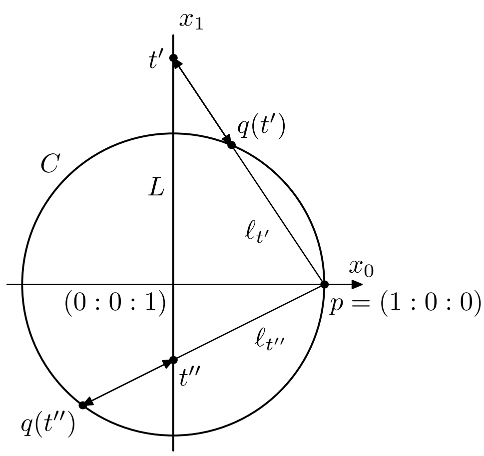

Рис. 9◇6. Проектирование коники.

Отметим, что коника C переводится в конику Веронезе $a_1^2 = a_0 a_2$ из (9-5) обратимой линейной заменой координат

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_0 = (a_0 + a_2)/2 \end{cases}$$

[1]которая задается уравнением $x_0 = x_2$, пересекает ℓ в бесконечно удалённой точке $t = (0 : 1 : 0)$ и отвечает самой точке $p = q(\infty)$

[2]т. е. целых решений уравнения Пифагора $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$

и параметризация (9-6) кривой Веронезе при этой замене коодинат превращается в точности в параметризацию (9-7).

9.7. Линейные проективные изоморфизмы. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \xrightarrow{\sim} W$ корректно определяет биекцию $\overline{F} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, которая называется *проективным линейным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

Упражнение 9.11. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ две прямые ℓ_1, ℓ_2 и точку $p \notin \ell_1 \cup \ell_2$. Убедитесь, что проекция из p задаёт проективный изоморфизм $\gamma_p : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$.

Лемма 9.1
Для любых двух упорядоченных наборов из $(n+2)$ точек

$$\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\} \in \mathbb{P}(U) \ , \quad \{q_0, q_1, \dots, q_{n+1}\} \in \mathbb{P}(W) \ ,$$

в каждом из которых которых никакие $(n+1)$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \xrightarrow{\sim} W$, такой что $\overline{F}(p_i) = q_i$ при всех i.

Доказательство. Зафиксируем некоторые векторы u_i и w_i, представляющие точки p_i и q_i, и возьмём $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ в качестве базисов в U и W. Оператор $F : U \longrightarrow W$ тогда и только тогда переводит точку p_i в точку q_i, когда $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \Bbbk$. В частности, для того, чтобы точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ переводились преобразованием $\overline{F}$ в точки $q_0, q_1, \dots, q_n$, необходимо и достаточно, чтобы оператор F в выбранных нами базисах имел диагональную матрицу с произвольными ненулевыми константами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ по главной диагонали. Заметим теперь, что в разложении

$$u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

все координаты x_i отличны от нуля, поскольку в противном случае $n+1$ точка[1] оказались бы в одной гиперплоскости, заданной условием обращения этой координаты в нуль. Если аналогичным образом разложить вектор $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ и записать равенство $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ в виде системы равенств на координаты, мы получим на константы $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ соотношения $y_i = \lambda_{n+1} \lambda_i x_i$ (при всех $0 \leqslant i \leqslant n$), из которых $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot (y_1/x_1,\, y_2/x_2,\, \dots,\, y_n/x_n)$. Таким образом, матрица оператора F определена однозначно с точностью до постоянного множителя $\lambda_{n+1}^{-1} \neq 0$. □

Следствие 9.1
Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. □

[1] а именно, p_{n+1} и все p_i с номерами, отличными от номера занулившейся координаты вектора u_{n+1}

9.7.1. Линейная проективная группа. Согласно (лем. 9.1) линейные проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(V)$ образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ по подгруппе гомотетий $H = \{\lambda \cdot \mathrm{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset \mathrm{GL}(V)$. Эта фактор группа обозначается $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/H$ и называется *проективной линейной группой*. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу $\mathrm{GL}(V)$ с группой невырожденных матриц GL_{n+1}, проективная группа $\mathrm{PGL}(V)$ отождествится с группой PGL_{n+1} невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

9.8. Дробно-линейные преобразования прямой. Группа $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$. Она действует на $\mathbb{P}_1$ по правилу

$$(x_0 : x_1) \overset{\overline{A}}{\longmapsto} \left((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1) \right) .$$

В стандартной аффинной карте $U_0 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_1/x_0$, это действие имеет вид дробно линейного преобразования

$$t \longmapsto \frac{dt + c}{bt + a}$$

Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки q, r, s в ∞, 0, 1 таково:

$$t \longmapsto \frac{t - r}{t - q} \cdot \frac{s - r}{s - q} \tag{9-8}$$

9.8.1. Двойное отношение. Правая часть равенства (9-8) называется *двойным отношением*[1] точек q, r, s, t и обозначается $[q, r, s, t]$. В однородных координатах двойное отношение четырёх точек выражается через попарные определители векторов, представляющих эти точки:

$$[p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)\,(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)\,(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)} \;. \tag{9-9}$$

Из определения сразу следует, что двойное отношение четырёх различных точек может принимать любые значения кроме ∞, 0 и 1 и что две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием прямой, когда их двойные отношения одинаковы. Поскольку замена однородных координат является таким преобразованием, мы заключаем, что правая часть равенства (9-9) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть (содержая разности аффинных координат точек) не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной

[1] по-английски *cross-ratio*

координаты в ней (при условии, что карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны).

Упражнение 9.12. Убедитесь в этом прямым вычислением.

Выясним теперь, как изменяется двойное отношение при перестановках точек. Из формулы (9-9) очевидно, что подгруппа Клейна[1] $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{S}_4$, состоящая из тождественного преобразования и одновременных транспозиций непересекающихся пар точек, не меняет двойного отношения:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_2, p_1] \tag{9-10}$$

Поэтому действие группы перестановок $\mathfrak{S}_4$ на множестве значений двойного отношения данных четырёх точек пропускается через действие фактор группы $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{D}_3$, которая кроме класса тождественного отображения содержит ещё три отражения (классы транспозиций $(1,2)$, $(1,3)$ и $(1,4)$) и два поворота (классы циклов $(1,2,3)$ и $(1,3,2)$). Если обозначить значение двойных отношений (9-10) через ϑ, из (9-9) получаем

$$\begin{aligned}
[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_2, p_1] &= \vartheta \\
[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_1, p_2] &= 1/\vartheta \\
[p_3, p_2, p_1, p_4] = [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_2, p_3] &= \vartheta/(\vartheta-1) \\
[p_4, p_2, p_3, p_1] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_3, p_1, p_2, p_4] = [p_1, p_3, p_2, p_4] &= 1-\vartheta \\
[p_2, p_3, p_1, p_4] = [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_3, p_2] &= (\vartheta-1)/\vartheta \\
[p_3, p_1, p_2, p_4] = [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_1, p_3] &= 1/(1-\vartheta)\,.
\end{aligned} \tag{9-11}$$

Упражнение 9.13. Проверьте это.

Имеются три специальных значения $\vartheta = -1,\ 2,\ 1/2$, которые не меняются, соответственно, при транспозициях $(1,2)$, $(1,3)$ и $(1,4)$ и циклически переставляются двумя поворотами, а также два специальных значения ϑ, равные двум корням уравнения[2] $x^2 - x + 1 = 0$, которые не меняются при поворотах и переставляются между собой при транспозициях. При всех остальных значениях ϑ мы получаем шесть различных значений двойного отношения.

9.8.2. Гармонические пары точек Четвёрка точек $\{a, b; c, d\} \in \mathbb{P}_1$ называется *гармонической*, если их двойное отношение

$$[a, b, c, d] = -1\,.$$

[1] напомним, что если отождествить симметрическую группу $\mathfrak{S}_4$ с собственной группой куба, переставляющей 4 его диагонали, то возникает сюрьективный гомоморфизм $\mathfrak{S}_4 \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_3$, задаваемый действием группы куба на трёх отрезках, соединяющих центры противоположных граней; ядом этого гомоморфизма является группа двуугольника $\mathfrak{D}_2$, или группа Клейна, состоящая из тождественного отображения и трёх поворотов на 180° вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней куба

[2] т. е. отличным от -1 кубическим корням из единицы в поле $\Bbbk$

При выполнении этого условия говорят также, что пары точек (a, b) и (c, d) *гармоничны* по отношению друг к другу. Алгебраически гармоничность равносильна тому, что изменение порядка точек в одной из пар не меняет двойного отношения, или тому, что двойное отношение не меняется при перемене пар местами — как мы уже говорили, из (9-11) вытекает, что оба эти условия равносильны между собой, и что гармоничность двух пар точек по отношению другу является *симметричным* отношением на парах *неупорядоченных* точек.

Геометрически гармоничность означает, что в карте, для которой точка a лежит на бесконечности, точка b является серединой отрезка $[c, d]$.

Пример 9.6 (четырёхвешинник)
С каждой четвёркой точек $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие 3 из которых не коллинеарны, связана конфигурация из трёх пар прямых, соединяющих пары данных точек (см. рис. 9◇7) и называемых *сторонами* четырёхвершинника $abcd$. Пусть эти прямые пересекаются в точках $x = (ab) \cap (cd)$, $y = (ac) \cap (bd)$, $z = (ab) \cap (cd)$. Тогда в каждом из трёх пучков прямых с центрами в точках x, y, z пара сторон четырёхвершинника гармонична по отношению к паре сторон треугольника xyz. Чтобы проверить это, запараметризуем пучок прямых, проходящих через точку x, точками прямой (ad) или точками прямой (bc) и покажем, что прямая (xy) пересекает прямые (ad) и (bc) по таким точкам x', x'', что $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$. Поскольку центральные проекции из x и из y являются дробно линейными изоморфизмами между прямыми (ad) и (bc), мы имеем следующие равенства двойных отношений соответственных точек:

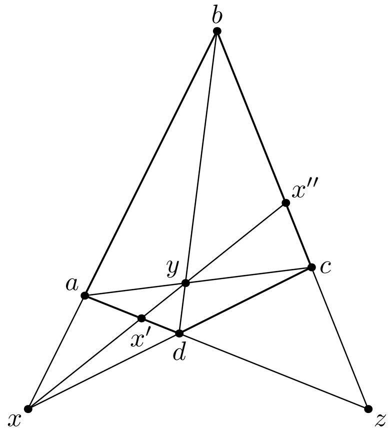

Рис. 9◇7. Четырёхвешинник.

$$[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x'] \,.$$

Коль скоро результате перестановки первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно -1, что и требовалось.

Упражнение 9.14. Покажите, что на каждой из шести «сторон[1]» четырёхвершинника $abcd$, лежащие на ней вершины четырёхвершинника гармоничны лежащим на ней же вершинам треугольника xyz, а на каждой из трёх сторон треугольника xyz пара лежащих на ней вершин треугольника гармонична паре точек пересечения этой стороны с теми двумя сторонами четырёхвершинника, которые пересекаются в третьей вершине треугольника.

[1] т. е. прямых, соединяющих какую-либо пару вершин

Лемма 9.2
Если над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ имеется биективное отображение

$$\varphi\,:\;\mathbb{P}_1 \smallsetminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{\text{конечное множество}\}\,,$$

которое в некоторой аффинной карте с аффинной координатой t может быть задано формулой

$$t \mapsto \varphi(t) = g(t)/h(t)\;,\quad \text{где}\quad g,h \in \Bbbk[t]\,, \tag{9-12}$$

то φ является дробно линейным изоморфизмом (и, в частности, однозначно продолжается на всю прямую).

Доказательство. В однородных координатах $(x_0 : x_1)$, для которых $t = x_0/x_1$, формула (9-12), задающая отображение φ, может быть переписана[1] в виде

$$\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (F(x_0,x_1) : G(x_0,x_1))\;,$$

где F и G не пропорциональные друг другу однородные многочлены от (x_0, x_1) одинаковой степени $d = \deg F = \deg G$. Обозначим проективизацию пространства однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) через $\mathbb{P}_d$. Если точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет при отображении φ ровно один прообраз, то однородный многочлен $\vartheta_1 \cdot F(x_0,x_1) - \vartheta_0 \cdot G(x_0,x_1)$ имеет на $\mathbb{P}_1$ ровно один корень $x = \varphi^{-1}(\vartheta)$, который над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ автоматически является d-кратным, так что соответствующая точка $\vartheta_1 F(x) - \vartheta_0 G(x)$ лежит в на кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ из прим. 9.4 на стр. 158. Поскольку поле $\Bbbk$ бесконечно, а отображение φ биективно вне конечного множества точек, кривая C_d и прямая $(F,G) \subset \mathbb{P}_d$ имеют бесконечно много точек пересечения. Но в (прим. 9.4) мы видели, что при $d \geqslant 2$ никакие три точки кривой C_d не лежат на одной прямой. Поэтому $d = 1$ и $\varphi \in \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$. $\square$

[1] возможно, после некоторой модификации конечного множества, на котором отображение φ не определено