§2. Многомерные пространства

2.1. Базисы и размерность. Рассмотрим векторное пространство V над полем $\Bbbk$. Скажем, что вектор $v \in V$ *линейно выражается*, через векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$, если

$$v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m$$

для некоторых $\lambda_i \in \Bbbk$. Правая часть этой формулы называется *линейной комбинацией* векторов $w_i \in V$ с коэффициентами $\lambda_i \in \Bbbk$.

Набор векторов $w_1, w_2, \dots, w_m \in V$ называется *порождающим* векторное пространство V, если каждый вектор $v \in V$ линейно выражается через векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$. Векторное пространство, в котором имеется конечный порождающий набор векторов, называется *конечномерным*.

Порождающий набор векторов $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ называется *базисом* векторного пространства пространства V, если любой вектор $v \in V$ линейно выражается через них *единственным* образом, т. е. если из равенства

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$$

вытекает, что $x_i = y_i$ для всех i. Коэффициенты x_i единственного линейного выражения

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

вектора v через базисные векторы e_ν называются *координатами* вектора v в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Ниже, в сл. 2.1, мы покажем, что любое конечномерное векторное пространство V обладает базисом, причём все базисы состоят из одно и того же числа векторов. Это число называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$.

Пример 2.1 (координатное пространство $\Bbbk^n$)
Координатное пространство $\Bbbk^n$ является непосредственным обобщением координатной плоскости $\Bbbk^2$. По определению, векторами пространства $\Bbbk^n$ являются упорядоченные наборы из n чисел

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\,, \quad x_i \in \Bbbk$$

(для экономии бумаги мы пишем их в строчку, но часто бывает удобно представлять векторы пространства $\Bbbk^n$ в виде столбцов). Сложение векторов и умножение векторов на числа задаётся правилами

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, \dots\,,\, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)\,.$$

Векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ с 1 на i-том месте и нулями в остальных

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\,, \tag{2-1}$$

образуют базис пространства $\Bbbk^n$, поскольку произвольный вектор

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Bbbk^n$$

линейно выражается через них единственным способом:

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n\,. \tag{2-2}$$

Таким образом, $\dim \Bbbk^n = n$. Базис (2-1) называются *стандартным* базисом координатного пространства $\Bbbk^n$.

Пример 2.2 (пространство матриц)
Обобщением координатного пространства $\Bbbk^n$ является *пространство матриц* $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$, векторами которого, по определению, являются прямоугольные таблицы из m строк и n столбцов, заполненные числами из поля $\Bbbk$, а сложение векторов и умножение векторов на числа определяется поэлементно: если матрица $A = (a_{ij})$ имеет в i-той строке и j-том столбце элемент a_{ij}, а матрица $B = (b_{ij})$ — элемент b_{ij}, то их линейная комбинация $\lambda A + \mu B$ с коэффициентами $\lambda, \mu \in \Bbbk$, по определению, имеет в i-той строке и j-том столбце элемент $\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$. Например,

$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -3 & -2\\ 5 & -2 & -9\end{pmatrix}.$$

Таким образом, координатное пространство $\Bbbk^n$ можно воспринимать как пространство $\mathrm{Mat}_{1\times n}(\Bbbk)$ (матрицы, состоящие из единственной строки) или как пространство $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(\Bbbk)$ (матрицы, состоящие из единственного столбца).

Мы будем обозначать через E_{ij} матрицу, имеющую единицу в пересечении i-той строки и j-того столбца и нули во всех остальных клетках. Матрицы E_{ij} называются *стандартными базисными матрицами* (или *матричными единицами*) и образуют базис в пространстве матриц, поскольку произвольная матрица $A = (a_{ij})$ единственным образом линейно выражается через них:

$$A = \sum_{ij} a_{ij}E_{ij}\,.$$

В частности, $\dim \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk) = mn$.

2.1.1. Линейная зависимость. Векторы $v_1, v_2, \dots, v_m$ в произвольном векторном пространстве V называются *линейно независимыми*, если из равенства $\sum \lambda_i v_i = 0$ вытекает, что все $\lambda_i = 0$. Наоборот, если существует конечная линейная комбинация

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \dots + \lambda_mv_m = 0\,, \tag{2-3}$$

в которой имеются ненулевые коэффициенты λ_i, то векторы $v_1, v_2, \dots, v_m$ называются *линейно зависимыми*.

Линейная зависимость векторов означает, что любой входящий в неё с ненулевым коэффициентом вектор линейно выражается через остальные. Например, если $\lambda_m \neq 0$, то

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} v_2 - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} v_{m-1}.$$

Наоборот, любое линейное выражение вида $v_m = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_{m-1} v_{m-1}$ можно записать в виде линейной зависимости

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_{m-1} v_{m-1} - v_m = 0.$$

Лемма 2.1
Набор векторов $\{e_\nu\}$, порождающий векторное пространство V, тогда и только тогда является базисом, когда он линейно независим.

Доказательство. Если $\sum \lambda_i e_i = 0$ и не все λ_i нулевые, то любой вектор $v = \sum x_i e_i$ допускает *другое* выражение $v = \sum (x_i + \lambda_i) e_i$ через векторы e_i. Наоборот, если $v = \sum x_i e_i = \sum y_i e_i$ — два различных представления одного вектора, то перенося правую часть в середину, получаем линейную зависимость $\sum (x_i - y_i) v_i = 0$. □

Лемма 2.2 (лемма о замене)
Если векторы $w_1, w_2, \ldots, w_m$ порождают V, а векторы $u_1, u_2, \ldots, u_k$ линейно независимы, то $m \geqslant k$ и векторы w_i можно перенумеровать так, что набор

$$u_1, u_2, \ldots, u_k,\ w_{k+1},\ w_{k+2},\ \ldots,\ w_m$$

(получающихся заменой первых k векторов w_i векторами u_i) также будет порождать пространство V.

Доказательство. Пусть $u_1 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_m w_m$. Поскольку $u_1 \neq 0$ (иначе векторы u_i линейно зависимы!), среди коэффициентов x_i есть хоть один ненулевой. Перенумеруем векторы w_i так, чтобы $x_1 \neq 0$. Тогда вектор w_1 линейно выражается через u_1 и $w_2, \ldots, w_m$ по формуле

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \cdots - \frac{x_m}{x_1} w_m.$$

Следовательно, векторы $u_1,\ w_2,\ w_3,\ \ldots,\ w_m$ порождают V.

Далее действуем по индукции. Пусть для очередного i в пределах $1 \leqslant i < k$ векторы $u_1, u_2, \ldots, u_i,\ w_{i+1},\ w_{i+2},\ \ldots,\ w_m$ порождают V. Тогда

$$u_{i+1} = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_i u_i + x_{i+1} w_{i+1} + x_{i+2} w_{i+2} + \cdots + x_m w_m. \tag{2-4}$$

Поскольку векторы u_ν линейно независимы, вектор u_{i+1} нельзя линейно выразить только через векторы $u_1, u_2, \ldots, u_i$, и значит, в разложение (2-4) входит с ненулевым коэффициентом хотя бы один из оставшихся векторов w_j. Следовательно, $m > i$ и мы можем занумеровать оставшиеся w_j так, чтобы в $x_{i+1} \neq 0$. Теперь, как и на первом шагу, вектор w_{i+1} линейно выражается через векторы

$$u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, w_{i+2}, w_{i+3}, \dots, w_m,$$

и, значит, этот набор порождает V, что воспроизводит индуктивное предположение. □

Упражнение 2.1. Покажите, что векторное пространство V тогда и только тогда бесконечномерно, когда в нём имеются линейно независимые наборы из сколь угодно большого числа векторов.

Следствие 2.1 (теорема о базисе)
В каждом конечномерном векторном пространстве V любой порождающий набор векторов содержит в себе некоторый базис, а любой линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса. При этом все базисы состоят из одинакового количества векторов.

Доказательство. Пусть пространство V порождается векторами $v_1, v_2, \dots, v_m$. По очереди выкидывая из него те векторы, которые линейно выражаются через остальные, мы в конце концов получим линейно независимый порождающий набор векторов, который по лем. 2.1 является базисом.

Поскольку число векторов в любом линейно независимом наборе не больше, чем в любом порождающем, все базисы состоят из одинакового количества векторов.

Добавляя к произвольно взятому линейно независимому набору векторов вектор, который не выражается через него линейно, мы получаем линейно независимый набор векторов. В силу леммы о замене, повторив эту процедуру не более m раз, мы придём к линейно независимому набору, порождающему всё пространство, т. е. получим базис. □

Следствие 2.2
В n-мерном векторном пространстве V всякий линейно независимый набор из n векторов, а также всякий порождающий набор из n векторов является базисом.

Доказательство. Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляют базис V, а векторы

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

линейно независимы. По лемме о замене (лем. 2.2) порождающие векторы e_i можно заменить векторами v_i так, что набор $v_1, v_2, \dots, v_n$ останется порождающим. Тем самым, он — базис.

Пусть теперь векторы $w_1, w_2, \dots, w_n$ порождают V. Тогда этот набор векторов содержит в себе некоторый базис. По теореме о базисе в нём должно быть ровно n векторов, т. е. этот базис совпадает со всем набором $w_1, w_2, \dots, w_n$. □

Следствие 2.3

Всякое n-мерное векторное пространство V над полем $\Bbbk$ изоморфно координатному пространству $\Bbbk^n$. Множество изоморфизмов между V и $\Bbbk^n$ взаимно однозначно соответствует множеству базисов в V.

Доказательство. Если отображение $F : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$ является изоморфизмом, то образы $v_i = F(e_i)$ стандартных базисных векторов $e_i \in \Bbbk^n$ из (2-1) образуют базис пространства V. Наоборот, для любого базиса $v_1, v_2, \dots, v_n$ пространства V отображение $F : \Bbbk^n \longrightarrow V$, заданное правилом

$$F\big((x_1, x_2, \dots, x_n) \big) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

линейно и биективно (обязательно убедитесь в этом!), т. е. является изоморфизмом, и переводит стандартный базис (2-1) пространства $\Bbbk^n$ в базис v_i пространства V. □

Пример 2.3 (пространство функций)

Пусть X — произвольное множество. Множество $\Bbbk^X$ всех функций $X \xrightarrow{f} \Bbbk$ образует векторное пространство относительно поточечного сложения значений функций и умножения их на константы:

$$[f_1 + f_2](x) = f_1(x) + f_2(x)\,, \quad [\lambda f](x) = \lambda \cdot f(x)\,.$$

Если множество X конечно и состоит из n элементов

$$X = \{1,\, 2,\, \dots\, ,\, n\}\,,$$

пространство функций $X \longrightarrow \Bbbk$ изоморфно координатному пространству $\Bbbk^n$: отображение, сопоставляющее функции f набор её значений во всех точках X

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = \big(f(1),\, f(2),\, \dots,\, f(n)\big)$$

линейно и биективно. Обратное отображение $F = f^{-1} : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} \Bbbk^X$ переводит стандартный базисный вектор $e_i \in \Bbbk^n$ в *δ-функцию* $\delta_i : X \longrightarrow \Bbbk$:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i \end{cases}$$

Пример 2.4 (пространство подмножеств)

Если в предыдущем примере взять в качестве $\Bbbk$ поле $\mathbb{F}_2$, состоящее из двух элементов[1] 0, 1 и сопоставить каждому подмножеству $Z \subset X$ его *характеристическую функцию* $\chi_Z : X \longrightarrow \mathbb{F}_2$, принимающую значение 1 всюду на Z и значение 0 всюду на $X \smallsetminus Z$, мы получим взаимно однозначное соответствие между пространством функций и множеством всех подмножеств в X. Эта биекция наделяет множество подмножеств структурой векторного пространства над полем $\mathbb{F}_2$, изоморфного пространству функций $X \longrightarrow \mathbb{F}_2$.

[1] в котором $0 + 1 = 1 \cdot 1 = 1$, а все остальные суммы и произведения нулевые (включая $1 + 1 = 0$)

Пример 2.5 (пространство многочленов)
Многочлены с коэффициентами в поле $\Bbbk$ образуют векторное пространство над $\Bbbk$ относительно операций сложения многочленов и умножения их на константы. Пространство многочленов обозначается через $\Bbbk[x]$. Счётный набор мономов $1, x, x^2, \dots$ является базисом векторного пространства многочленов $\Bbbk[x]$, поскольку каждый многочлен, по определению, представляет собою конечную линейную комбинацию таких мономов, и равенство двух многочленов, по определению, означает равенство их коэффициентов.

Многочлены степени не выше n образуют в $\Bbbk[x]$ векторное подпространство, которое мы будем обозначать $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$. Первые $n+1$ мономов $1, x, x^2, \dots, x^n$ образуют в $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ базис.

Упражнение 2.2. Покажите, что любой набор многочленов $f_0, f_1, \dots, f_n \in \Bbbk[x]$, в котором $\deg f_m = m$ и каждый $f_m = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$ имеет ненулевой старший коэффициент a_0, является базисом векторного пространства $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n.

Отметим, что в пространстве формальных степенных рядов $\Bbbk[[x]]$ счётный набор мономов $1, x, x^2, \dots$ базисом *не является*, поскольку ряд с бесконечным числом ненулевых коэффициентов не является *конечной* линейной комбинацией мономов.

Упражнение 2.3. Покажите, что в $\Bbbk[[x]]$ нет счётного базиса.

Пример 2.6 (пространство линейных отображений)
Линейные отображения

$$U \xrightarrow{F} W$$

между двумя векторными пространствами U и W над полем $\Bbbk$ образуют векторное пространство относительно операций поточечного сложения значений и умножения их на числа

$$F + G : v \longmapsto F(v) + G(v) \quad \text{и} \quad \lambda F : v \longmapsto \lambda \cdot F(v)\,.$$

Это пространство обозначается через $\mathrm{Hom}(U, W)$ (или $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W)$, если важно подчеркнуть, над каким основным полем рассматриваются пространства).

Если пространства U и W конечномерны, то выбирая в них базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m \in W\,,$$

мы можем сопоставить каждому линейному отображению $F : U \longrightarrow W$ матрицу

$$F_{wu} = (f_{ij}) \subset \mathrm{Mat}_{m\times n}\,,$$

в j-том столбце которой стоят коэффициенты разложения вектора $F(u_j)$ по базису $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$:

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot f_{ij} \in W \tag{2-5}$$

Получающаяся таким образом матрица

$$F_{wu} = (F(u_1),\, F(u_2),\, \dots\, ,\, F(u_n)) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{pmatrix} \tag{2-6}$$

называется *матрицей оператора* F *в базисах*

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \text{и} \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_m)\,.$$

Упражнение 2.4. Убедитесь, что при сложении линейных отображений и умножении линейных отображений на числа их матрицы (в зафиксированных базисах) складываются и умножаются на числа.

Таким образом, сопоставляя линейному отображению его матрицу в выбранных базисах, мы получаем линейное отображение

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W) \xrightarrow{F \mapsto F_{wu}} \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk) \tag{2-7}$$

(подчеркнём, что это отображение *зависит* от выбора базисов u и w).

Предложение 2.1
При любом выборе базисов $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ и $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$ линейное отображение (2-7) является изоморфизмом векторных пространств. В частности, $\dim \mathrm{Hom}(U, W) = \dim U \cdot \dim W$.

Доказательство. Матрица $F_{wu} = (f_{ij})$ однозначно определяет оператор F, поскольку в силу линейности F его действие на произвольный вектор $v = \sum u_j x_j$ однозначно задаётся тем, как F действует на базис пространства U:

$$F(v) = F\Big(\sum_{j=1}^{n} u_j x_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} F(u_j)\cdot x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_i f_{ij} x_j\,. \tag{2-8}$$

Таким образом, отображение (2-7) инъективно. С другой стороны, для произвольной матрицы $(f_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$ можно *определить* отображение

$$F : U \longrightarrow W$$

формулой (2-8).

Упражнение 2.5. Убедитесь, что заданное таким способом отображение F линейно, а его матрица в базисах u и w совпадает с матрицей (f_{ij}).

Таким образом, отображение (2-7) сюрьективно. □

2.2. Подпространства. Пересечение любого семейства подпространств произвольного векторного пространства V тоже является подпространством в V.

Пересечение всех подпространств, содержащих заданное множество векторов $M \subset V$, называется *линейной оболочкой* множества M и обозначается

$$\operatorname{span}(M) = \bigcap_{M \subset U \subset V} U . \tag{2-9}$$

Это наименьшее по включению векторное подпространство в V, содержащее M. Иначе его можно описать как множество всех конечных линейных комбинаций векторов из M. В самом деле, такие линейные комбинации составляют векторное подпространство в V, которое содержатся в любом подпространстве, содержащем M .

2.2.1. Сумма подпространств. Объединение подпространств, как правило, подпространством не является. Например многочлены вида ax^2 и многочлены вида bx образуют два одномерных подпространства в пространстве многочленов, но сумма $x^2 + x$ не лежит в их объединении.

Упражнение 2.6. Покажите, что объединение двух подпространств является подпространством только когда одно из подпространств содержится в другом.

Линейная оболочка объединения $\bigcup\limits_{\nu} U_\nu$ заданного набора подпространств $U_\nu \subset V$ называется *суммой* подпространств U_ν и обозначается $\sum U_\nu$. Таким образом, сумма подпространств состоит из всевозможных конечных сумм векторов, принадлежащих этим подпространствам. Например,

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1\,,\ u_2 \in U_2\} \\ U_1 + U_2 + U_3 &= \{u_1 + u_2 + u_3 \mid u_1 \in U_1\,,\ u_2 \in U_2\,,\ u_3 \in U_3\} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Определение 2.1

Подпространства $U_1, U_2 \subset V$ называются *трансверсальными*, если их пересечение нулевое: $U_1 \cap U_2 = 0$. Сумма трансверсальных подпространств называется *прямой суммой* и обозначается $U_1 \oplus U_2$. Трансверсальные подпространства $U_1, U_2 \subset V$, такие что $U_1 \oplus U_2 = V$, называются *дополнительными*.

Предложение 2.2

Подпространства $U_1, U_2 \subset V$ трансверсальны тогда и только тогда, когда любой вектор $w \in U_1 + U_2$ имеет *единственное* представление в виде $w = u_1 + u_2$ с $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$.

Доказательство. Если $U_1 \cap U_2 \ni u \neq 0$, то нулевой вектор $0 \in U_1 + U_2$ имеет как минимум два разложения в виде $w = u_1 + u_2$ с $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$: можно взять $u_1 = u_2 = 0$, а можно взять $u_1 = u$, $u_2 = -u$. Если же $U_1 \cap U_2 = 0$, то из равенства $u_1' + u_2' = u_1'' + u_2''$, в котором $u_1', u_1'' \in U_1$ и $u_2', u_2'' \in U_2$, следует равенство $u_1' - u_1'' = u_2'' - u_2'$, левая часть которого лежит в U_1, а правая — в U_2. Поэтому вектор $u_1' - u_1'' = u_2'' - u_2'$ лежит в $U_1 \cap U_2 = 0$ и, стало быть, равен нулю, т. е. $u_1' = u_1''$ и $u_2' = u_2''$. □

2.2.2. Прямые суммы наборов подпространств. Более общим образом, сумма подпространств $U_1, U_2, \ldots, U_n \subset V$ называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$, если каждый вектор $w \in U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ имеет единственное представление в виде $w = u_1 + u_2 + + \cdots + u_n \quad$ с $u_i \in U_i$.

Например, если векторы $\{e_i\}$ образуют базис пространства V, то V является прямой суммой одномерных подпространств, порождённых векторами e_i.

Упражнение 2.7. Покажите, что для того, чтобы сумма подпространств U_i была прямой, необходимо и достаточно, чтобы каждое из подпространств U_i было трансверсально сумме остальных подпространств.

Иначе можно сказать, что сумма подпространств $U_1, U_2, \ldots, U_m \subset V$ является прямой тогда и только тогда, когда любой набор ненулевых векторов $u_1, u_2, \ldots, u_m$, в котором $u_i \in U_i$, линейно независим.

2.2.3. Размерность суммы и пересечения. Из теоремы о базисе вытекает, что базис любого подпространства $U \subset V$ можно дополнить до базиса во всём пространстве, откуда, в частности, следует, что любое подпространство U в конечномерном пространстве V тоже конечномерно, и $\dim U \leqslant \dim V$.

Определение 2.2
Для подпространства U конечномерного пространства V разность размерностей

$$\operatorname{codim} U \stackrel{\text{def}}{=} \dim V - \dim U$$

называется *коразмерностью* подпространства U в V.

Предложение 2.3
Для любых двух конечномерных подпространств U_1, U_2 произвольного векторного пространства V $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$.

Доказательство. Выберем какой-нибудь базис $u_1, u_2, \ldots, u_k$ в $U_1 \cap U_2$ и дополним его векторами $v_1, v_2, \ldots, v_r$ и $w_1, w_2, \ldots, w_s$ до базисов в подпространствах U_1 и U_2 соответственно. Достаточно показать, что векторы

$$u_1, u_2, \ldots, u_k,\ v_1, v_2, \ldots, v_r,\ w_1, w_2, \ldots, w_s$$

образуют базис пространства $U_1 + U_2$. Ясно, что они его порождают. Допустим, что они линейно зависимы. Поскольку каждый из наборов $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_r$ и $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_s$ в отдельности линейно независим, в линейной зависимости

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r + \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \cdots + \eta_s w_s = 0$$

присутствуют как векторы v_i, так и векторы w_j. Перенося в одну часть все векторы $u_1, u_2, \ldots, u_k$, $v_1, v_2, \ldots, v_r$, а в другую — все векторы $w_1, w_2, \ldots, w_s$, получаем равенство между вектором из U_1 и вектором из U_2, означающее, что этот вектор лежит в пересечении $U_1 \cap U_2$. Но тогда в его разложении по базисам пространств U_1 и U_2 нет векторов v_i и w_j — противоречие. □

Следствие 2.4
Для любых подпространств U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V выполняется неравенство $\dim(U_1 \cap U_2) \geqslant \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V)$. В частности, $U_1 \cap U_2 \neq 0$ при $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из неравенства $\dim(U_1 + U_2) \leqslant \dim V$ и предыдущего предл. 2.3. $\square$

Следствие 2.5
Трансверсальные векторные подпространства U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V дополнительны тогда и только тогда, когда

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)\,.$$

Доказательство. Поскольку $U_1 \cap U_2 = 0$, написанное равенство равносильно равенству $\dim(U_1 + U_2) = \dim V$, означающему, что $U_1 + U_2 = V$. $\square$

2.3. Линейные отображения. Со всяким линейным отображением векторных пространств

$$F : V \longrightarrow W$$

можно связать два подпространства: подпространство $\operatorname{im} F \subset W$, которое называется *образом* F и определяется как

$$\operatorname{im} F \overset{\text{def}}{=} F(V) = \{w \in W \mid \exists\, v \in V : F(v) = w\}\,,$$

и подпространство $\ker F \subset V$, которое называется *ядром* F и определяется как

$$\ker F = F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

Упражнение 2.8. Убедитесь, что оба множества $\ker F$ и $\operatorname{im} F$ действительно являются векторными подпространствами.

Два вектора $v_1, v_2 \in V$ тогда и только тогда переводятся отображением F в один и тот же вектор $w = F(v_1) = F(v_2) \in \operatorname{im} F$, когда $v_1 - v_2 \in \ker F$. В самом деле, в силу линейности F

$$F(v_1) = F(v_2) \iff F(v_1 - v_2) = 0\,.$$

Таким образом, полный прообраз любого вектора $w \in \operatorname{im} F$ является *параллельным сдвигом* векторного подпространства $\ker F$, т. е. имеет вид $v + \ker F$, где v — произвольным образом фиксированный вектор, отображающийся в w. В частности, мы получаем такое

Предложение 2.4
Линейное отображение инъективно тогда и только тогда, когда его ядро — нулевое. $\square$

Уточнением этого факта является

Предложение 2.5
Для любого линейного отображения $F : V \longrightarrow W$ из конечномерного векторного пространства V выполнено равенство

$$\dim\ker F + \dim\operatorname{im} F = \dim V\,. \tag{2-10}$$

Доказательство. Выберем базис $u_1, u_2, \dots, u_k$ в $\ker F$ и дополним его векторами $e_1, e_2, \dots, e_m$ до базиса всего пространства V. Достаточно показать, что векторы $F(e_1)$, $F(e_2)$, … , $F(e_m)$ составляют базис в $\operatorname{im} F$. Они порождают образ, поскольку для любого $v = \sum y_i u_i + \sum x_j e_j$ имеем

$$F(v) = \sum y_i F(u_i) + \sum x_j F(e_j) = \sum x_j F(e_j)\,.$$

Они линейно независимы, поскольку из равенства $0 = \sum \lambda_i F(e_i) = F(\sum \lambda_i e_i)$ вытекает, что $\sum \lambda_i e_i \in \ker F$ является линейной комбинацией векторов u_i, что возможно только если все $\lambda_i = 0$. □

Следствие 2.6
Следующие свойства линейного отображения $F : V \longrightarrow V$ из пространства V в себя эквивалентны друг другу:
(1) F изоморфизм (2) $\ker F = 0$ (3) $\operatorname{im} F = V$.

Доказательство. Свойства (2) и (3) равносильны друг другу по предл. 2.5, а их одновременное выполнение равносильно (1) по предл. 2.4. □

2.4. Двойственное пространство. Линейное отображение $\xi : V \longrightarrow \Bbbk$ из векторного пространства над полем $\Bbbk$ в само это поле (рассматриваемое как одномерное векторное пространство над собой) называется *линейным функционалом* (а также *линейной формой* или *ковектором*) на пространстве V.

Ковекторы образуют векторное пространство, которое обозначается

$$V^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$$

и называется *двойственным* (или *сопряжённым*) к V пространством.

Пример 2.7 (функционалы вычисления)
Пусть X — произвольное множество, и $V = \Bbbk^X$ — пространство всех функций на X со значениями в поле $\Bbbk$, как в прим. 2.3 на стр. 31. С каждой точкой $p \in X$ связан *функционал вычисления*[1]

$$\operatorname{ev}_p : \Bbbk^X \xrightarrow{f \mapsto f(p)} \Bbbk\,,$$

переводящий каждую функцию $f : X \longrightarrow \Bbbk$ в её значение в точке $p \in X$.

[1] от «*evaluation at p*»

Упражнение 2.9. Убедитесь, что отображение ev_p линейно, и покажите, что для конечного множества X функционалы вычисления ev_p, где p пробегает X, составляют базис пространства, двойственного к пространству функций на X.

Пример 2.8 (координатные функционалы)
Каждому базису $\{e_i\}$ пространства V отвечает набор *координатных функционалов* $e_i^* \in V^*$. Функционал e_i^* сопоставляет вектору $v = \sum x_i e_i \in V$ значение i-той координаты этого вектора:

$$e_i^*(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_i\,.$$

В частности, значение функционала e_i^* на базисных векторах e_j суть

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i \\ 0 & \text{при } j \neq i \end{cases} \tag{2-11}$$

Упражнение 2.10. Убедитесь, что все отображения $e_i^* : V \longrightarrow \Bbbk$ линейны.

Предложение 2.6
Координатные функционалы любого базиса пространства V линейно независимы в V^*. Если пространство V конечномерно, то они составляют базис пространства V^*. В частности, $\dim V = \dim V^*$.

Доказательство. Пусть в V^* имеется конечная линейная комбинация

$$\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \dots + \lambda_N e_N^* = 0\,.$$

Вычисляя обе части на базисном векторе e_i, получаем, что $\lambda_i = 0$. И так для каждого i. Для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что каждый функционал φ на конечномерном векторном пространстве линейно выражается через функционалы e_i^*. Это действительно так: если векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляют базис в V, то $\varphi = \varphi(e_1)\,e_1^* + \varphi(e_2)\,e_2^* + \dots + \varphi(e_n)\,e_n^*$. В самом деле, формы, стоящие в левой и правой частях этого равенства, принимают одинаковое значение $\varphi(e_i)$ на каждом базисном векторе e_i пространства V, а значит, в силу своей линейности, и вообще на любом векторе $v \in V$. $\square$

Определение 2.3
Базисы $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in V$ и $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*) \in V^*$ называются *двойственными* базисами конечномерных пространств V и V^*.

2.4.1. Канонический изоморфизм $V \simeq V^{**}$. Конечномерные пространства V и V^* играют по отношению друг к другу абсолютно симметричные роли. А именно, каждый вектор $v \in V$ может рассматриваться как *функционал вычисления* на пространстве V^*

$$\mathrm{ev}_v : V^* \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi(v)} \Bbbk$$

переводящий линейные формы в их значения на векторе v. Поскольку число $\varphi(v) \in \Bbbk$ линейно зависит как от v, так и от φ, сопоставление вектору v функционала вычисления ev_v задаёт линейное отображение

$$\mathrm{ev} : V \xrightarrow{v \mapsto \mathrm{ev}_v} V^{**} \tag{2-12}$$

Подчеркнём, что это отображение не зависит от выбора каких-либо дополнительных данных на пространстве V (базиса, скалярного произведения и т. п.) или, как ещё говорят, является *каноническим*.

Упражнение 2.11. Убедитесь, что отображение (2-12) переводит любой базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ пространства V в базис пространства V^{**}, двойственный к базису $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ пространства V^*.

Из этого упражнения вытекает, что отображение (2-12) является *изоморфизмом* и *канонически отождествляет* пространства V и V^{**}. Это означает, что каждая линейная форма $\Phi : V^* \longrightarrow \Bbbk$ является функционалом вычисления на вполне определённом векторе $v \in V$, однозначно определяемым формой Φ, а любой базис $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ пространства V^* является набором координатных форм e_i^* для единственного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ (а именно, для двойственного к $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ базиса в $V^{**} = V$).

Упражнение 2.12. Пусть $\dim V = n$ и наборы векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ и форм $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in V^*$ таковы, что $\varphi_i(v_i) = 1$ и $\varphi_i(v_j) = 0$ при $i = j$. Покажите, что
а) оба набора являются базисами
б) любой вектор v выражается через векторы v_i с коэффициентами $\varphi_i(v)$.

Пример 2.9 (формула Лагранжа)

Зафиксируем $m + 1$ различных чисел $a_0, a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$ и рассмотрим на пространстве $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n функционалы вычисления

$$\varphi_i = \mathrm{ev}_{a_i} : \Bbbk[x]_{\leqslant n} \xrightarrow{f \mapsto f(a_i)} \Bbbk\,,$$

сопоставляющие многочлену f его значения в точках $a_0, a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$. Многочлен

$$f_i(x) = \prod_{\nu \neq i} (x - a_\nu)$$

имеет степень m и обращается в нуль во всех точках a_ν кроме точки a_i, а его значение в точке a_i отлично от нуля. Поэтому многочлены

$$v_i(x) = \frac{1}{f_i(a_i)} \cdot f_i(x)$$

и формы φ_i удовлетворяют условию упр. 2.12 и, тем самым, являются двойственными друг другу базисами, причём разложение произвольного многочлена $g(x) \in \Bbbk[x]_{\leqslant n}$ по базису $v_0, v_1, \dots, v_m$ имеет вид

$$g(x) = \sum_{i=0}^{m} g(a_i) \cdot v_i(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{\prod\limits_{\nu} (x - a_\nu)}{\prod\limits_{\nu} (a_i - a_\nu)} \cdot g(a_i) \tag{2-13}$$

(произведения берутся по всем значениям ν, отличным от i). Из сказанного вытекает, в частности, что для любого наперёд заданного набора значений $g_0, g_1, \dots, g_m \in \mathbb{k}$ существует единственный многочлен g, степени не выше m, такой что $g(a_i) = g_i \ \forall\, i$. Этот многочлен явно задаётся формулой (2-13). Формула (2-13) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

Пример 2.10 (формула Тейлора)
Пусть поле $\mathbb{k}$ имеет характеристику нуль[1]. Рассмотрим на пространстве $\mathbb{k}[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n функционалы

$$\delta_a^{(0)},\ \delta_a^{(1)},\ \dots\ ,\ \delta_a^{(n)}\,,$$

сопоставляющие многочлену f значения его производных в точке $a \in \mathbb{k}$:

$$f(a),\ f'(a),\ \dots\ ,\ f^{(n)}(a)\,.$$

Многочлены $(x-a)^k/k!$ (где $k = 0,\, 1,\, \dots\, ,\, n$) и формы $\delta_a^{(i)}$ удовлетворяют условию упр. 2.12 и, тем самым, являются двойственными друг другу базисами. В частности, произвольный многочлен $g(x) \in \mathbb{k}[x]_{\leqslant n}$ обладает разложением

$$g(x) = g(a)\cdot 1 + g'(a)\cdot(x-a) + g''(a)\cdot(x-a)^2/2 + \cdots + g^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n/n!\,. \quad (2\text{-}14)$$

Это разложение называется *разложением Тэйлора*[2] многочлена g в точке a.

2.5. Задание подпространств линейными уравнениями. Ядро $\ker\xi$ линейной формы $\xi : V \longrightarrow \mathbb{k}$ чаще называют *аннулятором* этой формы и обозначают

$$\operatorname{Ann}\xi = \ker\xi = \{v \in V \mid \xi(v) = 0\}$$

Поскольку образ любой ненулевой формы ξ совпадает со всем полем $\mathbb{k}$, из предл. 2.5 вытекает, что аннулятор ненулевой формы является векторным подпространством коразмерности 1 в V. Такие подпространства называются (векторными) *гиперплоскостями*.

Например, множество многочленов степени не выше n, имеющих заданный корень $a \in \mathbb{k}$, образует n-мерное векторное подпространство в пространстве $\mathbb{k}[x]_{\leqslant n}$ всех многочленов степени не выше n.

Замечание 2.1 Убедиться в том, что $\dim \operatorname{Ann}(\xi) = \dim V - 1$, нетрудно и без предл. 2.5. В самом деле, если $\xi \neq 0$, в V имеется вектор v, такой что $\xi(v) \neq 0$ отлично от нуля. Обозначим через $\mathbb{k}\cdot v \subset V$ одномерное подпространство,

---

[1] это означает, что сумма конечного числа единиц поля $\mathbb{k}$ никогда не равна нулю или, эквивалентно, что наименьшее подполе в $\mathbb{k}$, содержащее 0 и 1, изоморфно полю $\mathbb{Q}$

[2] обратите внимание, что для многочленов разложение Тэйлора является *точным* равенством

порождённое вектором V. Это подпространство очевидно трансверсально к $\mathrm{Ann}\,(\xi)$, и $\mathrm{Ann}\,(\xi) \oplus \Bbbk \cdot v = V$, т. к. любой вектор $w \in V$ представляется в виде

$$w = u + \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v\,, \quad \text{где} \quad u = w - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v \in \mathrm{Ann}\,(\xi)\,.$$

Упражнение 2.13. Проверьте, что $u \in \mathrm{Ann}\,(\xi)$.

2.5.1. Системы линейных однородных уравнений. Для любого множества линейных форм $M \subset V^*$ положим

$$\mathrm{Ann}\,(M) = \{v \in V \mid \xi(v) = 0 \quad \forall\, \xi \in M\ \} \subset V\,.$$

Иначе M можно воспринимать как множество *однородных линейных уравнений*

$$\xi(x) = 0\,, \quad \text{где } \xi \text{ пробегает } M \subset V^*,$$

на неизвестный вектор $x \in V$, и тогда $\mathrm{Ann}\,(M)$ есть множество решений этой системы уравнений.

Будучи пересечением гиперплоскостей, $\mathrm{Ann}\,(M)$ является векторным подпространством в V. Тем самым, множество решений любой (в том числе и бесконечной) системы линейных однородных уравнений — это векторное подпространство в V.

Двойственным образом, для любого множества векторов $N \subset V$ положим

$$\mathrm{Ann}\,(N) = \{\varphi \in V \mid \varphi(v) = 0\ \forall\, v \in N\ \} \subset V^*$$

Иначе говоря, $\mathrm{Ann}\,(N)$ представляет собою множество всех линейных уравнений $\xi(x) = 0$, решение которых содержит множество N, т. е. множество всех проходящих через N гиперплоскостей.

Упражнение 2.14. Убедитесь, что аннулятор любого множества векторов $N \subset V$ является векторным подпространством в V^* и совпадает с аннулятором линейной оболочки множества N.

Предложение 2.7
Для любого подпространства $U \subset V \quad \dim U + \dim \mathrm{Ann}\, U = \dim V$.

Доказательство. Выберем базис $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ и дополним его векторами $w_1, w_2, \dots, w_m$ до базиса в V (таким образом, $\dim V = k + m$). Обозначим через

$$u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*,\ w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in V^*$$

двойственный базис. Тогда $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^* \in \mathrm{Ann}\, U$, поскольку для любого

$$v = \sum x_i u_i \in U$$

имеем: $w_\nu^*(v) = w_\nu^*(\sum x_i u_i) = \sum x_i \cdot w_\nu^*(u_i) = 0$. Если ковектор

$$\varphi = \sum y_i u_i^* + \sum z_j w_j^* \in \operatorname{Ann}(U),$$

то все его координаты $y_i = \varphi(u_i) = 0$. Поэтому $w_1^*, w_2^*, \ldots, w_m^*$ линейно порождают $\operatorname{Ann}(U)$. Так как они линейно независимы, они составляют в $\operatorname{Ann}(U)$ базис. Тем самым, $\dim \operatorname{Ann}(U) = m = \dim V - \dim U$. □

Следствие 2.7
Для любого подпространства $U \subset V$ $\quad \operatorname{Ann}\operatorname{Ann}(U) = U$.

Доказательство. $U \subset \operatorname{Ann}\operatorname{Ann}(U)$ и по предл. 2.7 $\dim \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = \dim U$. □

Следствие 2.8
Для любого подпространства $U \subset V^*$ тоже выполняются равенства

$$\dim U + \dim \operatorname{Ann} U = \dim V \quad \text{и} \quad \operatorname{Ann}\operatorname{Ann}(U) = U.$$

Доказательство. Применим предыдущее предложение и следствие из него, взяв в качестве V двойственное пространство V^*, и воспользуемся каноническим отождествлением V^{**} с V. □

Замечание 2.2 На языке линейных уравнений предыдущие факты означают, что каждое подпространство коразмерности m в V можно задать системой из m линейно независимых линейных уравнений, и наоборот, множество решений всякой системы из m линейно независимых уравнений на пространстве V представляет собою векторное подпространство коразмерности m.

Упражнение 2.15. Покажите, что для любого множества векторов $N \subset V$

$$\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} N = \operatorname{span} N.$$

Теорема 2.1
Соответствие $U \longleftrightarrow \operatorname{Ann}(U)$ устанавливает биекцию между подпространствами двойственных пространств V и V^*. Эта биекция оборачивает включения:

$$U \subset W \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W$$

и переводит суммы подпространств в пересечения, а пересечения — в суммы.

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{S}(V)$ множество всех подпространств векторного пространства V. Равенство $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann}(U) = U$ означает, что два отображения, сопоставление подпространству его аннулятор в двойственном пространстве:

$$\mathscr{S}(V) \underset{\operatorname{Ann} W \leftarrow W}{\overset{U \to \operatorname{Ann} U}{\rightleftarrows}} \mathscr{S}(V^*)$$

обратны друг другу, и следовательно, биективны. Далее, очевидно, что

$$U \subset W \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W\,.$$

Если применить эту импликацию, взяв в качестве подпространств U и W подпространства $\operatorname{Ann} W$ и $\operatorname{Ann} U$ соответственно, и воспользоваться равенствами $U = \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U$ и $W = \operatorname{Ann}\operatorname{Ann} W$, то мы получим обратную импликацию

$$\operatorname{Ann} U \supset \operatorname{Ann} W \quad \Rightarrow \quad U \subset W\,.$$

Далее, равенство

$$\bigcap_\nu \operatorname{Ann}(U_\nu) = \operatorname{Ann}\left(\sum_\nu U_\nu\right) \tag{2-15}$$

вытекает из того, что любая линейная форма, зануляющаяся на каждом из подпространств U_ν, зануляется и на их линейной оболочке, а форма, зануляющаяся на сумме подпространств, зануляется и на каждом из них в отдельности.

Для доказательства равенства

$$\operatorname{Ann}\left(\bigcap_\nu W_\nu\right) = \sum_\nu \operatorname{Ann}(W_\nu)$$

возьмём в (2-15) в качестве подпространств U_ν пространства $\operatorname{Ann} W_\nu$, а затем, в получившемся равенстве, возьмём аннуляторы левой и правой части. $\square$

2.6. Аффинные пространства. Множество A называется *аффинным*[1] *пространством* над заданным векторным пространством V, если с каждому $v \in V$ сопоставлено преобразование *сдвига* (или *параллельный перенос*) $\tau_v : A \longrightarrow A$, так что выполняются следующие три свойства:

$$1)\ \tau_0 = \mathrm{Id}_A\,, \qquad 2)\ \forall\, v, w \in V \quad \tau_u \circ \tau_w = \tau_{u+w} \tag{2-16}$$

$$3)\ \forall\, p, q \in A\ \exists \text{ единственный } v \in V : \tau_v(p) = q \tag{2-17}$$

Размерностью аффинного пространства A называется размерность $\dim V$ векторного пространства V.

Первые два условия (2-16) означают, что параллельные переносы на всевозможные векторы $v \in V$ образуют абелеву группу преобразований пространства A. Отметим, что обратным к преобразованию сдвига τ_v на вектор v является сдвиг τ_{-v} на противоположный вектор $-v$.

Третье условие (2-17) означает, что любую точку q можно получить из любой точки p *единственным* преобразованием сдвига τ_v. Задающий этот сдвиг вектор v обозначается через $\overrightarrow{pq}$. Продуктивно представлять его себе как стрелку с началом в точке $p \in A$ и концом в точке $q \in A$. Из (2-16) вытекает, что

$$\overrightarrow{pp} = 0 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr} \quad \forall\, p, q, r \in A\,.$$

[1] это слово является бесхитростной калькой с английского *affine* (ассоциированный)

Упражнение 2.16. Убедитесь, что $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$ и что $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \iff \overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr}$.

Параллельный перенос τ_v можно воспринимать как операцию «откладывания» фиксированного вектора $v \in V$ от всевозможных точек $p \in A$, и мы часто будем писать $p + v$ вместо $\tau_v(p)$.

Пример 2.11

Множество всех многочленов степени m со старшим коэффициентом 1 представляет собою аффинное пространство над векторным пространством $\Bbbk[x]_{\leqslant(m-1)}$ всех многочленов степени не выше $m-1$.

Упражнение 2.17. Докажите это.

Отметим, что размерность этого аффинного пространства равна m.

2.6.1. Аффинизация и векторизация. Из всякого векторного пространства V можно изготовить аффинное пространство $\mathbb{A}(V)$, точками которого являются «концы радиус векторов» $v \in V$, отложенных от «начальной» точки 0, отвечающей нулевому вектору. Говоря формально, точками пространства $\mathbb{A}(V)$, по определению, являются векторы пространства V, а параллельный перенос $\tau_w : V \longrightarrow V$ переводит v в $v + w$.

Наоборот, если зафиксировать какую-нибудь точку p в произвольном аффинном пространстве A над V, то сопоставление каждой точке $q \in A$ вектора $\overrightarrow{pq} \in V$ устанавливает, согласно (2-17), биекцию между точками из A и векторами из V. Эта биекция называется *векторизацией* аффинного пространства A с *началом* (или с *центром*) в точке $p \in A$.

Набор $p, e_1, e_2, \dots, e_n$, где $p \in A$, а $e_1, e_2, \dots, e_n$ — какой-нибудь базис в V, называется *аффинной системой координат* (или *репером*) в пространстве A. Коэффициенты разложения вектора $\overrightarrow{pq}$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ называются *аффинными координатами* точки q относительно репера $p, e_1, e_2, \dots, e_n$.

2.6.2. Аффинные подпространства. Пусть A является аффинным точечным пространством над векторным пространством V. Для любой точки $p \in A$ и любого векторного подпространства $U \subset V$ множество точек

$$\Pi(p, U) = p + U = \{q = p + u \in A \mid u \text{ пробегает подпространство } U\}$$

называется *аффинным подпространством*. Векторное подпространство U называется в этом случае *направляющим подпространством* аффинного пространства $\Pi(p, U)$, а его размерность $\dim U$ называется *размерностью* аффинного пространства $\Pi(p, U)$.

Пример 2.12 (прямые и плоскости)

Аффинные подпространства $p + U$, где $\dim U = 1, 2$ называются *прямыми* и *плоскостями* соответственно. Таким образом, аффинная прямая представляет собою ГМТ вида

$$p + vt\,,$$

где p — некоторая точка, v — ненулевой вектор, а t пробегает $\mathbb{k}$. Аналогично, аффинная плоскость есть ГМТ вида

$$p + \lambda u + \mu w\,,$$

где p — некоторая точка, u, w — пара непропорциональных векторов, а λ, μ независимо пробегают $\mathbb{k}$.

Предложение 2.8
Следующие условия на аффинные подпространства $\Pi(p, U)$ и $\Pi(q, U)$ с одним и тем же направляющим подпространством $U \subset V$ равносильны друг другу:

$$1)\ \overrightarrow{pq} \in U \qquad 2)\ \Pi(p,U) = \Pi(q,U)$$
$$3)\ \Pi(p,U) \cap \Pi(q,U) \neq \varnothing \qquad 4)\ p \in \Pi(q,U) \qquad 5)\ q \in \Pi(p,U)\,.$$

Доказательство. Покажем, что из (1) следует (2). Если $\overrightarrow{pq} \in U$, то любая точка вида $q + u$ с $u \in U$ может быть записана в виде $p + w$ с $w = \overrightarrow{pq} + u \in U$, и обратно, любая точка вида $p + w$ с $w \in U$ может быть записана в виде $p + u$ с $u = w - \overrightarrow{pq} \in U$. Тем самым, $\Pi(p, U) = \Pi(q, U)$.

Если выполнено (2), то тем более выполнены (3), (4), (5), а выполнение условий (4) или (5) автоматически означает выполнение условия (3). Таким образом, для завершения доказательства достаточно проверить, что из (3) вытекает (1).

Пусть точка $r = p + u' = q + u'' \in \Pi(p,U) \cap \Pi(q,U)$, где $u' = \overrightarrow{pr}$ и $u'' = \overrightarrow{qr}$ лежат в U. Тогда и $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq} = u' - u'' \in U$. □

Предложение 2.9
Следующие условия на $k+1$ точек $p_0, p_1, \ldots, p_k$ любого аффинного пространства A над произвольным векторным пространством V равносильны друг другу:

1) точки $p_0, p_1, \ldots, p_k$ не содержатся ни в каком $(k-1)$-мерном аффинном подпространстве
2) векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ линейно независимы
3) через точки $p_0, p_1, \ldots, p_k$ проходит единственное k-мерное аффинное подпространство

Доказательство. Покажем, что (1) равносильно (2). Линейная зависимость k векторов $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ равносильна тому, что их линейная оболочка имеет размерность не больше $k-1$, что в свою очередь означает, что в V найдётся $(k-1)$-мерное векторное подпространство U, содержащее все векторы $\overrightarrow{p_0p_i}$. По предл. 2.8 последнее означает, что $(k-1)$-мерное аффинное подпространство $p_0 + U$ содержит все точки p_i.

Покажем, что (2) равносильно (3). Линейная независимость k векторов

$$\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$$

означает, что их линейная оболочка k-мерна, и что эти векторы составляют базис в любом содержащем их k-мерном подпространстве $U \subset V$. Стало быть, всякое такое подпространство совпадает с их линейной оболочкой. С другой стороны, по предл. 2.8 прохождение аффинного пространства $p_0 + U$ через все точки p_i означает, что все векторы $\overrightarrow{p_0 p_i}$ содержатся в U. $\square$

Предложение 2.10
Если векторное подпространство $U \subset V$ представляет собою множество решений системы однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает некоторое подмножество $M \subset V^*$, то аффинное подпространство

$$\Pi(p, U) = p + U \subset \mathbb{A}(V)$$

есть множество решений системы неоднородных линейных уравнений вида

$$\xi(x) = \xi(p)\,,$$

где ξ пробегает то же самое подмножество $M \subset V^*$.

Наоборот, всякая система неоднородных линейных уравнений вида

$$\xi(x) = c_\xi$$

на переменную точку $x \in \mathbb{A}(V)$ (где ξ пробегает какое-нибудь подмножество $M \subset V^*$, а $c_\xi \in \Bbbk$ — некоторые константы) либо несовместна, либо множество её решений представляет собою аффинное подпространство вида $p + U$, где $U = \operatorname{Ann} M \subset V$, а p — любое фиксированное решение системы (т. е. такая точка, что $\xi(p) = c_\xi$ для всех $\xi \in M$).

Доказательство. В силу линейности функций $\xi : V \longrightarrow \Bbbk$ уравнения

$$\xi(q) = \xi(p) \quad \text{и} \quad \xi(\overrightarrow{pq}) = 0$$

равносильны друг другу. $\square$

2.6.3. Барицентрические координаты. Рассмотрим в n-мерном аффинном пространстве A_n, ассоциированном с векторным пространством V, произвольный набор из $n+1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_n$, не лежащих ни в какой гиперплоскости. Поместим пространство A_n в качестве аффинной гиперплоскости в $(n+1)$-мерное аффинное пространство A_{n+1} и зафиксируем в A_{n+1} координатный репер с началом в какой-нибудь точке $q \notin A_n$ и базисными векторами

$$e_0 = \overrightarrow{qp}_0\,, \quad e_1 = \overrightarrow{qp}_1\,, \quad e_2 = \overrightarrow{qp}_2\,, \quad \dots\,, \quad e_n = \overrightarrow{qp}_n\,.$$

В координатах $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ относительно этого репера исходное подпространство A_n задаётся линейным уравнением

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\,,$$

и радиус вектор каждой точки $a \in A_n$ однозначно представляется в виде

$$\overrightarrow{qa} = x_0\overrightarrow{qp}_0 + x_1\overrightarrow{qp}_1 + \cdots + x_n\overrightarrow{qp}_n\,. \tag{2-18}$$

Таким образом, каждая точка $a \in A_n$ единственным образом представляется в виде барицентрической комбинации

$$a = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n \tag{2-19}$$

точек $p_0, p_1, \dots, p_n$ с весами $x_0, x_1, \dots, x_n$ с суммой $\sum x_i = 1$.

В n° 1.4.1 мы видели, что представления (2-18) и (2-19) не зависят от выбора начальной точки q. Коэффициенты $x_0, x_1, \dots, x_n$ представления (2-19) называются *барицентрическими координатами* точки $a \in A_n$ относительно *симплекса*

$$p_0, p_1, \dots, p_n\,.$$

Ниже, в прим. 3.4, мы получим выражения барицентрических координат точки a через объёмы ориентированных параллелепипедов, натянутых на всевозможные n-ки векторов из набора

$$a_0 = \overrightarrow{ap}_0\,, \quad a_1 = \overrightarrow{ap}_1\,, \quad a_2 = \overrightarrow{ap}_2\,, \quad \dots\,, \quad a_n = \overrightarrow{ap}_n\,,$$

обобщающие формулы из n° 1.4.3. А именно, мы покажем, что

$$x_i = \frac{\omega\,(\overrightarrow{ap}_0,\,\dots\,,\,\overrightarrow{ap}_{i-1},\,\overrightarrow{ap}_{i+1},\,\dots\,,\,\overrightarrow{ap}_n)}{\omega\,(\overrightarrow{p_ip}_0,\,\dots\,,\,\overrightarrow{p_ip}_{i-1},\,\overrightarrow{p_ip}_{i+1},\,\dots\,,\,\overrightarrow{p_ip}_n)}\,,$$

где $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n)$ означает объём ориентированного n-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$.