§1. Координатная плоскость

1.1. Векторные пространства. Фиксируем произвольное поле $\Bbbk$, элементы которого будут далее называться *числами*. Будем называть *векторным пространством* над полем $\Bbbk$ всякое множество V (его элементы будут далее называться *векторами*[1]) с двумя операциями — *сложением векторов*, сопоставляющим любой паре векторов $v_1, v_2 \in V$ их сумму $v_1 + v_2 \in V$, и *умножением векторов на числа*, сопоставляющим любому вектору $v \in V$ и любому числу $\lambda \in \Bbbk$ вектор $\lambda \cdot v \in V$, так что выполняются следующие аксиомы:

1) свойства сложения векторов:

   а) $a + b = b + a \;\forall\, a, b \in V$ (см. рис. 1◇1),

   б) $a + (b + c) = (a + b) + c \;\forall\, a, b, c \in V$ (см. рис. 1◇2),

   в) $\exists$ *нулевой вектор* $0 \in V$, такой что $a + 0 = a \;\forall\, a \in V$,

   г) $\forall\, a \in V \;\exists$ *противоположный вектор* $-a \in V$, такой что $a+(-a) = 0$;

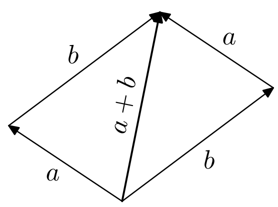

Рис. 1◇1. Правило параллелограмма.

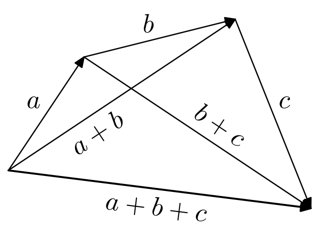

Рис. 1◇2. Правило 4-угольника.

2) свойства умножения векторов на числа:

   а) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a \;\forall$ вектора $a \in V$ и $\forall$ чисел $\lambda, \mu \in \Bbbk$,

   б) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \;\forall$ вектора $a \in V$ и $\forall$ чисел $\lambda, \mu \in \Bbbk$,

   в) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \;\forall$ векторов $a, b \in V$ и $\forall$ числа $\lambda \in \Bbbk$,

   г) $1 \cdot a = a \;\forall$ вектора $a \in V$.

Подмножество U векторного пространства V называется *векторным подпространством*, если для любых двух векторов $u, w \in U$ в U все линейные комбинации $\lambda u + \mu w$ (с произвольными $\lambda, \mu \in \Bbbk$) тоже лежат в U.

Пример 1.1.
Простейший пример векторного пространства — это *нулевое пространство* 0, состоящее из единственного нулевого вектора 0, обратного самому себе и такого, что $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall\, \lambda \in \Bbbk$.

[1] векторы продуктивно представлять себе как направленные отрезки, рассматриваемые с точностью до параллельного переноса и обозначающие сдвиг

Пример 1.2.
Само поле $\mathbb{k}$, в котором сложение векторов и умножение векторов на числа суть сложение и умножение, которые имеются в поле $\mathbb{k}$, является векторным пространством над $\mathbb{k}$. Написанные выше аксиомы являются частью аксиом, которым удовлетворяют сложение и умножение в поле (эти аксиомы будут подробно обсуждаться в курсе алгебры).

Пример 1.3.
Первый содержательный пример векторного пространства, отличный от нуля и основного поля — это *координатная плоскость* $\mathbb{k}^2$. Векторами пространства $\mathbb{k}^2$ по определению являются столбцы чисел $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{k}$. Сложение векторов и умножение векторов на числа определяются покоординатно: если $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, то

$$\lambda \cdot a + \mu \cdot b \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \end{pmatrix} \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{k}\,.$$

Координатная плоскость $\mathbb{k}^2$ будет для нас в этом параграфе основным объектом изучения.

Лемма 1.1
В каждом векторном пространстве V нулевой вектор $0 \in V$ единственен. Для любого $a \in V$ вектор $-a$, противоположный к вектору a, однозначно определяется по a. Кроме того,

$$0 \cdot a = 0 \qquad \text{и} \qquad (-1) \cdot a = -a$$

(в левых частях этих равенств 0 и -1 суть числа из $\mathbb{k}$, а в правых частях стоят векторы — нулевой и противоположный к a).

Доказательство. Для любых двух нулевых векторов $0_1, 0_2 \in V$ аксиоме 1(в) выполняется равенство

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2\,.$$

Если векторы b и c оба противоположны к a, то $b = b + 0 = b + (a + c) = (b+a)+c = 0+c = c$. Равенство $0 \cdot a = 0$ получается после прибавления вектора $-a$, противоположного к a, к левой и правой частям равенства

$$a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a = a\,.$$

Т. к. $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$, вектор $(-1) \cdot a$ противоположен к a. □

Определение 1.1
Отображение $F : V \longrightarrow W$ из векторного пространства U в векторное пространство V называется *линейным*, если оно перестановочно со сложением векторов и умножением векторов на числа, т. е.

$$F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b) \quad \forall\, a, b \in V \text{ и } \forall\, \alpha, \beta \in \Bbbk\,.$$

Векторные пространства, между которыми имеется взаимно однозначное линейное отображение, называются *изоморфными*, а само это отображение называется *изоморфизмом* векторных пространств.

Предостережение 1.1. Обратите внимание, что отображение $\varphi : \Bbbk \longrightarrow \Bbbk$

$$\varphi(x) = a \cdot x + b$$

которое в школе принято называть «линейной функцией», в смысле опр. 1.1 линейно *только* при $b = 0$. Если же $b \neq 0$, то

$$\varphi(\lambda x) \neq \lambda\varphi(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x + y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)\,,$$

и φ *не* является линейным отображением.

Упражнение 1.1. Покажите, что любое линейное отображение F переводит нулевой вектор в нулевой вектор, а противоположный — в противоположный:

$$F(0) = 0 \quad \text{и} \quad \forall\, v \quad F(-v) = -F(v)\,.$$

1.2. Пропорциональность векторов и определитель. Векторы a и b произвольного векторного пространства V называются *пропорциональными* (или *линейно зависимыми*), если $x \cdot a = y \cdot b$ для некоторых чисел $x, y \in \Bbbk$, не равных одновременно нулю.

Таким образом, нулевой вектор пропорционален любому вектору, а пропорциональность ненулевых векторов a и b означает, что $a = \lambda b$ и $b = \lambda^{-1}a$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \Bbbk$.

В координатном пространстве $\Bbbk^2$ из прим. 1.3. пропорциональность векторов

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

равносильна равенству перекрёстных произведений: $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Величина

$$\det(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1$$

называется *определителем* векторов a и b из $\Bbbk^2$. Она, очевидно, обладает следующими свойствами:

$$\det(a,b)=0 \Longleftrightarrow a \text{ и } b \text{ пропорциональны} \tag{1-1}$$

$$\det(a,b)=-\det(b,a) \qquad \forall\, a,b\in\Bbbk^2 \tag{1-2}$$

$$\det(\lambda a,b)=\lambda\det(a,b)=\det(a,\lambda b) \qquad \forall\, a,b\in\Bbbk^2 \text{ и } \forall\,\lambda\in\Bbbk \tag{1-3}$$

$$\left.\begin{aligned}\det(a_1+a_2,b)&=\det(a_1,b)+\det(a_2,b)\\ \det(a,b_1+b_2)&=\det(a,b_1)+\det(a,b_2)\end{aligned}\right. \qquad \forall\, a,a_1,a_2,b,b_1,b_2\in\Bbbk^2 \tag{1-4}$$

Свойство (1-2) называется *кососимметричностью*, свойство (1-3) — *однородностью*, свойство (1-4) — *аддитивностью*. Вместе однородность и аддитивность означают, что определитель *линеен* по каждому из двух своих аргументов. Из этого вытекает, что определитель ведёт себя по отношению к двум своим аргументам так же, как произведение: для любых векторов $a_1,a_2,b_1,b_2\in\Bbbk^2$ и чисел $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\Bbbk$ выполняется обычное правило раскрытия скобок[1]

$$\begin{aligned}&\det\left(\,\alpha_1a_1+\alpha_2a_2\,,\;\beta_1b_1+\beta_2b_2\,\right)=\\ &\qquad=\alpha_1\beta_1\det(a_1,b_1)+\alpha_1\beta_2\det(a_1,b_2)+\alpha_2\beta_1\det(a_2,b_1)+\alpha_2\beta_2\det(a_2,b_2)\,.\end{aligned} \tag{1-5}$$

Лемма 1.2

Всякая пара непропорциональных векторов $a,b\in\Bbbk^2$ обладают тем свойством, что любой вектор $v\in\Bbbk^2$ единственным образом представляется в виде

$$v=x\cdot a+y\cdot b \quad \text{с} \quad x,\,y\in\Bbbk\,. \tag{1-6}$$

Коэффициенты x, y этого разложения вычисляются по *правилу Крамера*

$$\begin{aligned}x&=\det(v,b)/\det(a,b)\\ y&=\det(a,v)/\det(a,b)\,,\end{aligned} \tag{1-7}$$

Доказательство. Поскольку $\det(a,a)=\det(b,b)=0$, из наличия разложения (1-6) вытекает, что

$$\det(a,v)=\det(a,x\cdot a+y\cdot b)=x\cdot\det(a,a)+y\cdot\det(a,b)=y\cdot\det(a,b)$$
$$\det(v,b)=\det(x\cdot a+y\cdot b,b)=x\cdot\det(a,b)+y\cdot\det(b,b)=x\cdot\det(a,b)$$

откуда коэффициенты x и y однозначно выражаются в виде (1-7). Чтобы убедиться, в том, что равенство

$$v=\frac{\det(v,b)}{\det(a,b)}\cdot a+\frac{\det(a,v)}{\det(a,b)}\cdot b$$

[1] в алгебре это свойство называется *дистрибутивностью*, а в школе — распределительным законом умножения

действительно выполнено для любого вектора v, заметим, что разность

$$v - \frac{\det(v,b)}{\det(a,b)} \cdot a$$

пропорциональна вектору b, поскольку

$$\det\left(v - \frac{\det(v,b)}{\det(a,b)} \cdot a\,,\ b \right) = \det(v,b) - \frac{\det(v,b)}{\det(a,b)} \cdot \det(a,b) = 0\,.$$

Но тогда

$$v = \frac{\det(v,b)}{\det(a,b)} \cdot a + \lambda \cdot b$$

для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, и по правилу Крамера $\lambda = \det(a,v)/\det(a,b)$. □

1.2.1. Базисы и координаты. Всякая пара ненулевых непропорциональных векторов (u_1, u_2) называется *базисом* векторного пространства $\Bbbk^2$, и коэффициенты x_1, x_2 из линейного выражения $v = u_1 \cdot x_1 + u_2 \cdot x_2$ произвольного вектора $v \in \Bbbk^2$ через векторы u_1, u_2 называются *координатами* вектора v в базисе (u_1, u_2). Базис (e_1, e_2), состоящий из векторов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

называется *стандартным* базисом координатной плоскости $\Bbbk^2$. Координаты вектора $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ в стандартном базисе — это числа v_1 и v_2.

Упражнение 1.2. Пусть вектор v имеет в базисе (u_1, u_2) координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, а векторы (u_1, u_2), в свою очередь, имеют координаты $u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}$ и $u_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}$ в некотором другом базисе (w_1, w_2). Найдите координаты вектора v в базисе (w_1, w_2).

1.3. Площадь ориентированного параллелограмма. Всякая функция

$$s : \Bbbk^2 \times \Bbbk^2 \longrightarrow \Bbbk\,,$$

сопоставляющая каждой упорядоченной паре векторов a, b на координатной плоскости $\Bbbk^2$ (над произвольным полем $\Bbbk$) число $s(a,b) \in \Bbbk$, называется *площадью ориентированного параллелограмма* со сторонами a и b, если для любых векторов a, b и любых чисел λ, μ выполняются следующие два свойства:

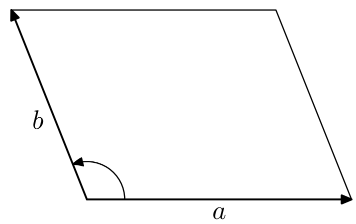

Рис. 1◇3. Ориентированный параллелограмм.

$$s(a, b + \lambda a) = s(a,b) = s(a + \mu b, b) \tag{1-8}$$

$$s(\lambda a, b) = \lambda s(a,b) = s(a, \lambda b)\,. \tag{1-9}$$

Первое свойство (1-8) означает, что площадь параллелограмма не меняется при его «заваливании на бок» параллельно одной из сторон: треугольник, который отрезается при этом от одного бока, параллельно сдвигается и приклеивается с другого (см. рис. 1◇4).

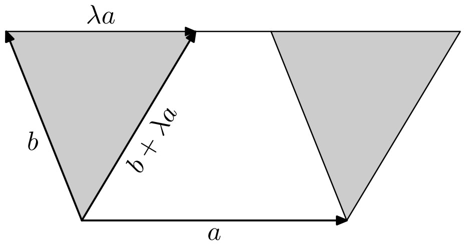

Рис. 1◇4. Площадь не меняется.

Второе свойство (1-9) утверждает, что при изменении одной из сторон параллелограмма в λ раз площадь также изменяется в λ раз. Это означает, в частности, что площадь *меняет знак* при смене знака одного из векторов:

$$s(-a, b) = -s(a, b) = s(a, -b)\,.$$

В школьном курсе геометрии (где $\Bbbk = \mathbb{R}$) обычно принято считать, что площадь положительна и удовлетворяет более изысканному, чем (1-9), равенству

$$s(\lambda a, b) = s(a, \lambda b) = |\lambda| \cdot s(a, b)\,.$$

Отказавшись от положительности, мы не просто упразднили модуль[1], но определили функцию, которая кроме абсолютной величины площади учитывает *ориентацию* параллелограмма.

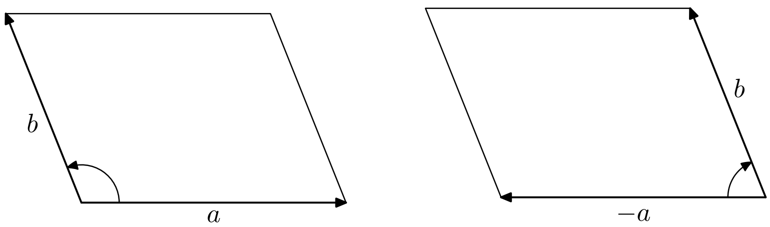

Рис. 1◇5. Смена ориентации при смене знака.

Дело в том, что на вещественной координатной плоскости $\Bbbk = \mathbb{R}$ упорядоченные пары векторов (a, b) геометрически отличаются друг от друга тем, в какую сторону происходит кратчайший поворот, совмещающий направление первого вектора с направлением второго. Те пары векторов, для которых такой поворот происходит против часовой стрелки, называются *положительно* ориентированными, а те, для которых по часовой стрелке — отрицательно ориентированными.

Равенство $s(-a, b) = -s(a, b)$ таким образом означает, что площадь меняет знак при смене ориентации параллелограмма на противоположную (см. рис. 1◇5).

[1]что упрощает вычисления и делает их осмысленными над любым полем

Лемма 1.3
Всякая функция площади s на координатной плоскости $\Bbbk^2$ (над произвольным полем $\Bbbk$) автоматически кососимметрична, обращается в нуль на пропорциональных векторах и аддитивна:

$$s(a, b+c) = s(a,b) + s(a,c) \qquad \forall\ a,b,c \in \Bbbk^2\,. \tag{1-10}$$

Доказательство. Первые два утверждения вытекают прямо из (1-8) и (1-9):

$$s(a,b) = s(a,a+b) = s(a-(a+b), a+b) = s(-b,a+b) = -s(b,a+b) = -s(a,b)$$
$$s(a,\lambda a) = s(a, 0+\lambda a) = s(a,0) = s(a, 0\cdot 0) = 0\cdot s(a,0) = 0$$

Для доказательства аддитивности заметим, что если вектор a пропорционален и вектору b и вектору c, то он пропорционален и вектору $b+c$, и значит все три площади в равенстве (1-10) в этом случае зануляются. Если же вектор a не пропорционален какому-нибудь из векторов b, c, скажем, b, то векторы a и b составляют базис, и $c = \alpha a + \beta b$ для некоторых $\alpha, \beta \in \Bbbk$. В этом случае обе части равенства переписываются как

$$\begin{aligned} s(a,b+c) &= s(a, b+\alpha a+\beta b) = s(a,(1+\beta)b) = (1+\beta)s(a,b) \\ s(a,b)+s(a,c) &= s(a,b) + s(a,\alpha a+\beta b) = s(a,b)+s(a,\beta b) = \\ &= s(a,b) + \beta s(a,b) = (1+\beta)s(a,b)\,, \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 1.1
Площадь на $\Bbbk^2$ существует и единственна с точностью до умножения на константу. Она имеет вид $s(a,b) = c\cdot\det(a,b)$, где константа $c = s(e_1,e_2)\in\Bbbk$ — это площадь стандартного базисного параллелограмма.

Доказательство. Из аддитивности, однородности и кососимметричности величины $s(a,b)$ вытекает, что она подчиняется тому же самому дистрибутивному закону (1-5), что и определитель: $\forall\ a_1,a_2,b_1,b_2\in\Bbbk^2$ и $\forall\ \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\Bbbk$

$$\begin{aligned} &s\,(\,\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2\,,\ \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2\,) = \\ &\qquad = \alpha_1\beta_1\cdot s(a_1,b_1) + \alpha_1\beta_2\cdot s(a_1,b_2) + \alpha_2\beta_1\cdot s(a_2,b_1) + \alpha_2\beta_2\cdot s(a_2,b_2) \end{aligned}$$

Поэтому для любой пары векторов $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ и $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$

$$\begin{aligned} s(a,b) &= s(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2, \beta_1 e_1+\beta_2 e_2) = \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)s(e_1,e_2) = \det(a,b)\cdot s(e_1,e_2)\,. \end{aligned} \tag{1-11}$$

С другой стороны, из свойств определителя (1-1)–(1-4) вытекает, что

$$s(a,b) = c\cdot\det(a,b)$$

удовлетворяет соотношениям (1-8) и (1-9). $\square$

Следствие 1.1

Координатами вектора $v = ax + by$ в произвольном базисе (a, b) плоскости $\Bbbk^2$ являются отношения площадей[1] $x = s(v, b)/s(a, b)$, $y = s(a, v)/s(a, b)$.

1.4. Аффинная координатная плоскость $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\Bbbk)$ это пространство, точками которого являются пары чисел $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$. Их можно представлять себе как концы всевозможных векторов $v = \overrightarrow{OP} \in \Bbbk^2$, отложенных от «начала координат» — точки $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Однако, точка O ничем не лучше любой другой — для каждой точки $P \in \mathbb{A}^2$ отображение «откладывания векторов» от точки P

$$\Bbbk^2 \xrightarrow{v \mapsto P+v} \mathbb{A}^2$$

устанавливает биекцию между векторами координатной плоскости $\Bbbk^2$ и точками аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$. Иначе можно сказать, что с каждой парой точек $P, Q \in \mathbb{A}^2$ связан вектор $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, и при фиксированной точке P отображение

$$\mathbb{A}^2 \xrightarrow{Q \mapsto \overrightarrow{PQ}} \Bbbk^2 \,,$$

устанавливает биекцию между точками аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ и векторами координатной плоскости $\Bbbk^2$.

Лемма 1.4

Для любых точек $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m \in \mathbb{A}^2$ и чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \in \Bbbk$ с ненулевой суммой $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i = \mu \neq 0$ существует единственная точка $M \in \mathbb{A}^2$, такая что

$$\mu_1 \overrightarrow{MQ}_1 + \mu_2 \overrightarrow{MQ}_2 + \cdots + \mu_m \overrightarrow{MQ}_m = 0 \,. \qquad (1\text{-}12)$$

Для произвольным образом выбранной точки $P \in \mathbb{A}^2$ точку M можно описать как

$$M = P + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu} \cdot \overrightarrow{PQ}_i \,. \qquad (1\text{-}13)$$

Доказательство. Для любой пары точек $M, P \in \mathbb{A}^2$ выполнено соотношение

$$\sum \mu_i \cdot \overrightarrow{PQ}_i = \sum \mu_i \cdot \left(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ}_i \right) = \mu \cdot \overrightarrow{PM} + \sum \mu_i \cdot \overrightarrow{MQ}_i \,.$$

Поэтому равенство (1-12) равносильно равенству (1-13). □

[1] обратите внимание, что эти отношения не зависят от выбора функции площади

1.4.1. Барицентрические комбинации точек. Точка M из лем. 1.4 называется *центром тяжести* или *барицентром* точек Q_i с весами μ_i . Этот термин пришёл из механики.

Пусть плоскость $\mathbb{R}^2$ горизонтально располагается в трёхмерном пространстве, и к каждой из точек Q_i в перпендикулярном к плоскости направлении приложена сила μ_i — вниз, если $\mu > 0$, и вверх, если $\mu < 0$ (см. рис. 1◇6).

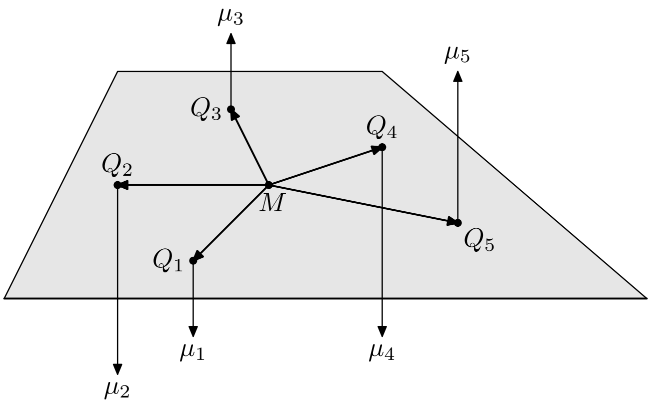

Рис. 1◇6. Моменты сил.

Равенство (1-12) означает в этом случае равенство нулю суммы моментов всех этих сил относительно точки M. Если оно выполняется, плоскость останется неподвижной, будучи удержана ровно за одну точку M.

Из леммы лем. 1.4 вытекает, что для любых наборов точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ и констант $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ с суммой $\sum \mu_i = 1$, точка

$$\mu_1 Q_1 + \mu_2 Q_2 + \cdots + \mu_m Q_m \overset{\text{def}}{=} P + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot \overrightarrow{PQ_i} \tag{1-14}$$

не зависит от выбора «начальной» точки P. Она называется *барицентрической комбинацией* точек $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ с весами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

Упражнение 1.3 (группирование масс). Пусть набор точек Q_i с весами μ_i и набор точек T_j с весами ν_j имеют центры тяжести в точках M и N, причём все три суммы: $\sum \mu_i$, $\sum \nu_j$ и $\sum \mu_i + \sum \nu_j$ ненулевые. Покажите, что центр тяжести объединения всех точек[1] Q_i и T_j совпадает с центром тяжести точек M и N, взятых с весами $\sum \mu_i$ и $\sum \nu_j$.

Из этой задачи вытекает, среди прочего, что барицентрическая комбинация точек, которые сами являются барицентрическими комбинациями некоторых других точек, также представляет собою барицентрическую комбинацию этих последних точек.

1.4.2. Коллинеарные точки и прямые. Три точки A, B, C на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ называются *коллинеарными*, если векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ пропорциональны. Условие пропорциональности векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ можно переписать в виде $\alpha \cdot \overrightarrow{CA} + \beta \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. При $A \neq B$ в этом равенстве $\alpha + \beta \neq 0$, и оно означает, что C является барицентром точек A и B, взятых с весами α и β:

$$C = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} A + \frac{\beta}{\alpha + \beta} B \,.$$

[1] «объединение» совпадающих точек заключается в сложении их весов

В этом случае говорят также, что C *делит* AB в отношении $\beta : \alpha$. Точка, делящая AB в отношении $1 : 1$ называется *серединой* AB.

Множество всех точек C, коллинеарных двум данным различным точкам A, B называется *прямой* и обозначается (A, B).

Таким образом, прямая (A, B) состоит из всех точек вида

$$C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B\,, \quad \text{где } \alpha, \beta \in \Bbbk \text{ и } \alpha + \beta = 1\,.$$

Иначе можно сказать, что прямая (A, B) состоит из всех точек вида

$$C = A + vt\,, \tag{1-15}$$

где t пробегает $\Bbbk$, а $v \in \Bbbk^2$ — какой-нибудь фиксированный ненулевой вектор, пропорциональный вектору $\overrightarrow{AB}$. Он называется *направляющим вектором* или *вектором скорости* прямой (A, B).

Соотношение (1-15) равносильно пропорциональности векторов $\overrightarrow{AC}$ и v, что записывается уравнением $\det(v, \overrightarrow{AC}) = 0$. Если обозначить радиус векторы фиксированной точки A и переменной точки C через $a = \overrightarrow{OA}$ и $x = \overrightarrow{OC}$, то уравнение $\det(v, \overrightarrow{AC}) = 0$ можно переписать как

$$\det(v, x) = \det(v, a)\,. \tag{1-16}$$

Отметим, что любое уравнение первой степени на координаты x_1 и x_2 вектора $x \in \Bbbk^2$:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = c \tag{1-17}$$

есть уравнение вида (1-16), в котором $v = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$, а $c = \det(v, a)$.

Таким образом, любое уравнение (1-17), в котором коэффициенты (α_1, α_2) не обращаются одновременно в нуль, задаёт прямую, заметаемую концами векторов $x = a + vt$, где a — какое-нибудь одно решение уравнения (1-17), а t пробегает $\Bbbk$. Эта прямая может быть описана как геометрическое место концов векторов x, составляющих с заданным вектором $v = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$ параллелограмм заданной площади c (см. рис. 1◇7).

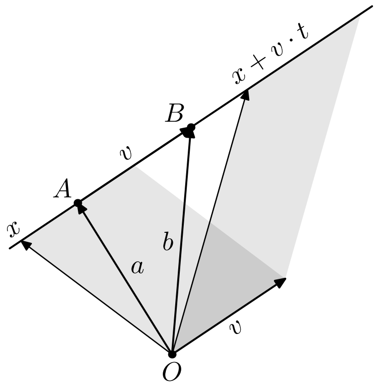

Рис. 1◇7. Прямая (A, B) с направляющим вектором $v = b - a$.

Упражнение 1.4. Напишите уравнение прямой, проходящей

а) через точку $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ параллельно вектору $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

б) через точки $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.5. Нарисуйте на клетчатой бумаге прямые, заданные уравнениями а) $3x_1 + 5x_2 = -1$ б) $2x_1 - 3x_2 = 5$.

Согласно правилу Крамера[1], пересечение прямых, заданных уравнениями

$$\det(u, x) = c \quad \text{и} \quad \det(w, x) = d$$

с непропорциональными направляющими векторами u и w, состоит ровно из одной точки

$$x = \frac{cw - du}{\det(u, w)}.$$

Если направляющие векторы пропорциональны: скажем, $w = \lambda u$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, то $\det(w, x) = \lambda \det(u, x)$, и при $d \neq \lambda c$ прямые будут параллельны, а при $d = \lambda c$ совпадут. Таким образом, мы доказали обе теоремы из упр. 0.1, причём над произвольным полем $\Bbbk$.

Упражнение 1.6. Пусть $\Bbbk = \mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Сколько имеется в пространстве $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_q)$ точек, прямых и прямых, проходящих через фиксированную точку? Нарисуйте все прямые, проходящие через начало координат в $\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_5)$, где $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5)$ — поле вычетов по модулю 5.

1.4.3. Треугольники. Тройка не коллинеарных точек A, B, C называется *трёхвершинником* (или *треугольником*).

Для произвольной точки $P \in \mathbb{A}^2$ обозначим через

$$a = \overrightarrow{PA}\,,\ b = \overrightarrow{PB}\,,\ c = \overrightarrow{PC} \qquad (1\text{-}18)$$

концы векторов, ведущих из P в вершины треугольника ABC (см. рис. 1◇8).

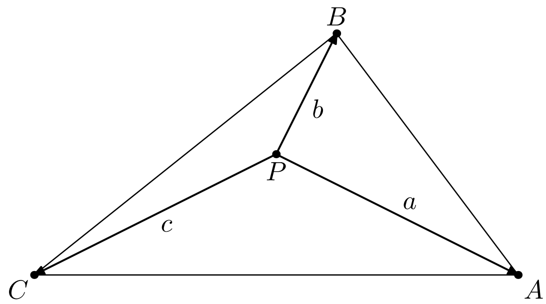

Рис. 1◇8. $s(a,b)\,c + s(b,c)\,a + s(c,a)\,b = 0$.

Если A, B, P не коллинеарны, векторы a и b составят базис в $\Bbbk^2$, и разложение вектора c по этому базису по следствию сл. 1.1 имеет вид

$$c = \frac{s(c,b)}{s(a,b)}\,a + \frac{s(a,c)}{s(a,b)}\,b\,.$$

Домножая на знаменатель, получаем равенство, справедливое уже для любой точки, включая точки $P \in (A, B)$:

$$s(a,b) \cdot c + s(b,c) \cdot a + s(c,a) \cdot b = 0\,. \qquad (1\text{-}19)$$

Таким образом, произвольная точка $P \in \mathbb{A}^2$ является центром тяжести точек A, B, C взятых с весами $s(PBC)$, $s(PCA)$, $s(PAB)$, где $s(XYZ)$ обозначает *площадь ориентированного треугольника* $\triangle\ XYZ$, по определению, равную половине площади ориентированного параллелограмма:

$$s(XYZ) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \cdot s(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ})$$

[1] см. лем. 1.2 на стр. 10

Упражнение 1.7. Убедитесь, что

$$s(XYZ) = s(YZX) = s(ZXY) = -s(YXZ) = -s(XZY) = -s(ZYX)\,.$$

Поскольку $s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = s(b-a, c-a) = s(a,b) + s(b,c) + s(c,a)$, мы имеем равенства

$$s(ABC) = s(PBC) + s(PCA) + s(PAB)\,. \tag{1-20}$$

$$P = \frac{s(PBC)}{s(ABC)}\,A + \frac{s(PCA)}{s(ABC)}\,B + \frac{s(PAB)}{s(ABC)}\,C\,. \tag{1-21}$$

Коэффициенты разложения (1-21) называются *барицентрическими координатами* точки P относительно трёхвершинника ABC.

Теорема 1.2
Для любых трёх неколлинеарных точек A, B, C сопоставление каждой тройке чисел (α, β, γ) с суммой $\alpha+\beta+\gamma = 1$ барицентра точек A, B, C с весами α, β, γ :

$$(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между такими тройками чисел и точками аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$.

Доказательство. Мы уже видели выше, что всякая точка P является барицентром точек A, B, C с подходящими весами, и нам остаётся лишь проверить единственность такого представления. Поскольку точки A, B, C не коллинеарны, хотя бы два из векторов a, b, c в (1-18) не пропорциональны. Будем считать, что это a и b. Тогда вектор c *однозначно* представляется в виде $c = x \cdot a + y \cdot b$. Равенство $P = \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C$, по определению, означает равенство $\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = 0$. Подставляя в него разложение c, получаем $(\alpha + \gamma x) \cdot a + (\beta + \gamma y) \cdot b = 0$. Так как a и b не пропорциональны, оба коэффициента обращаются в нуль, и мы получаем систему уравнений $\alpha + \gamma x = 0$, $\beta + \gamma y = 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, из которой α, β, γ однозначно находятся. □

Пример 1.4. (центр тяжести треугольника)
Равновесный барицентр

$$M = \frac{1}{3}\,(A + B + C)$$

трёх неколлинеарных точек $A, B, C \in \mathbb{A}^2$ называется *центром тяжести* треугольника ABC. По упр. 1.3, точка M является центром тяжести вершины и середины противолежащей ей стороны, взятой с весом 2 (см. рис. 1◇9).

Таким образом, M является точкой пересечения медиан и делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

Из формулы (1-21) и теор. 1.2 вытекает, что центр тяжести треугольника можно также охарактеризовать как единственную точку M на плоскости, для которой $s(MAB) = s(MBC) = s(MCA)$.

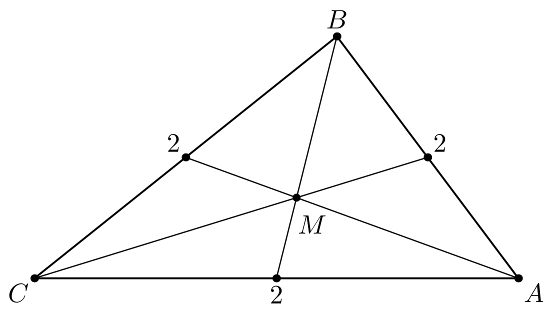

Рис. 1◇9. Центр треугольника.

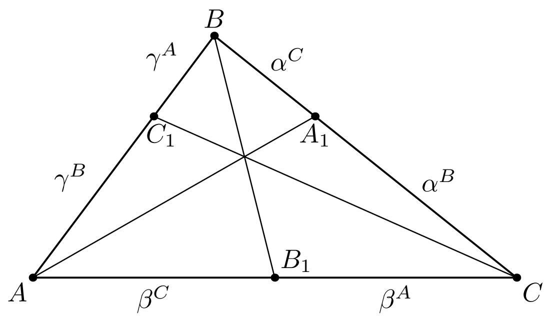

Рис. 1◇10. К теореме Чевы.

Упражнение 1.8 (Теорема Чевы). Пусть на прямых BC, AC и AB, соединяющих три неколлинеарных точки A, B, C, отмечены точки $A_1 = \alpha^B B + \alpha^C C$, $B_1 = \beta^A A + \beta^C C$, $C_1 = \gamma^A A + \gamma^B B$. Покажите, что в точки A, B, C тогда и только тогда можно поместить веса α, β, γ так, чтобы центр тяжести точек A и B оказался в точке C_1, центр тяжести точек B и C — в точке A_1, а центр тяжести точек C и A — в точке B_1, когда

$$\frac{\alpha^B}{\alpha^C} \cdot \frac{\beta^C}{\beta^A} \cdot \frac{\gamma^A}{\gamma^B} = 1\,.$$

Выведите из этого необходимое и достаточное условие прохождения трёх прямых (AA_1), (BB_1), (CC_1) через одну точку (см. рис. 1◇10).

1.5. Евклидова координатная плоскость. Этот раздел будет посвящён метрической геометрии, т. е. вычислению расстояний и углов. Величины эти являются *действительными числами* и многие вопросы про них связаны со специфическими для поля $\mathbb{R}$ понятиями *неравенства* и *близости*. Поэтому всюду дальше мы будем работать над полем вещественных чисел $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Определение 1.2

Скалярным произведением (или *евклидовой структурой*) на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ называется функция $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющая каждой паре векторов $u, w \in V$ число $(v, w) \in \mathbb{R}$ так, что для любых векторов u, w из V и чисел λ, μ из $\mathbb{R}$ выполняются свойства[1]:

$$(u, w) = (w, u) \tag{1-22}$$

$$\begin{aligned}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2) &= \\ = \lambda_1\mu_1(u_1, w_1) + \lambda_1\mu_2(u_1, w_2) &+ \lambda_2\mu_1(u_2, w_1) + \lambda_2\mu_2(u_2, w_2)\end{aligned} \tag{1-23}$$

$$(v, v) > 0 \quad \forall \text{ ненулевого } v \in V \tag{1-24}$$

Векторы u, w, для которых $(u, v) = 0$ называются *ортогональными* или *перпендикулярными*.

[1] свойство (1-22) называют *симметричностью*, свойство (1-23) — *билинейностью*, а свойство (1-24) — *положительностью*

Пример 1.5. (стандартная евклидова структура на $\mathbb{R}^2$)
Для двух векторов

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

положим

$$(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 \in \mathbb{R}. \tag{1-25}$$

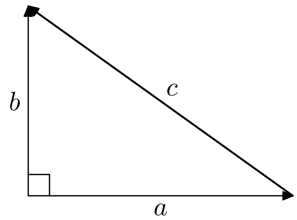

Рис. 1⋄11. Теорема Пифагора.

Упражнение 1.9. Убедитесь, что это сопоставление обладает свойствами (1-22)–(1-24).

Скалярное произведение (1-25) называется *стандартной евклидовой структурой* на $\mathbb{R}^2$.

1.5.1. Длина. Для любого вектора v в произвольном евклидовом пространстве V неотрицательное число

$$|v| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(v, v)}$$

называется *длиной* вектора v. Если векторы a и b перпендикулярны, квадрат длины вектора $c = b - a$, соединяющего их концы (см. рис. 1⋄11), находится по *теореме Пифагора*:

$$|c|^2 = (c, c) = (b - a, b - a) = (a, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2.$$

Предложение 1.1
В любом евклидовом пространстве для любого вектора b и любого ненулевого вектора a существует единственный вектор a_b, пропорциональный a, такой что разность $b - a_b$ перпендикулярна a (см. рис. 1⋄12). Это единственный пропорциональный a вектор, для которого[1]

$$|b - a_b| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} |b - \lambda a|.$$

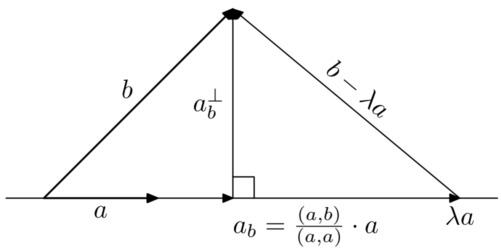

Рис. 1⋄12. Ортогональная проекция.

Доказательство. Перпендикулярность векторов $b - \lambda a$ и a, т. е. равенство

$$(a, b - \lambda a) = (a, b) - \lambda(a, a) = 0$$

равносильна равенству $\lambda = (a, b)/(a, a)$. Поэтому

$$a_b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(a, b)}{(a, a)} \cdot a \tag{1-26}$$

[1]иными словами, из произвольно заданной точки можно провести единственный перпендикуляр к произвольно заданной прямой, причём расстояние от заданной точки до основания этого перпендикуляра будет строго меньше расстояния от заданной точки до любой другой точки заданной прямой

это единственный пропорциональный a вектор, для которого разность

$$a_b^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} a - \frac{(a,b)}{(a,a)} \cdot a \qquad (1\text{-}27)$$

перпендикулярна вектору a. Запишем теперь произвольный пропорциональный a вектор λa как $\lambda a = a_b + \mu \cdot a$ и перепишем разность $b - \lambda a$ в виде

$$b - \lambda a = b - a_b - \mu a = a_b^{\perp} - \mu a\,.$$

Тогда по теореме Пифагора $|b - \lambda a|^2 = |a_b^{\perp} - \mu a|^2 = |a_b^{\perp}|^2 + \mu^2 |a|^2 \geqslant |a_b^{\perp}|^2$, где равенство возможно только при $\mu = 0$, т. е. когда $b - \lambda a = a_b^{\perp}$. □

Определение 1.3

Векторы a_b и $a_b^{\perp}$, определённые равенствами (1-26) и (1-27), называются, соответственно, *ортогональной проекцией* вектора b на вектор a и *нормальной составляющей* вектора b относительно a.

Следствие 1.2 (неравенство Коши – Буняковского – Шварца)

Для любых двух векторов a, b в произвольном евклидовом пространстве выполняется неравенство

$$(a,b)^2 \leqslant (a,a) \cdot (b,b)\,, \qquad (1\text{-}28)$$

которое обращается в равенство , если и только если векторы a и b пропорциональны.

Доказательство. Если оба вектора нулевые, обе части неравенства обращаются в нуль. Если $a \neq 0$, то длина нормальной составляющей вектора b относительно вектора a неотрицательна

$$(a_b^{\perp}, a_b^{\perp}) = (b,b) - \frac{(a,b)^2}{(a,a)} \geqslant 0$$

и обращается в нуль тогда и только тогда, когда $b = a_b$ пропорционален a. Домножая на (a,a), получаем (1-28). □

Следствие 1.3 (неравенство треугольника)

Для любых двух векторов в произвольном евклидовом пространстве выполняется *неравенство треугольника*[1] (см. рис. 1◇13):

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^2\,, \qquad (1\text{-}29)$$

обращающееся в равенство , если и только если a и b пропорциональны и *сонаправлены*[2].

[1] чем, собственно, и оправдывается термин «длина»

[2] т. е. один получается из другого умножением на *положительное* число

Доказательство. Возводя обе части (1-29) в квадрат, получаем эквивалентное (1-29) неравенство $(a+b, a+b) \leqslant (a,a)+2\,|a|\cdot|b|+(b,b)$, которое после раскрытия скобок в левой части и очевидных сокращений превращается в неравенство

$$(a,b) \leqslant |a| \cdot |b|\,, \tag{1-30}$$

заведомо строгое при $(a,b) < 0$, а при $(a,b) \geqslant 0$ равносильное неравенству Коши – Буняковского – Шварца (1-28), получающемуся из (1-30) возведением обеих частей в квадрат. □

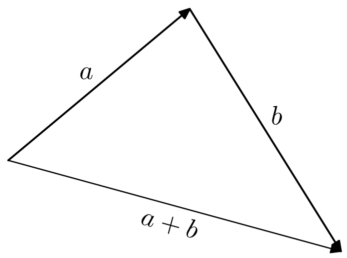

Рис. 1◇13. Неравенство треугольника.

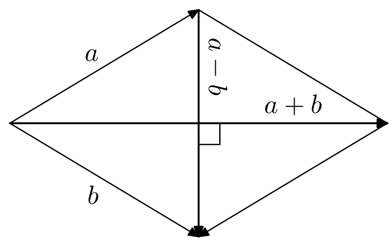

Рис. 1◇14. Диагонали ромба перпендикулярны.

Упражнение 1.10. Проверьте, что диагонали ромба перпендикулярны (т. е. для любых двух векторов a, b одинаковой длины $|a| = |b|$ выполнено соотношение $(a+b, a-b) = 0)$, см. рис. 1◇14).

1.5.2. Ортонормальные базисы. Векторы длины 1 называются *единичными*. Базис пространства $\mathbb{R}^2$, образованный двумя перпендикулярными единичными векторами, называется *ортонормальным* базисом. Таким образом, таблица попарных скалярных произведений векторов ортонормального базиса e_1, e_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ортонормальные базисы существуют *для любого* скалярного произведения: если векторы a и b не пропорциональны друг другу, то векторы

$$e_1 = a/|a|\,, \quad e_2 = a_b^\perp/|a_b^\perp|\,,$$

где $a_b^\perp = b - a\cdot(a,b)/(a,a)$, составляют ортонормальный базис.

Упражнение 1.11. Убедитесь в этом прямым вычислением.

Предложение 1.2
Коэффициенты разложения произвольного вектора $u = x_1e_1 + x_2e_2$ по любому ортонормальному базису e_1, e_2 можно вычислять по формулам

$$x_1 = (u, e_1)\,, \quad x_2 = (u, e_2)\,,$$

а скалярное произведение векторов $u = x_1e_1 + x_2e_2$ и $w = y_1e_1 + y_2e_2$ имеет стандартный вид $(u,w) = x_1y_1 + x_2y_2$.

Доказательство. Вычисляя скалярное произведение обеих частей равенства

$$u = x_1e_1 + x_2e_2$$

сначала с вектором e_1, а потом с вектором e_2, совершенно так же как и в доказательстве лем. 1.2, получаем первое утверждение. Второе получается раскрытием скобок в $(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2)$. □

Предложение 1.3 (определитель Грама)
Для любого ортонормального базиса e_1, e_2 и любых двух векторов $u = x_1e_1 + x_2e_2$ и $w = y_1e_1 + y_2e_2$ имеет место равенство[1]:

$$\det{}^2 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} (u,u) & (u,w) \\ (w,u) & (w,w) \end{pmatrix}$$

(правый определитель называется *определителем Грама* векторов u, v).

Доказательство. Прямое вычисление с использованием второго утверждения из предл. 1.2 даёт:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} (u,u) & (u,w) \\ (w,u) & (w,w) \end{pmatrix} &= (u,u)\cdot(w,w) - (u,w)^2 = \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2 = \\ &= (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 - 2x_1y_1x_2y_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Упражнение 1.12. Выведите из предл. 1.3 другое доказательство неравенства Коши – Буняковского – Шварца (1-28).

Следствие 1.4
При любом выборе площади на $\mathbb{R}^2$ все ортонормальные базисы имеют равные по абсолютной величине площади.

Доказательство. Если векторы u, w в предл. 1.3 также образуют ортонормальный базис, то их определитель Грама

$$\det \begin{pmatrix} (u,u) & (u,w) \\ (w,u) & (w,w) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

откуда по теор. 1.1 и предл. 1.3

$$s^2(u,w) = \det{}^2(u,w)\cdot s^2(e_1,e_2) = \det \begin{pmatrix} (u,u) & (u,w) \\ (w,u) & (w,w) \end{pmatrix} \cdot s^2(e_1,e_2) = s^2(e_1,e_2)\,,$$

т. е. $s(u,w) = \pm s(e_1,e_2)$. □

[1] означающее, что определитель таблицы умножения двух векторов равен квадрату отношения площади натянутого на них параллелограмма к площади произвольного квадрата со стороной 1

1.5.3. Евклидова площадь и ориентация. Поскольку при смене знака одного из векторов площадь меняет знак, все ортонормальные базисы пространства $\mathbb{R}^2$ распадаются на два класса так, что площади любых двух базисов из одного класса равны, а площади любых двух базисов из разных классов противоположны по знаку. Базисы, принадлежащие к одному классу, называются *одинаково ориентированными*.

Фиксируем какой-нибудь ортонормальный базис (e_1, e_2) и будем называть *евклидовой ориентированной площадью* на $\mathbb{R}^2$ ту (единственную) площадь s, для которой $s(e_1, e_2) = 1$. При этом площади всех ортонормальных базисов той же ориентации, что и выбранный, будут равны 1, а площади всех ортонормальных базисов противоположной ориентации будут равны -1 .

Отметим, что определитель $\det(a, b)$ координат произвольных двух векторов $a, b \in \mathbb{R}^2$ относительно *любого* положительно ориентированного ортонормального базиса пространства $\mathbb{R}^2$ не зависит от выбора такого базиса, поскольку равен евклидовой площади параллелограмма, натянутого на векторы a, b. В дальнейшем мы частенько будем писать $\det(a, b)$ для обозначения евклидовой площади этого параллелограмма.

Упражнение 1.13. Покажите, что абсолютная величина евклидовой площади параллелограмма равна произведению длины основания на длину опущенной на него высоты: $|\det(a, b)| = |a| \cdot |a_b^\perp|$.

1.6. Углы и тригонометрия. Коэффициенты x, y разложения

$$f = e \cdot x + e^\perp \cdot y$$

единичного вектора f по положительно ориентированному ортонормальному базису $e, e^\perp$ называются *синусом* и *косинусом ориентированного угла*

$$\varphi = \widehat{ef} \tag{1-31}$$

от e к f. Согласно лем. 1.2 и предл. 1.2 их можно вычислять по любой из формул

$$\begin{aligned} \cos\widehat{ef} &= (e, f) = \det(f, e^\perp) \\ \sin\widehat{ef} &= \det(e, f) = (e^\perp, f)\,. \end{aligned} \tag{1-32}$$

Из равенства $1 = (f, f) = x^2 + y^2$ вытекает «основное тригонометрическое тождество»

$$\cos^2\widehat{ef} + \sin^2\widehat{ef} = 1$$

и неравенства $-1 \leqslant \cos\widehat{ef} \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \sin\widehat{ef} \leqslant 1$.

Записывая равенство (1-19) для трёх векторов векторов a, b, c единичной длины в виде

$$\det(a, b) \cdot c + \det(b, c) \cdot a + \det(c, a) \cdot b = 0 \tag{1-33}$$

и умножая его скалярно на b, получаем тригонометрическую «формулу сложения углов» (см. рис. 1◇8)

$$\sin\widehat{ab}\cdot\cos\widehat{bc}+\sin\widehat{bc}\cdot\cos\widehat{ac}=\sin\widehat{ac}\,. \tag{1-34}$$

Если векторы a и b произвольны, то векторы $a/|a|$ и $b/|b|$ имеют единичную длину, а ориентированный угол между ними тот же, что и между исходными векторами. Таким образом, ориентированный угол между произвольными векторами a и b вычисляется по формуле

$$\cos\widehat{ab}=\frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}\,,\quad \sin\widehat{ab}=\frac{\det(a,b)}{|a|\cdot|b|}\,. \tag{1-35}$$

1.6.1. Аналитическое определение угла. В курсе анализа даётся независимое определение тригонометрических функций. А именно, ряд

$$e^z=1+z+\frac{1}{2}\,z^2+\frac{1}{6}\,z^3+\;\dots=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}\,z^k$$

от комплексной переменной $z\in\mathbb{C}$ мажорируется геометрической прогрессией на любом круге $|z|<R$ в $\mathbb{C}$ и, стало быть, абсолютно и равномерно сходится на любом таком круге. Поэтому он корректно задаёт дифференцируемую функцию[1]

$$\mathbb{C}\xrightarrow{z\mapsto e^z}\mathbb{C}\,.$$

Явно перемножая ряды, нетрудно увидеть, что эта функция удовлетворяет тождеству

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}\,. \tag{1-36}$$

Тригонометрические функции вещественной переменной $\vartheta\in\mathbb{R}$ определяются через комплексную экспоненту по формулам

$$\begin{aligned}\cos\vartheta&=\frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}=\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}\,\vartheta^{2\nu}=1-\frac{1}{2}\,\vartheta^2+\frac{1}{24}\,\vartheta^4-\;\cdots\\ \sin\vartheta&=\frac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}=\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}\,\vartheta^{2\nu+1}=\vartheta-\frac{1}{6}\,\vartheta^3+\frac{1}{120}\,\vartheta^5-\;\cdots\,.\end{aligned} \tag{1-37}$$

Прямо из этих определений и тождества (1-36) вытекают равенства

$$\begin{aligned}\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta&=1\\ \sin(\vartheta_1+\vartheta_2)&=\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2+\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\\ \cos(\vartheta_1+\vartheta_2)&=\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2-\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\end{aligned} \tag{1-38}$$

[1]замечательную среди прочего тем, что она совпадает со своей производной

Стандартными методами исследования дифференцируемых функций показывается, что отображение $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, заданное формулой

$$\vartheta \longmapsto (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \tag{1-39}$$

монотонно наматывает числовую прямую $\mathbb{R}$ против часовой стрелки на единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$ и имеет период 2π.

Это позволяет *определить* ориентированный угол $\widehat{ef}$ между единичными векторами e, f любого евклидова пространства V как единственное вещественное число $\vartheta \in [0, 2\pi)$, переходящее при отображении (1-39) в точку

$$\big((e,f)\,,\ \det(e,f)\,\big)\,,$$

которая лежит на единичной окружности, поскольку, как мы видели выше,

$$f = (e,f)\cdot e + \det(e,f)\cdot e^{\perp}$$

и $(f,f) = 1 \iff (e,f)^2 + \det^2(e,f) = 1$.

При таком определении угла утверждение о том, что «углы складываются» по правилу

$$\widehat{ab} + \widehat{bc} = \widehat{ac}\,,$$

становится *теоремой*, и сопоставляя рассуждения вокруг формул (1-33) и (1-34) на стр. 24 со средней формулой в (1-37), мы получаем *доказательство* этой теоремы.

Упражнение 1.14. Если у Вас под рукой имеется какой-нибудь список аксиом школьной евклидовой геометрии, удостоверьтесь, что приведённые в нём аксиомы выполняются на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ со стандартным скалярным произведением (1-25), точки, прямые, углы и расстояния на которой *определяются* так, как это было сделано выше.

Упражнение 1.15. Покажите, что прямая, заданная в координатах (x_1, x_2) относительно какого-нибудь ортонормального базиса в $\mathbb{R}^2$ уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c\,,$$

перпендикулярна вектору $a = (a_1, a_2)$ и находится от начала координат на расстоянии $|d|/|a|$ по ту же сторону, что и конец вектора a, если $d > 0$, и по другую сторону — если $d < 0$.