Неформальное введение

Есть две точки зрения на то, как должен быть организован курс геометрии. Восходящее к Евклиду[1] аксиоматическое построение геометрии лежит в основе большинства сегодняшних школьных учебников, не смотря на то, что является далеко не самым простым — удовлетворительная с точки зрения математической логики система «аксиом Евклида» была предложена Д. Гильбертом только в начале XX века, и лишь спустя ещё несколько десятков лет была упрощена А. Н. Колмогоровым настолько, что вошла в регулярный школьный учебник[2], где заняла несколько страниц петитом в добавлении, предназначенном для факультативного изучения.

Неприятным побочным результатом аксиоматического преподавания геометрии является довольно распространённое представление о ней как о некоем полигоне для упражнений по математической логике.

Альтернативный «аналитический» подход к построению курса геометрии заключается в том, чтобы вместо аксиоматического описания основных геометрических понятий (точек, прямых, их взаимного расположения и т. п.) давать всем используемым объектам *явные определения*, основанные на известном из алгебры и анализа понятии *числа*.

Так, вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ можно *определить* как множество, точками в котором являются столбцы вещественных чисел $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, а прямую на такой плоскости — как траекторию точки, равномерно движущейся в заданном направлении, т. е. как ГМТ[3] вида

$$p + v \cdot t = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} p_1 + v_1 t \\ p_2 + v_2 t \end{pmatrix} .$$

Параметр $t \in \mathbb{R}$ в этом представлении играет роль времени, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ — произвольным образом фиксированная точка, отвечающая нулевому моменту времени, а *вектор* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ задаёт скорость движения.

При таком определении высказывания о том, что через любые две точки плоскости проходит одна и только одна прямая и что через любую точку плоскости, не лежащую на данной прямой ℓ, проходит ровно одна прямая, не пересекающая ℓ, становятся *теоремами*.

Упражнение 0.1. Докажите обе эти теоремы.

[1] и к тем временам, когда «геометрия» в значительной мере буквально была «землемерием», т. е. решала насущные технические задачи землеустройства, строительства и навигации

[2] замечательный учебник под редакцией А. Н. Колмогорова, служивший основным официальным пособием по геометрии в 70-х – 80-х годах прошлого века

[3] здесь и далее аббревиатура «ГМТ» используется для сокращения фразы «геометрическое место точек»

Точки и векторы. Дальнейшие размышления в указанном направлении приводят к пониманию того, что *вектор* $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, хоть формально и записывается точно такой же парой чисел, как и точка, является, однако, объектом совершенно иной геометрической природы.

Вектор v правильно представлять себе как *преобразование сдвига*

$$\tau_v : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{p \mapsto p+v} \mathbb{R}^2 ,$$

переводящее каждую точку $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ в точку $p+v = \begin{pmatrix} p_1 + v_1 \\ p_2 + v_2 \end{pmatrix}$. В частности, координаты $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ вектора v суть *координаты этого сдвига* — они равны разностям между координатами преобразованной и исходной точки, причём эти разности одинаковы для всех точек. Если параллельно сдвинуть систему координат на какой-нибудь вектор $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, то координаты $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ каждой точки $p \in \mathbb{R}^2$ при этом поменяются и станут равны $\begin{pmatrix} p_1 - w_1 \\ p_2 - w_2 \end{pmatrix}$, а вот с координатами векторов при этом *ничего не произойдёт*.

Группы преобразований. Рассмотрим произвольное множество X и обозначим через $\mathrm{End}(X)$ множество всех отображений $X \xrightarrow{f} X$ из X в себя[1]. На таких отображениях имеется естественная операция *композиции*, сопоставляющая упорядоченной паре отображений $X \xrightarrow{f} X$, $X \xrightarrow{g} X$, результат их последовательного выполнения

$$g \circ f : X \xrightarrow{x \mapsto g(f(x))} X . \tag{0-1}$$

Упражнение 0.2. Придумайте пример множества X и трёх отображений

$$f, g, h : X \longrightarrow X ,$$

таких что а) $f \circ g \neq g \circ f$ б) $f \circ h = g \circ h$, но $f \neq g$ в) $h \circ f = h \circ g$, но $f \neq g$

Определение 0.1

Множество отображений $\mathfrak{G} \subset \mathrm{End}(X)$ называется *группой*, если все отображения $g \in \mathfrak{G}$ взаимно однозначны, и вместе с каждым отображением $g \in \mathfrak{G}$ обратное ему отображение g^{-1} тоже принадлежит $\mathfrak{G}$, а вместе с каждыми двумя отображениями $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}$ лежит и их композиция $g_1 \circ g_2$.

Отметим, что из этих требований вытекает, что тождественное отображение Id_X, переводящее каждую точку в себя, автоматически содержится в $\mathfrak{G}$, поскольку представимо в виде композиции $\mathrm{Id}_x = g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g$, где $g \in \mathfrak{G}$ — любое преобразование из группы.

[1] такие отображения часто называют *эндоморфизмами* множества X, откуда и обозначение

Группа сдвигов. Параллельные переносы плоскости $\mathbb{R}^2$ на всевозможные векторы образуют группу: обратным преобразованием к сдвигу на вектор

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

является сдвиг на *противоположный* вектор

$$-v = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} ,$$

а композиция сдвигов на векторы $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ и $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ — это сдвиг на вектор

$$u + w = \begin{pmatrix} u_1 + w_1 \\ u_2 + w_2 \end{pmatrix} . \tag{0-2}$$

Подчеркнём, что эта формула является координатной записью для операции *композиции отображений*, которая сама по себе определяется *без использования координат*.

На множестве *точек* плоскости никакой подобной операции нет: если мы попытаемся определить «сумму точек» как сумму их соответственных координат, то одна и та же пара точек будет иметь разные суммы в разных координатных системах. Например, если системы координат $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ отличаются друг от друга сдвигом начала отсчёта на вектор $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, и точки p и q имеют в системе x координаты $x(p)$ и $x(q)$, а в системе y — координаты $y(p) = x(p) - w$ и $y(q) = x(q) - w$, то «покоординатная сумма» $p + q$ в системе x получится точкой с координатами $x(p) + x(q) = y(p) + y(q) + 2w$, которая в системе y имеет координаты $y(p) + y(q) + w$, а не $y(p) + y(q)$.

Замечательно, что вопреки упр. 0.2 композиция сдвигов не зависит от того, какой сдвиг делается первым, а какой — вторым. Это сразу следует из формулы (0-2). Группы преобразований, в которых любые два элемента g_1, g_2 перестановочны (т. е. удовлетворяют соотношению $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$) называются *коммутативными* или *абелевыми*.

Как будет устроен наш курс. Мы будем следовать схеме, предложенной в 30-х годах XX века Г. Вейлем. Первичным геометрическим объектом для нас будет *векторное пространство* — абелева группа *векторов*, которые можно складывать друг с другом и умножать на числа по стандартным, известным из школы правилам. Мы напомним список этих правил в §1, он будет на порядок короче и удобнее любого списка аксиом евклидовой геометрии.

В последствии мы будем снабжать векторные пространства разнообразными дополнительными структурами и станем изготавливать из векторных пространств разнообразные *точечные* пространства, в которых можно будет рисовать фигуры и изучать свойства этих фигур по отношению к различным геометрическим преобразованиям. Подчеркнём, что в конечном итоге все эти свойства будут *выводиться* из алгебраических свойств операций с векторами.

Первый параграф этих записок будут целиком посвящён тому, как вписывается в эту картину школьная планиметрия — мы дадим определение координатной плоскости $\mathbb{R}^2$, основанное на свойствах векторов, и покажем, что все постулаты и теоремы школьной планиметрии на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ очевидным образом выполнены.

Далее нам не составит никакого труда распространить эти рассуждения на векторные и аффинные пространства *любой размерности*, заданные над произвольными *полями констант* (а не только над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$).

О числах. Понятие *числа* столь же фундаментально для геометрии, сколь и понятие *вектора*. Уже для того, чтобы только сформулировать свойства умножения векторов на константы, мы должны как-то зафиксировать множество этих констант. Для нас будет существенно, чтобы константы образовывали *поле*, т. е. чтобы над ними можно было производить все четыре арифметических действия — сложение, вычитание, умножение и деление на ненулевые числа, удовлетворяющие известным из курса алгебры аксиомам, формализующим свойства арифметических операций над рациональными числами. Мы всегда обозначаем поле констант через $\Bbbk$ и называем его *основным полем* или *полем определения* нашей геометрии.

Если специально не оговаривается противное, читатель на первых порах может без ущерба для понимания происходящего считать, что $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — это поле рациональных, действительных или комплексных чисел (выбирайте наиболее привычное). Однако, то обстоятельство, что многие из доказываемых ниже теорем справедливы *над любым* основным полем, следует всё-таки иметь в виду. Скажем, над полем вычетов по простому модулю p, которое состоит из p чисел, геометрические пространства становятся конечными множествами, и некоторые всем привычные картинки в этих пространствах превращаются в довольно любопытные комбинаторные утверждения.