

ОГ1◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_4x_1 + x_2^2 - 2x_3x_2 - 4x_4x_2 + 4x_4x_3 + 7x_4^2.$$

- Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ1◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -10 & -17 & 7 & -11 & 4 \\ -17 & -27 & 12 & -2 & 3 \\ 7 & 12 & -5 & 5 & -2 \\ -11 & -2 & 5 & -4 & 8 \\ 4 & 3 & -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

- Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ -5x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-7, -2, -15, 0, 0)$ и $(58, -1, 72, 9, 39)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ1◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ2◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_4x_1 + 4x_3x_2 + 8x_4x_2 - 5x_3^2 - 12x_4x_3 - 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ2◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 22 & -3 & -4 & 11 & 8 \\ -3 & -5 & -1 & -2 & -3 \\ -4 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 11 & -2 & 0 & 5 & 3 \\ 8 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-1, 2, -3, 10, -13)$ и $(16, -29, 12, -106, 94)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ2◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГЗ◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 + 2x_3x_1 + 2x_4x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 - 4x_4x_2 + 2x_3^2 + 2x_4x_3 + x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГЗ◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 3 & -13 & 7 & -9 & -6 \\ -13 & 48 & 6 & 3 & -7 \\ 7 & 6 & 5 & 0 & -3 \\ -9 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ -6 & -7 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(24, 36, 19, -136, 159)$ и $(21, 27, 2, -98, 105)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГЗ◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ4◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_4x_1 + 5x_2^2 + 2x_3x_2 + 6x_4x_2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ4◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -45 & -45 & 58 & 21 & -11 \\ -45 & -61 & 66 & 21 & -10 \\ 58 & 66 & -81 & -28 & 12 \\ 21 & 21 & -28 & -10 & 4 \\ -11 & -10 & 12 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-1, -2, -4, 6, 4)$ и $(-2, -7, -14, 24, 8)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ4◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ5◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 3x_2^2 + 10x_3x_2 - 8x_4x_2 + 2x_3^2 + 2x_4x_3 - 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ5◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -13 & 4 & 10 & 4 & 1 \\ 4 & -28 & -1 & 3 & 3 \\ 10 & -1 & -6 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 6x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3, 5, -7, 18, 17)$ и $(9, -8, 25, -6, -71)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ5◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ6◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 - 4x_3x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 + 4x_3x_2 - 2x_4x_2 + 9x_3^2 - 12x_4x_3 + 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ6◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & -5 & 15 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -22 & 12 & 3 \\ 15 & 2 & 12 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, 0, 0, 0, -3)$ и $(-14, -21, 9, 3, 12)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ6◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ7◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_3x_1 + 4x_4x_1 + 2x_2^2 - 8x_4x_2 + x_3^2 - 2x_4x_3 + 6x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ7◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 16 & -9 & -8 & 20 & -7 \\ -9 & 1 & -3 & -13 & 5 \\ -8 & -3 & 2 & -16 & 4 \\ 20 & -13 & -16 & 25 & -8 \\ -7 & 5 & 4 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(17, 12, -6, -16, -17)$ и $(1, -9, 9, 13, 41)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ7◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ8◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 + 4x_3x_1 - 2x_4x_1 - 8x_3x_2 - x_3^2 - 12x_4x_3 - 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ8◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -25 & 26 & -17 & -6 & 9 \\ 26 & -39 & 22 & 4 & -11 \\ -17 & 22 & -34 & 12 & 1 \\ -6 & 4 & 12 & -13 & 6 \\ 9 & -11 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, -2, 0, 5, 14)$ и $(-5, 2, 6, 7, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ8◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ9◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_3x_1 - 2x_4x_1 + x_2^2 + 2x_3x_2 + 3x_3^2 + x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ9◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -22 & -19 & -8 & 16 & -13 \\ -19 & -22 & 1 & 9 & -11 \\ -8 & 1 & -13 & 11 & -4 \\ 16 & 9 & 11 & -16 & 9 \\ -13 & -11 & -4 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(17, -24, -13, 9, 24)$ и $(-38, 57, 31, -18, -60)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ9◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ10◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_4x_1 + 2x_2^2 + 2x_3x_2 + 4x_4x_2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ10◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -77 & 6 & 54 & 14 & 18 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 54 & 1 & -39 & -7 & -11 \\ 14 & 1 & -7 & 2 & -1 \\ 18 & 0 & -11 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -7x_1 + 4x_3 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-3, 4, 3, 12, -31)$ и $(6, -13, -9, -30, 82)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ10◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ11◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_3x_1 + 4x_4x_1 - 2x_4x_2 - x_3^2 + 2x_4x_3 - 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ11◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 & -30 & -24 \\ 6 & 7 & 7 & -13 & -12 \\ 5 & 7 & 6 & -24 & -20 \\ -30 & -13 & -24 & -12 & -3 \\ -24 & -12 & -20 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, 2, -3, 3, -4)$ и $(26, 31, -57, 21, -26)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ11◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ12◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_3x_1 - 2x_4x_1 + 2x_2^2 + 2x_3x_2 - 4x_4x_2 + 2x_3^2 - 4x_4x_3 + 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ12◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -56 & -18 & 43 & -37 & 22 \\ -18 & -25 & 37 & -19 & 8 \\ 43 & 37 & -61 & 37 & -18 \\ -37 & -19 & 37 & -27 & 15 \\ 22 & 8 & -18 & 15 & -9 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -5x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, 0, 0, 0, 5)$ и $(4, 15, 15, 12, 13)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ12◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ13◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 + 2x_3x_1 + 4x_4x_1 + 2x_2^2 + 2x_3x_2 + 4x_3^2 + 16x_4x_3 + 3x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ13◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -104 & -39 & 21 & -20 & -2 \\ -39 & -34 & 21 & -11 & 2 \\ 21 & 21 & -13 & 6 & -1 \\ -20 & -11 & 6 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5, -12, -22, -24, -9)$ и $(10, -21, -41, -54, -12)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ13◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ14◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 - 4x_3x_1 - 2x_4x_1 - 2x_3x_2 + 2x_4x_2 + 2x_3^2 + 2x_4x_3 - 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ14◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -35 & 29 & -18 & -7 & 13 \\ 29 & 5 & 25 & -5 & -3 \\ -18 & 25 & 4 & -8 & 6 \\ -7 & -5 & -8 & 0 & 1 \\ 13 & -3 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-10, -25, 37, 40, 100)$ и $(34, 79, -121, -133, -325)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ14◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ15◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_3x_1 + 2x_4x_1 + x_2^2 + 2x_3x_2 - 2x_4x_2 + 6x_3^2 - 2x_4x_3 + 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ15◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 22 & 12 & -13 & -7 \\ 5 & 12 & -26 & 9 & -8 \\ -4 & -13 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & -8 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 10x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-19, 29, -40, -47, 108)$ и $(-29, 34, -53, -67, 135)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ15◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ16◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 2x_2^2 - 4x_3x_2 + 8x_4x_2 + 3x_3^2 - 10x_4x_3 + 6x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ16◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -6 & -18 & 15 & 10 & -2 \\ -18 & -51 & 43 & 27 & -4 \\ 15 & 43 & -37 & -23 & 4 \\ 10 & 27 & -23 & -14 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(4, -8, 0, -12, -3)$ и $(-13, 17, -9, 39, 9)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ16◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ17◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_3x_1 - x_2^2 - 2x_3x_2 + 2x_3^2 - 2x_4x_3 - 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ17◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -3 & -8 & 3 & -3 & 0 \\ -8 & -25 & 10 & -2 & 3 \\ 3 & 10 & -4 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5, -4, -6, -1, 3)$ и $(-8, 7, 18, 4, -12)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ17◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ18◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_3x_1 - 4x_4x_1 + 5x_2^2 + 2x_3x_2 + 8x_4x_2 + 3x_3^2 + 8x_4x_3 + 7x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ18◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -8 & 9 & -4 & 5 & -4 \\ 9 & -5 & 5 & -7 & 5 \\ -4 & 5 & -6 & 11 & -7 \\ 5 & -7 & 11 & -14 & 7 \\ -4 & 5 & -7 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ -4x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(8, -3, -24, -34, -38)$ и $(-11, 3, 36, 55, 62)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ18◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ19◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 - 4x_3x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 + 4x_3x_2 - 8x_4x_2 + 7x_3^2 + 4x_4x_3 + 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ19◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 91 & -15 & 65 & 15 & -25 \\ -15 & 12 & -15 & -2 & 4 \\ 65 & -15 & 48 & 10 & -19 \\ 15 & -2 & 10 & 2 & -5 \\ -25 & 4 & -19 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, -6, -10, 21, -7)$ и $(-19, 48, 91, -159, 43)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ19◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ20◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_4x_1 - x_2^2 - 4x_3x_2 - 5x_3^2 + 2x_4x_3 - x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ20◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -21 & 8 & -10 & 21 & -8 \\ 8 & -129 & 77 & -10 & 20 \\ -10 & 77 & -50 & 17 & -16 \\ 21 & -10 & 17 & -38 & 15 \\ -8 & 20 & -16 & 15 & -8 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -2x_1 + 12x_2 - 8x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(17, 30, -8, 104, 268)$ и $(-38, -69, 23, -245, -640)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ20◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ21◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 + 2x_2^2 - 2x_4x_2 + x_3^2 + 2x_4x_3 + x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ21◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -29 & 1 & 1 & -2 & -9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -9 & -1 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, 3, 0, -1, -4)$ и $(-14, -33, 0, 25, 37)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ21◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ22◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_4x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 + 2x_4x_2 + 2x_4x_3 + 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ22◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -2 & 14 & -14 & 3 & 0 \\ 14 & 7 & 17 & 22 & 10 \\ -14 & 17 & -40 & -13 & -8 \\ 3 & 22 & -13 & 13 & 4 \\ 0 & 10 & -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 - x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-7, -2, 1, 7, -6)$ и $(49, 20, 8, -28, -33)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ22◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ23◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 2x_3x_1 + 4x_4x_1 + 3x_2^2 + 4x_3x_2 + 6x_4x_2 + 8x_4x_3 - 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ23◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 & -2 & -1 \\ -2 & 92 & -57 & 17 & 27 \\ 6 & -57 & 35 & -8 & -19 \\ -2 & 17 & -8 & 2 & 5 \\ -1 & 27 & -19 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(20, 6, -6, -42, -5)$ и $(-14, -9, 18, 51, 35)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ23◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ24◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_3x_1 - 4x_4x_1 + x_2^2 - 2x_3x_2 - 2x_4x_2 + 3x_3^2 - 4x_4x_3 + 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ24◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -29 & 25 & 17 & 6 & -8 \\ 25 & -28 & -9 & 0 & 13 \\ 17 & -9 & -30 & -13 & 0 \\ 6 & 0 & -13 & -7 & -3 \\ -8 & 13 & 0 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-1, -1, -1, 2, -2)$ и $(34, 55, -5, 19, 50)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ24◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ25◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 5x_2^2 - 8x_3x_2 - 2x_4x_2 + 3x_3^2 + 2x_4x_3 - x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ25◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -32 & 23 & -1 & -30 & 9 \\ 23 & -36 & 9 & 31 & -12 \\ -1 & 9 & -3 & -3 & 2 \\ -30 & 31 & -3 & -33 & 11 \\ 9 & -12 & 2 & 11 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(4, 7, -8, -19, -67)$ и $(14, 23, -19, -56, -200)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ25◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ26◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 2x_3x_1 - 4x_4x_1 + 3x_2^2 + 6x_3x_2 - 6x_4x_2 - x_3^2 - 4x_4x_3 + x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ26◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -34 & -37 & -43 & -10 & 9 \\ -37 & -39 & -41 & -10 & 8 \\ -43 & -41 & -28 & 8 & 2 \\ -10 & -10 & 8 & 13 & -5 \\ 9 & 8 & 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, 2, -5, 0, -13)$ и $(17, 25, -88, -21, -281)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ26◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ27◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + 2x_2^2 + 2x_4x_2 + 9x_3^2 + 12x_4x_3 + 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ27◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 30 & 38 & -39 & 19 & 14 \\ 38 & 48 & -53 & 30 & 20 \\ -39 & -53 & 38 & -6 & -11 \\ 19 & 30 & -6 & -10 & 0 \\ 14 & 20 & -11 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-6, -4, 11, -29, 93)$ и $(6, -5, 4, -7, 21)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ27◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ28◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_3x_1 + 2x_4x_1 + x_2^2 - 2x_3x_2 + 4x_4x_2 + x_3^2 - 2x_4x_3 + 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ28◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -12 & -19 & 8 & 6 & -1 \\ -19 & -36 & 15 & 8 & -1 \\ 8 & 15 & -17 & -18 & -6 \\ 6 & 8 & -18 & -25 & -8 \\ -1 & -1 & -6 & -8 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-7, -5, -21, 2, 30)$ и $(49, 32, 129, -8, -198)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ28◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ29◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 2x_3x_2 + 4x_4x_2 + 2x_3^2 + 6x_4x_3 - x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ29◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -15 & -33 & 23 & -15 & -6 \\ -33 & -94 & 72 & -47 & -18 \\ 23 & 72 & -60 & 44 & 18 \\ -15 & -47 & 44 & -37 & -16 \\ -6 & -18 & 18 & -16 & -7 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ -5x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, -1, -3, -7, 11)$ и $(26, -65, -156, -239, 292)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ29◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ30◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 5x_2^2 - 6x_3x_2 - 4x_4x_2 + 6x_3^2 + 12x_4x_3 + 7x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ30◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -21 & -14 & -30 & -20 & -9 \\ -14 & -24 & 32 & -9 & -11 \\ -30 & 32 & 34 & 13 & -2 \\ -20 & -9 & 13 & -7 & -8 \\ -9 & -11 & -2 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ -5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-20, 11, 34, -131, 206)$ и $(74, -47, -133, 512, -797)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ30◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ31◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_4x_1 + 5x_2^2 + 2x_3x_2 + 6x_4x_2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ31◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 14 & -12 & 32 & 15 & -5 \\ -12 & 2 & -19 & -7 & 5 \\ 32 & -19 & 77 & 36 & -14 \\ 15 & -7 & 36 & 17 & -7 \\ -5 & 5 & -14 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(11, 9, 2, 7, 41)$ и $(-14, -15, -11, 2, -68)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ31◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ32◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 2x_4x_1 - 4x_3x_2 + 6x_4x_2 + 3x_3^2 - 8x_4x_3 - 8x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ32◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -45 & -40 & -22 & -1 & -6 \\ -40 & -36 & -25 & 4 & -8 \\ -22 & -25 & -21 & 8 & -9 \\ -1 & 4 & 8 & -7 & 5 \\ -6 & -8 & -9 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 6x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-3, -4, 13, 14, -1)$ и $(6, 7, -22, -26, -5)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ32◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ33◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_3x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 - 4x_4x_2 + 6x_3^2 + 10x_4x_3 + 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ33◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -32 & 29 & -23 & -34 & 10 \\ 29 & -24 & 18 & 33 & -11 \\ -23 & 18 & -16 & -21 & 6 \\ -34 & 33 & -21 & -45 & 15 \\ 10 & -11 & 6 & 15 & -5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 2x_5 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7, -15, -9, -21, -28)$ и $(2, -9, -3, -15, -26)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ33◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ34◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_4x_1 + 2x_2^2 + 8x_4x_2 - x_3^2 + 4x_4x_3 + 3x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ34◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -19 & -22 & 4 & 3 & 7 \\ -22 & -8 & -1 & -7 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & 9 & 4 \\ 3 & -7 & 9 & 7 & 3 \\ 7 & -2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-18, 44, 30, -19, 79)$ и $(102, -245, -159, 106, -445)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ34◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ35◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 - 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 3x_2^2 - 4x_3x_2 + 4x_4x_2 - x_3^2 - 4x_4x_3 - 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ35◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 113 & -51 & 63 & 58 & 28 \\ -51 & 30 & -41 & -35 & -19 \\ 63 & -41 & 14 & 19 & 14 \\ 58 & -35 & 19 & 22 & 14 \\ 28 & -19 & 14 & 14 & 9 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 - 10x_3 - 8x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(13, 29, 6, -47, 84)$ и $(-94, -218, -30, 332, -639)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ35◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ36◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 - 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 2x_3x_2 + 6x_4x_2 + 2x_3^2 + 2x_4x_3 + 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ36◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -13 & -3 & -11 & 13 & -10 \\ -3 & -34 & 2 & 3 & 3 \\ -11 & 2 & -29 & 24 & -12 \\ 13 & 3 & 24 & -22 & 12 \\ -10 & 3 & -12 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-15, 5, 5, 13, 29)$ и $(54, -23, -26, -64, -119)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ36◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ37◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_3x_1 + x_2^2 - 4x_4x_2 + 4x_4x_3 - x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ37◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -13 & -14 & 3 & 3 & 0 \\ -14 & -15 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -29 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(8, -14, -7, -20, -33)$ и $(-29, 41, 16, 53, 81)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ37◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ38◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_3x_1 + 2x_4x_1 - x_2^2 + 4x_3x_2 - 4x_4x_2 - x_3^2 + 8x_4x_3 - 8x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ38◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 31 & 3 & 0 & 14 \\ 2 & 3 & -12 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 2 \\ -1 & 14 & -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6, -9, -16, -18, 25)$ и $(-12, 15, 40, 54, -46)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ38◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ39◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_4x_1 + 2x_2^2 + 6x_4x_2 + x_3^2 - 2x_4x_3 + 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ39◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -3 & -12 & -16 & -9 & -4 \\ -12 & 58 & 9 & 19 & -9 \\ -16 & 9 & 5 & -1 & 0 \\ -9 & 19 & -1 & 6 & -5 \\ -4 & -9 & 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 + x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(27, -70, 198, -71, -440)$ и $(36, -92, 261, -97, -583)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ39◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ40◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + x_2^2 - 2x_3x_2 + 4x_4x_2 + 4x_3^2 + 2x_4x_3 + 6x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ40◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -50 & 44 & -24 & 17 & 1 \\ 44 & -52 & 24 & -10 & 5 \\ -24 & 24 & -15 & 11 & 1 \\ 17 & -10 & 11 & -13 & -5 \\ 1 & 5 & 1 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(8, 18, 37, 28, -1)$ и $(-38, -93, -190, -139, 4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ40◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ41◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_3x_1 - 4x_4x_1 + 6x_3x_2 + 8x_4x_2 - 4x_3^2 - 6x_4x_3 - 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ41◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -34 & -37 & -6 & 3 & -6 \\ -37 & -42 & -9 & -2 & -9 \\ -6 & -9 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & -9 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -5x_1 - 5x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-12, 5, 12, -16, 19)$ и $(78, -29, -69, 106, -139)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ41◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ42◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 + 2x_3x_2 + 2x_4x_2 + 2x_3^2 - 4x_4x_3 + 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ42◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -36 & 9 & -14 & 12 & 2 \\ 9 & -9 & 6 & -7 & 0 \\ -14 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 12 & -7 & 5 & -6 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 8x_1 - 9x_2 - 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-2, 3, 0, -9, 0)$ и $(11, -27, -3, 51, 24)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ42◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ43◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_3x_1 - 4x_4x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 + 4x_3^2 + 12x_4x_3 + 7x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ43◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 33 & -1 & -22 & 23 & -8 \\ -1 & 26 & -28 & 6 & -9 \\ -22 & -28 & 29 & -11 & 9 \\ 23 & 6 & -11 & 11 & -3 \\ -8 & -9 & 9 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(27, -83, -202, -132, 298)$ и $(51, -157, -380, -249, 557)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ43◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ44◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 2x_3x_1 + 3x_2^2 - 4x_3^2 - x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ44◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -64 & -27 & -20 & -28 & -16 \\ -27 & -18 & -22 & -11 & -10 \\ -20 & -22 & -50 & -10 & -19 \\ -28 & -11 & -10 & -13 & -8 \\ -16 & -10 & -19 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3, -4, 4, 0, -9)$ и $(0, 19, -34, -45, 90)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ44◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ45◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 4x_3x_2 + 2x_4x_2 + 5x_3^2 + 2x_4x_3 + 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ45◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -66 & 26 & -33 & 12 & -7 \\ 26 & -51 & 37 & -29 & -9 \\ -33 & 37 & -28 & 19 & 4 \\ 12 & -29 & 19 & -16 & -6 \\ -7 & -9 & 4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - 11x_2 + 9x_3 - 8x_4 - 3x_5 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-3, -7, 9, 21, -3)$ и $(6, 13, -9, -27, -6)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ45◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ46◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 + 2x_3x_1 + 2x_4x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 + 6x_4x_2 + 4x_3^2 - 2x_4x_3.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ46◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -5 & -12 & -22 & 5 & -17 \\ -12 & 6 & 9 & -4 & 8 \\ -22 & 9 & 1 & -4 & 2 \\ 5 & -4 & -4 & 2 & -3 \\ -17 & 8 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(9, -4, -24, -55, 16)$ и $(-24, 7, 63, 151, -34)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ46◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ47◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 3x_2^2 + 4x_3x_2 + 2x_4x_2 - x_3^2 + 4x_4x_3 - 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ47◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 70 & -22 & -32 & 66 & 27 \\ -22 & 2 & 9 & -5 & -3 \\ -32 & 9 & 15 & -28 & -12 \\ 66 & -5 & -28 & 18 & 11 \\ 27 & -3 & -12 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 - 3x_5 = 0 \\ -7x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(15, -17, 49, -28, 74)$ и $(6, -16, 23, -17, 40)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ47◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ48◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 2x_3x_2 - 8x_4x_2 + 2x_3^2 + 8x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ48◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -15 & -1 & 13 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & -6 & -1 & 3 \\ 13 & -6 & -49 & 9 & 15 \\ -4 & -1 & 9 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 15 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ -2x_1 + 4x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(4, -2, 6, 5, 11)$ и $(-4, 11, -12, -23, -17)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ48◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ49◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 - 4x_3x_4 - 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ49◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -9 & -21 & -3 & -11 & 4 \\ -21 & 1 & 22 & -17 & 13 \\ -3 & 22 & 11 & 2 & 0 \\ -11 & -17 & 2 & -12 & 6 \\ 4 & 13 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7, -10, 22, -4, -30)$ и $(-16, 7, -22, 16, 33)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ49◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ50◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 2x_4x_1 + 6x_3x_2 + 2x_4x_2 + 2x_3^2 - 4x_4x_3 - 8x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ50◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -8 & -6 & 3 & -3 & -3 \\ -6 & -3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 \\ -3 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5, -6, 1, -3, 7)$ и $(-26, 21, -22, 18, -13)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ50◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ51◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 - 2x_3x_1 + 4x_4x_1 + 2x_2^2 + 6x_4x_2 + 3x_3^2 + 5x_4^2.$$

- Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ51◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 35 & 25 & -4 & 2 & -8 \\ 25 & 37 & 2 & -6 & -15 \\ -4 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & -2 & 3 & 3 \\ -8 & -15 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_5 = 0 \\ -4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(9, -8, 6, -22, 5)$ и $(-9, 23, 33, 46, 28)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ51◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ52◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 + 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + 2x_2^2 - 6x_3x_2 + 6x_4x_2 + 4x_3^2 - 8x_4x_3 + 3x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ52◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -34 & -25 & -5 & 6 & -1 \\ -25 & -46 & -21 & -22 & 12 \\ -5 & -21 & -12 & -17 & 8 \\ 6 & -22 & -17 & -31 & 13 \\ -1 & 12 & 8 & 13 & -6 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 4x_1 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-1, 3, -5, 3, 7)$ и $(34, -81, 128, -51, -106)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ52◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ53◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 + 2x_3x_1 + 4x_4x_1 - 2x_3x_2 - 6x_4x_2 - 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ53◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -81 & -36 & 69 & -57 & 28 \\ -36 & -19 & 35 & -25 & 13 \\ 69 & 35 & -107 & 51 & -32 \\ -57 & -25 & 51 & -40 & 20 \\ 28 & 13 & -32 & 20 & -11 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 9x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5, -1, 7, -23, -50)$ и $(10, -5, 23, -61, -157)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ53◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ54◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 - 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + 2x_2^2 - 4x_3x_2 - 4x_4x_2 + 5x_3^2 + 10x_4x_3 + 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ54◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -77 & 35 & 32 & 20 & 18 \\ 35 & -40 & -14 & -15 & -13 \\ 32 & -14 & -12 & -9 & -7 \\ 20 & -15 & -9 & -6 & -6 \\ 18 & -13 & -7 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ -7x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, -2, -1, 2, 6)$ и $(-1, -1, 1, 7, -12)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ54◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ55◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 2x_3x_1 - 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 6x_3x_2 + 4x_4x_2 + x_3^2 - x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ55◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 17 & 21 & -3 & 3 & 10 \\ 21 & 33 & 0 & 7 & 12 \\ -3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 2 \\ 10 & 12 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, -6, -8, 22, 2)$ и $(-4, -9, 5, 17, 22)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ55◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ56◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_4x_1 - x_2^2 - 2x_3x_2 + 2x_4x_2 - 2x_3^2 + 6x_4x_3 - 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ56◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -38 & -48 & 34 & 5 & 5 \\ -48 & -75 & 41 & 31 & -2 \\ 34 & 41 & -30 & -3 & -5 \\ 5 & 31 & -3 & -38 & 12 \\ 5 & -2 & -5 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ -5x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(8, 12, 27, 5, -11)$ и $(-2, 3, 3, 1, -4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ56◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ57◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 2x_4x_1 + 2x_2^2 + 2x_3x_2 - 4x_4x_2 + 6x_3^2 - 6x_4x_3 + 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ57◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -10 & -1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & -13 & 2 & 7 & 6 \\ -3 & 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & 7 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & -1 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -2x_1 - x_4 - x_5 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-7, 2, -13, -26, 38)$ и $(22, -11, 40, 80, -128)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ57◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ58◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + 2x_2^2 + 2x_3x_2 + 4x_4x_2 + 4x_3^2 + 6x_4x_3 + 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ58◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -31 & 16 & -9 & 8 & 10 \\ 16 & 0 & 9 & -7 & -2 \\ -9 & 9 & -7 & 0 & 2 \\ 8 & -7 & 0 & -1 & -4 \\ 10 & -2 & 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-3, 1, 2, -1, -7)$ и $(24, -13, -29, -2, 70)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ58◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ59◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 3x_2^2 - 4x_4x_2 - 4x_3^2 + 10x_4x_3 - 6x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ59◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -3 & -31 & 20 & 9 & 9 \\ -31 & 18 & -21 & -11 & -10 \\ 20 & -21 & 30 & 8 & 10 \\ 9 & -11 & 8 & 9 & 6 \\ 9 & -10 & 10 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-15, 38, -68, -186, 462)$ и $(-24, 58, -106, -294, 723)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ59◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ60◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + x_2^2 + 2x_3x_2 - 2x_4x_2 + 6x_3^2 + 8x_4x_3 + 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ60◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -8 & 8 & 9 & 4 & 6 \\ 8 & -14 & 4 & -5 & -3 \\ 9 & 4 & -97 & 16 & -25 \\ 4 & -5 & 16 & -10 & 0 \\ 6 & -3 & -25 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(19, 27, 49, 73, -132)$ и $(-55, -75, -130, -193, 351)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ60◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ61◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_3x_1 + x_2^2 - 2x_3x_2 + 4x_4x_2 + 4x_3^2 - 8x_4x_3 - x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ61◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -8 & -19 & -11 & 19 & -7 \\ -19 & -6 & -14 & -2 & -2 \\ -11 & -14 & -22 & 6 & -7 \\ 19 & -2 & 6 & 9 & -2 \\ -7 & -2 & -7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(4, -6, -10, 6, 43)$ и $(-13, 9, 34, -21, -124)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ61◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ62◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 - 2x_4x_1 + 3x_2^2 - 4x_3x_2 - 8x_4x_2 + 6x_4x_3 - 8x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ62◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 49 & -9 & -19 & -10 & 16 \\ -9 & -21 & 8 & -5 & -16 \\ -19 & 8 & 7 & 5 & -4 \\ -10 & -5 & 5 & 0 & -7 \\ 16 & -16 & -4 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -3x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \\ 7x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, -4, 1, 12, 0)$ и $(-5, 7, -1, -27, 0)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ62◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ63◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_3x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 - 2x_4x_2 + 6x_3^2 + 8x_4x_3 + 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ63◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 17 & 9 & -22 & 4 & 9 \\ 9 & 8 & -6 & 0 & 5 \\ -22 & -6 & 6 & 3 & -6 \\ 4 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 9 & 5 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -7x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-1, 7, -9, -16, -20)$ и $(1, 8, -15, -29, -37)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ63◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ64◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 5x_2^2 + 6x_3x_2 + 12x_4x_2 + 4x_3^2 + 6x_4x_3 + 6x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ64◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -17 & -12 & -17 & 7 & 6 \\ -12 & -29 & -29 & 11 & 14 \\ -17 & -29 & -47 & 30 & 20 \\ 7 & 11 & 30 & -25 & -12 \\ 6 & 14 & 20 & -12 & -9 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-5, -8, 21, 15, 10)$ и $(23, 26, -84, -57, -55)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ64◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ65◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 - 4x_3x_1 + 2x_4x_1 + 3x_2^2 + 10x_3x_2 + 2x_3^2 - 10x_4x_3 - 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ65◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -17 & 1 & -38 & 18 & -7 \\ 1 & -45 & 7 & 3 & -9 \\ -38 & 7 & 26 & -29 & 15 \\ 18 & 3 & -29 & 23 & -10 \\ -7 & -9 & 15 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-2, -4, 5, 22, 31)$ и $(38, 37, -101, -322, -370)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ65◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ66◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 2x_4x_1 + 2x_2^2 - 6x_4x_2 + 9x_3^2 + 8x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ66◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -51 & -5 & -52 & -26 & 19 \\ -5 & 12 & 5 & -1 & -3 \\ -52 & 5 & -44 & -25 & 15 \\ -26 & -1 & -25 & -13 & 9 \\ 19 & -3 & 15 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, 2, 6, -5, 16)$ и $(13, 4, 9, -31, 17)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ66◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ67◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_3x_1 + 4x_4x_1 + 2x_2^2 - 2x_3x_2 - 8x_4x_2 + 4x_3^2 + 3x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ67◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 & 9 & -20 & 7 \\ 12 & 29 & 39 & 4 & -9 \\ 9 & 39 & 22 & -5 & -3 \\ -20 & 4 & -5 & 21 & -9 \\ 7 & -9 & -3 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(29, 23, 34, 177, 341)$ и $(61, 46, 71, 366, 697)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ67◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ68◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 3x_2^2 + 4x_3x_2 + 4x_4x_2 - 5x_3^2 - 4x_4x_3 - 9x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ68◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -17 & -31 & 35 & -14 & -7 \\ -31 & -71 & 84 & -36 & -18 \\ 35 & 84 & -102 & 44 & 21 \\ -14 & -36 & 44 & -20 & -11 \\ -7 & -18 & 21 & -11 & -9 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-5, -6, -20, -38, 16)$ и $(23, 15, 68, 140, -61)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ68◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ69◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_4x_1 + 5x_2^2 + 10x_4x_2 + x_3^2 + 4x_4x_3 + 8x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ69◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -18 & 8 & 3 & -7 & -2 \\ 8 & -87 & -15 & 21 & 0 \\ 3 & -15 & 3 & 16 & 5 \\ -7 & 21 & 16 & 20 & 10 \\ -2 & 0 & 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 - 4x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3, 2, 11, 16, -52)$ и $(-18, -23, -86, -151, 475)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ69◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ70◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + 5x_2^2 + 10x_3x_2 - 8x_4x_2 + 4x_3^2 - 10x_4x_3 + 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ70◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 37 & -5 & 22 & -11 & 7 \\ -5 & -11 & -5 & -1 & -2 \\ 22 & -5 & 6 & -3 & 4 \\ -11 & -1 & -3 & 1 & -3 \\ 7 & -2 & 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-8, -13, 18, 32, 27)$ и $(35, 46, -69, -110, -108)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ70◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ71◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 - 2x_4x_1 + 3x_2^2 - 6x_4x_2 - 4x_3^2 + 8x_4x_3 - 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ71◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -5 & 10 & -6 & 6 & -7 \\ 10 & 26 & -8 & 2 & -9 \\ -6 & -8 & 19 & -15 & 15 \\ 6 & 2 & -15 & 12 & -11 \\ -7 & -9 & 15 & -11 & 12 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, 10, -9, 29, 47)$ и $(1, 20, -18, 52, 85)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ71◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ72◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + x_2^2 - 4x_3x_2 + 4x_4x_2 + 9x_3^2 - 12x_4x_3 + 11x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ72◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -14 & -8 & -8 & -5 & 3 \\ -8 & -35 & -24 & 0 & 13 \\ -8 & -24 & -18 & -2 & 9 \\ -5 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 13 & 9 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6, -14, 22, -26, 7)$ и $(-12, 23, -43, 47, -25)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ72◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ73◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_3x_1 + x_2^2 - 4x_3x_2 - 2x_4x_2 + 4x_3^2 + 2x_4x_3 - x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ73◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -63 & 71 & 14 & 18 & -15 \\ 71 & -116 & -21 & -27 & 23 \\ 14 & -21 & -6 & -3 & 4 \\ 18 & -27 & -3 & -8 & 6 \\ -15 & 23 & 4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, -1, 4, 4, -1)$ и $(17, -47, 107, 107, -68)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ73◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ74◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 2x_4x_1 + 3x_2^2 - 2x_3x_2 + 6x_4x_2 - x_3^2 - 6x_4x_3 - 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ74◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 32 & 3 & -16 & 8 & 8 \\ 3 & -14 & 23 & -6 & -3 \\ -16 & 23 & -11 & -1 & 3 \\ 8 & -6 & -1 & 2 & 0 \\ 8 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3, -3, -10, -26, -5)$ и $(9, 3, -11, -28, -34)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ74◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ75◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 + 2x_3x_2 + 2x_3^2 + 8x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ75◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 23 & 26 & 18 & 24 & -8 \\ 26 & 35 & 9 & 23 & -7 \\ 18 & 9 & 9 & 12 & -7 \\ 24 & 23 & 12 & 21 & -9 \\ -8 & -7 & -7 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_5 = 0 \\ -x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(29, -67, -57, 138, 152)$ и $(46, -107, -87, 219, 244)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ75◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ76◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 5x_2^2 - 12x_3x_2 - 12x_4x_2 + 7x_3^2 + 16x_4x_3 + 7x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ76◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & -9 & -4 & -17 & -6 \\ 7 & -4 & -10 & -3 & -3 \\ 1 & -17 & -3 & -43 & -14 \\ 2 & -6 & -3 & -14 & -5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6, 2, -13, -26, 81)$ и $(-21, -17, 55, 101, -303)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ76◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ77◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_3x_1 - x_2^2 + 4x_4x_2 - 4x_4x_3 - 9x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ77◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -81 & -23 & -26 & -4 & -3 \\ -23 & -30 & -27 & -15 & -9 \\ -26 & -27 & -27 & -14 & -9 \\ -4 & -15 & -14 & -8 & -4 \\ -3 & -9 & -9 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, -1, -3, 10, -5)$ и $(26, -65, -48, 278, -169)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ77◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ78◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 - 2x_3x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4x_3.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ78◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -37 & -30 & 19 & -6 & -3 \\ -30 & -13 & 21 & -9 & -6 \\ 19 & 21 & -4 & 8 & 1 \\ -6 & -9 & 8 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(10, 7, 38, -40, 131)$ и $(-28, -37, -146, 154, -524)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ78◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ79◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 4x_4x_1 + 5x_2^2 - 6x_3x_2 + 12x_4x_2 + x_3^2 - 12x_4x_3 + 3x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ79◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -2 & -10 & -5 & -13 & -8 \\ -10 & 11 & 8 & 2 & 3 \\ -5 & 8 & 9 & 12 & 7 \\ -13 & 2 & 12 & 14 & 6 \\ -8 & 3 & 7 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-2, -6, -3, -10, 26)$ и $(26, 36, 36, 67, -185)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ79◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ80◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 + 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 8x_3x_2 - 6x_4x_2 - x_3^2 + 6x_4x_3 - 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ80◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -25 & -32 & -26 & -6 & -6 \\ -32 & -154 & -129 & -19 & -28 \\ -26 & -129 & -108 & -17 & -24 \\ -6 & -19 & -17 & -5 & -5 \\ -6 & -28 & -24 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + x_5 = 0 \\ -2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, 1, -3, -6, 12)$ и $(8, 11, -42, -93, 186)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ80◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ81◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 2x_2^2 + 2x_3x_2 + 6x_4x_2 + 6x_3^2 + 2x_4x_3 + 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ81◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 & -3 & 2 \\ 0 & -27 & -8 & -13 & 4 \\ -6 & -8 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -13 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(4, -4, 3, 6, 3)$ и $(-22, 13, -9, -21, 6)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ81◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ82◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 + 2x_3x_1 + 2x_4x_1 + 2x_2^2 - 4x_3x_2 - 6x_4x_2 + x_3^2 + 2x_4x_3.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ82◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 10 & 21 & 7 & 6 & 8 \\ 21 & 8 & -2 & 2 & 4 \\ 7 & -2 & -6 & -3 & -2 \\ 6 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-1, 0, -1, 0, 3)$ и $(34, 21, 85, 30, -195)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ82◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ83◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 2x_3x_1 - 2x_4x_1 + 3x_2^2 + 4x_3x_2 - 6x_4x_2 - 2x_4x_3 - x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ83◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -3 & -13 & 28 & 6 & -7 \\ -13 & 40 & -27 & -9 & 8 \\ 28 & -27 & -16 & -2 & 0 \\ 6 & -9 & -2 & 2 & 1 \\ -7 & 8 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(15, -19, 77, -154, 206)$ и $(21, -26, 109, -218, 286)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ83◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ84◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 + 4x_3x_1 - 2x_4x_1 + 2x_2^2 + 4x_3x_2 + 2x_4x_2 + 5x_3^2 - 8x_4x_3 + 8x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ84◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -2 & 13 & -3 & -4 & -1 \\ 13 & -101 & -7 & 34 & -1 \\ -3 & -7 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & 34 & 5 & -12 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ -4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3, -4, -14, -15, 43)$ и $(0, -5, -10, -15, 26)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ84◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ85◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 2x_3x_1 - 4x_4x_1 + 5x_2^2 + 2x_3x_2 - 6x_4x_2 + x_3^2 - 2x_4x_3.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ85◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -37 & 2 & 27 & -8 & -11 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 27 & -1 & -34 & 5 & 13 \\ -8 & 2 & 5 & -1 & -3 \\ -11 & -1 & 13 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(9, -8, -11, -30, -38)$ и $(-42, 29, 50, 138, 167)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ85◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ86◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 3x_2^2 - 2x_3x_2 - 2x_4x_2 - x_3^2 - 2x_4x_3 - 6x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ86◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -3 & -11 & 11 & 1 & -2 \\ -11 & 8 & -10 & -6 & 9 \\ 11 & -10 & 1 & 9 & -8 \\ 1 & -6 & 9 & 1 & -3 \\ -2 & 9 & -8 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(2, -2, 0, -3, 3)$ и $(4, -1, 3, 6, 15)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ86◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ87◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 5x_2^2 - 6x_3x_2 - 4x_4x_2 + 6x_3^2 - 2x_4x_3 + 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ87◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 3 & -22 & -8 & -1 & -2 \\ -22 & 66 & -17 & 21 & 15 \\ -8 & -17 & -34 & 12 & 4 \\ -1 & 21 & 12 & -1 & 1 \\ -2 & 15 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(1, 7, -11, -14, -22)$ и $(-4, -28, 47, 71, 70)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ87◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ88◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 5x_2^2 - 12x_3x_2 + 7x_3^2 - 2x_4x_3 - 2x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ88◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 4 & -1 & 3 \\ 9 & -121 & -9 & -12 & -18 \\ 4 & -9 & -49 & 23 & -17 \\ -1 & -12 & 23 & -13 & 6 \\ 3 & -18 & -17 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -9x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(5, -9, 22, 54, 15)$ и $(10, -33, 80, 198, 57)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ88◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ89◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_3x_1 - 2x_4x_1 + 6x_3x_2 + 2x_4x_2 - 4x_3^2 - 2x_4x_3 - 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ89◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -85 & -6 & 10 & 2 & 21 \\ -6 & -37 & -1 & 13 & 3 \\ 10 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 13 & 0 & -5 & -1 \\ 21 & 3 & -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6, 10, -25, 20, 38)$ и $(6, 11, -32, 22, 40)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ89◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ90◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 + 4x_4x_1 + 5x_2^2 + 8x_4x_2 + x_3^2 - 2x_4x_3 + 4x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ90◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -5 & 13 & 3 & 7 & 6 \\ 13 & -20 & 17 & 2 & -2 \\ 3 & 17 & 10 & 9 & 6 \\ 7 & 2 & 9 & 5 & 3 \\ 6 & -2 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ -6x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-4, 1, 13, -35, 30)$ и $(19, -16, -82, 230, -174)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ90◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ91◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_3x_1 + x_2^2 - 4x_4x_2 + 3x_3^2 + 3x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ91◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 & -25 & 16 & -9 \\ -6 & 14 & 19 & -15 & 9 \\ -25 & 19 & 5 & -9 & 9 \\ 16 & -15 & -9 & 10 & -8 \\ -9 & 9 & 9 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(0, 0, 1, 2, 0)$ и $(-24, 0, 29, -5, -87)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ91◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ92◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_3x_1 - 2x_4x_1 - x_3^2 + 4x_4x_3 - 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ92◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -26 & -2 & 19 & 25 & -8 \\ -2 & -33 & 6 & -17 & 4 \\ 19 & 6 & -18 & -19 & 7 \\ 25 & -17 & -19 & -38 & 12 \\ -8 & 4 & 7 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -4x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ -3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(-1, 1, 2, -1, 3)$ и $(-2, -7, -17, 4, -21)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ92◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ93◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 - 4x_3x_1 - 4x_4x_1 + 2x_2^2 - 4x_3x_2 - 8x_4x_2 + 5x_3^2 + 12x_4x_3 + 11x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ93◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -51 & 19 & 4 & 7 & 6 \\ 19 & -17 & 10 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & -12 & -6 & -7 \\ 7 & 2 & -6 & -4 & -4 \\ 6 & 3 & -7 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(6, 13, 7, -27, 33)$ и $(-30, -73, -43, 159, -180)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ93◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ94◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2x_1 - 4x_3x_1 + 2x_4x_1 + 2x_2^2 - 2x_4x_2 + 7x_3^2 - 8x_4x_3.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ94◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 29 & 28 & 7 & -6 & -12 \\ 28 & 13 & 15 & -10 & -12 \\ 7 & 15 & -2 & 0 & -3 \\ -6 & -10 & 0 & -1 & 3 \\ -12 & -12 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7, 9, 20, 6, 47)$ и $(-16, -21, -50, -21, -107)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ94◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ95◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 4x_2x_1 - 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 3x_2^2 - 12x_3x_2 + 10x_4x_2 - x_3^2 - 2x_4x_3 + x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ95◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -33 & -45 & 44 & 12 & -4 \\ -45 & 53 & 1 & -29 & -25 \\ 44 & 1 & -27 & 8 & 15 \\ 12 & -29 & 8 & 14 & 9 \\ -4 & -25 & 15 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 - 6x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(9, -18, -17, 0, -55)$ и $(-9, 3, -7, 15, 4)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ95◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ96◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_3x_1 - 4x_4x_1 + x_2^2 - 4x_4x_2 + 2x_3^2 + 2x_4x_3 + 8x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ96◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -30 & 39 & 42 & -5 & 9 \\ 39 & -65 & -32 & -1 & -5 \\ 42 & -32 & -149 & 34 & -34 \\ -5 & -1 & 34 & -9 & 8 \\ 9 & -5 & -34 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(7, 15, -30, -66, 60)$ и $(-25, -63, 126, 282, -243)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ96◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ97◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 2x_4x_1 + 5x_2^2 - 2x_4x_2 - x_3^2 + 4x_4x_3 - 3x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ97◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -126 & -40 & -1 & 89 & -32 \\ -40 & -14 & 3 & 22 & -8 \\ -1 & 3 & -4 & 7 & -3 \\ 89 & 22 & 7 & -81 & 30 \\ -32 & -8 & -3 & 30 & -11 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(15, -37, -9, -33, -104)$ и $(-30, 79, 27, 84, 251)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ97◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ98◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_4x_1 + 3x_2^2 - 10x_3x_2 - 8x_4x_2 + 2x_3^2 + 8x_4x_3 + 3x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ98◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -10 & 1 & 1 & -9 & -10 \\ 1 & -11 & -9 & -11 & -5 \\ 1 & -9 & -4 & -9 & -5 \\ -9 & -11 & -9 & -13 & -8 \\ -10 & -5 & -5 & -8 & -6 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3, -8, -7, 27, -30)$ и $(0, -1, -5, 12, -12)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ98◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ99◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_3x_2 - 2x_4x_2 + 5x_3^2 + 5x_4^2.$$

- а) Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- б) Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- в) Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ99◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- а) Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

- б) Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(3, 4, 6, -1, 9)$ и $(6, 5, 6, -5, 12)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ99◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 < 0, \Delta_7 < 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?

ОГ100◊1. В стандартных координатах на \mathbb{R}^4 задана квадратичная форма

$$q(x) = x_1^2 + 2x_3x_1 - 4x_4x_1 + x_2^2 - 2x_3x_2 + 2x_4x_2 + x_3^2 - 2x_4x_3.$$

- Найдите для этой формы какой-нибудь ортогональный базис; явно напишите матрицу Грама A формы q в стандартном базисе \mathbb{R}^4 ; явно напишите такую матрицу C , что матрица $C^t \cdot A \cdot C$ диагональна и проверьте ответ прямым вычислением.
- Найдите размерность максимального изотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.
- Найдите размерность максимального анизотропного подпространства формы q и укажите одно из таких подпространств, задав в нём какой-нибудь явный базис.

ОГ100◊2. Симметричная билинейная форма β на \mathbb{R}^5 имеет в матрицу Грама

$$\begin{bmatrix} -106 & -33 & 43 & -29 & -28 \\ -33 & -13 & 7 & -1 & -6 \\ 43 & 7 & -39 & 36 & 20 \\ -29 & -1 & 36 & -38 & -18 \\ -28 & -6 & 20 & -18 & -11 \end{bmatrix}$$

- Найдите ранг и сигнатуру ограничения β на пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \\ -8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

- Напишите уравнение гиперплоскости, ортогональное отражение в которой переводит друг в друга прямые с направляющими векторами $(13, 8, -18, 26, -113)$ и $(-22, -11, 30, -44, 188)$, а также найдите ортогональные проекции этих векторов на эту гиперплоскость (ортогональность всюду понимается в смысле формы β).

ОГ100◊3. Существует ли на \mathbb{R}^7 квадратичная форма с главными угловыми минорами

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 = 0, \Delta_6 > 0, \Delta_7 > 0?$$

Если да, то какую сигнатуру может иметь эта форма?