ЕГ1◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 0, 2, 0)$, $e_2 = (-1, 1, -2, -1)$, $e_3 = (2, 0, -2, -1)$, $e_4 = (0, -1, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (13, -4, 8, 1)$ в этом базисе.

ЕГ1◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-2, 2, 1, 3)\ , \quad u_2 = (1, -2, -3, 0)\ , \quad u_3 = (-1, 3, 4, 0)$$
$$u_4 = (1, -4, -2, -3)\ , \quad u_5 = (-1, 2, 2, 1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (2, -4, 3, -5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ1◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 729 & 162 & -405 \\ 162 & 1800 & -90 \\ -405 & -90 & 1989 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ1◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(0, 5, -2, -2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1, 4, -3, -1)$, $(1, 5, -3, -1)$, $(1, 5, -3, 0)$ и $(2, 4, -1, -1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ1◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{14} & \frac{18+\sqrt{42}}{28} & \frac{-6+3\sqrt{42}}{28} \\ \frac{18-\sqrt{42}}{28} & \frac{13}{28} & \frac{-9-2\sqrt{42}}{28} \\ \frac{-6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-9+2\sqrt{42}}{28} & \frac{-11}{28} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}-4}{14} & \frac{-6\sqrt{2}+12-2\sqrt{7}}{28} & \frac{-2\sqrt{2}+4+6\sqrt{7}}{28} \\ \frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{-5\sqrt{2}-18}{28} & \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{-2\sqrt{2}-6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{-13\sqrt{2}-2}{28} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} & \frac{12+5\sqrt{3}}{54} & \frac{\sqrt{3}+5}{9} \\ \frac{-4\sqrt{3}-11}{18} & \frac{15-8\sqrt{3}}{54} & \frac{-\sqrt{3}+1}{9} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-3-5\sqrt{3}}{27} & \frac{4\sqrt{3}-1}{9} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-8}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{2+\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{3}-1}{5} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ2◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, -2, 0, -2)$, $e_2 = (-2, 0, 1, -1)$, $e_3 = (-2, -1, 1, 0)$, $e_4 = (1, -1, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (1, 3, 0, 1)$ в этом базисе.

ЕГ2◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, 1, 0, -1)\ , \quad u_2 = (-1, 1, 2, -2)\ , \quad u_3 = (-4, 0, 4, 2)$$
$$u_4 = (2, 0, -2, -3)\ , \quad u_5 = (2, 2, 0, 6)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0, 5, -3, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ2◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 125 & 5 & -75 \\ 5 & 65 & -15 \\ -75 & -15 & 225 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ2◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, 5, 2, 4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, 5, 2, 4)$, $(2, 6, 2, 4)$, $(0, 5, 1, 6)$ и $(0, 6, 1, 5)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ2◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{2}-1}{9} & \frac{-2\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-\sqrt{2}+8}{18} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-7\sqrt{2}+8}{18} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}+1}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{15} & \frac{2+\sqrt{3}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{-\sqrt{3}-2}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{30} & \frac{\sqrt{3}-8}{10} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}-1}{9} & \frac{-\sqrt{3}-5}{9} & \frac{\sqrt{3}-1}{9} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{9} & \frac{5\sqrt{3}-8}{18} & \frac{4\sqrt{3}+11}{18} \\ \frac{\sqrt{3}+5}{9} & \frac{4\sqrt{3}+5}{18} & \frac{5\sqrt{3}-8}{18} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}+1}{9} & \frac{4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-2\sqrt{2}-2}{9} \\ \frac{-2\sqrt{2}-2}{9} & \frac{5\sqrt{2}+8}{18} & \frac{-7\sqrt{2}+8}{18} \\ \frac{4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-\sqrt{2}+8}{18} & \frac{5\sqrt{2}+8}{18} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ3◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 1, 2, 0)$, $e_2 = (0, -2, 0, -1)$, $e_3 = (2, 0, 1, 0)$, $e_4 = (1, -2, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-7, -11, -1, -6)$ в этом базисе.

ЕГ3◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2, 1, -2, -1)\ , \quad u_2 = (0, 1, -4, -1)\ , \quad u_3 = (-2, 0, -1, -1)$$
$$u_4 = (4, 2, -2, -4)\ , \quad u_5 = (2, 0, 2, 0)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0, 6, -3, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ3◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 464 & -544 & 256 \\ -544 & 1040 & -320 \\ 256 & -320 & 320 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ3◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5, 4, -5, -3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(6, 3, -6, -4)$, $(5, 3, -6, -4)$, $(7, 4, -5, -4)$ и $(4, 6, -4, -2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ3◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}-1}{11} & \frac{3\sqrt{3}+6-\sqrt{11}}{22} & \frac{\sqrt{3}+2+3\sqrt{11}}{22} \\ \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{11}+6}{22} & \frac{\sqrt{3}-9}{11} & \frac{-3\sqrt{3}-6+\sqrt{11}}{22} \\ \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{11}+2}{22} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{11}-6}{22} & \frac{5\sqrt{3}-1}{11} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+1}{11} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{22}+6}{22} & \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{22}-2}{22} \\ \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{22}+6}{22} & \frac{\sqrt{2}+9}{11} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{22}-6}{22} \\ \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{22}-2}{22} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{22}-6}{22} & \frac{5\sqrt{2}+1}{11} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{6}}{8} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{-\sqrt{6}}{8} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ4◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, 2, -2, 1)$, $e_2 = (1, -1, 0, -1)$, $e_3 = (0, -1, 1, -1)$, $e_4 = (-1, 2, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 2-ю координаты вектора $v = (5, 2, -2, 0)$ в этом базисе.

ЕГ4◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -1, 0, 0)\,, \quad u_2 = (2, -3, -1, 0)\,, \quad u_3 = (-4, 1, 2, 0)$$
$$u_4 = (6, 0, -2, -2)\,, \quad u_5 = (1, -1, -1, 1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (1, -2, 1, -5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ4◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 125 & 5 & -75 \\ 5 & 65 & -15 \\ -75 & -15 & 225 \end{pmatrix}\,.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ4◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3, 1, 5, 5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-2, 0, 5, 5)$, $(-3, 1, 5, 6)$, $(-3, 0, 5, 6)$ и $(-1, 0, 4, 6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ4◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}+8}{34} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{34}+6}{17} & \frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{34}-8}{34} \\ \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{34}+6}{17} & \frac{4\sqrt{2}+9}{17} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{34}-6}{17} \\ \frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{34}-8}{34} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{34}-6}{17} & \frac{13\sqrt{2}+8}{34} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{21\sqrt{6}}{68} & \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{102}}{17} & \frac{-4+3\sqrt{51}}{34} \\ \frac{-3\sqrt{6}+3\sqrt{34}}{34} & \frac{13\sqrt{2}}{17} & \frac{3+\sqrt{51}}{17} \\ \frac{-4\sqrt{6}-9\sqrt{34}}{68} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{102}}{17} & \frac{21}{34} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ5◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 1, 1, -1)$, $e_2 = (2, 0, -1, 2)$, $e_3 = (1, -1, 0, 2)$, $e_4 = (-2, 2, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 3-ю координаты вектора $v = (1, 5, 1, 0)$ в этом базисе.

ЕГ5◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-2, -4, 1, 3)\ , \quad u_2 = (-2, -2, -1, 1)\ , \quad u_3 = (-4, -4, 0, 2)$$
$$u_4 = (8, 0, 6, 4)\ , \quad u_5 = (2, -2, 3, 3)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-2, 3, -2, 5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ5◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 729 & 162 & -405 \\ 162 & 1800 & -90 \\ -405 & -90 & 1989 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ5◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(4, -2, 1, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4, -1, 1, -1)$, $(3, -3, 2, 1)$, $(4, -2, 2, -1)$ и $(4, -1, 1, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ5◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{6}}{19} & \frac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{114}}{38} & \frac{-3+3\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-3\sqrt{6}+9\sqrt{38}}{76} & \frac{14\sqrt{2}}{19} & \frac{9+\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-3\sqrt{6}-9\sqrt{38}}{76} & \frac{9\sqrt{2}-\sqrt{114}}{38} & \frac{14}{19} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3\sqrt{10}}{10} & 0 & \frac{-\sqrt{10}}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-6}{11} & \frac{1-3\sqrt{33}}{22} & \frac{3+\sqrt{33}}{22} \\ \frac{1+3\sqrt{33}}{22} & \frac{-6}{11} & \frac{-3+\sqrt{33}}{22} \\ \frac{3-\sqrt{33}}{22} & \frac{-3-\sqrt{33}}{22} & \frac{-10}{11} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{6}-\sqrt{3}}{57} & \frac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{38}-6}{38} & \frac{-6\sqrt{3}+6\sqrt{57}-6\sqrt{6}}{76} \\ \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{114}-2\sqrt{3}}{38} & \frac{5\sqrt{2}-9}{19} & \frac{-18\sqrt{3}-2\sqrt{57}-18\sqrt{6}}{76} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{114}+2\sqrt{3}}{38} & \frac{9\sqrt{2}-\sqrt{38}+18}{38} & \frac{-10\sqrt{3}+9\sqrt{6}}{38} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ6◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, 0, -1, -2)$, $e_2 = (0, 2, 2, 0)$, $e_3 = (0, -2, -2, 2)$, $e_4 = (-2, 0, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 3-ю координаты вектора $v = (2, -14, -13, 10)$ в этом базисе.

ЕГ6◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -6, -5, -2)\ , \quad u_2 = (0, 2, 1, 0)\ , \quad u_3 = (-2, -4, -2, 0)$$
$$u_4 = (-1, 8, 7, 3)\ , \quad u_5 = (3, 0, -2, -2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (5, -1, 1, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ6◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 272 & -88 & 104 \\ -88 & 200 & -40 \\ 104 & -40 & 296 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ6◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5, 5, -5, -4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, 6, -4, -4)$, $(-6, 6, -3, -4)$, $(-6, 7, -4, -3)$ и $(-5, 7, -5, -3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ6◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{6}-2}{6} & \frac{-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-2\sqrt{6}+1}{6} \\ \frac{\sqrt{6}-2}{6} & \frac{2\sqrt{6}+1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-9}{10} & \frac{-\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{18} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-4\sqrt{3}+6\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24} \\ \frac{-2\sqrt{6}+6-4\sqrt{3}}{36} & \frac{5\sqrt{2}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}-12\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{24} \\ \frac{2\sqrt{6}+6+4\sqrt{3}}{36} & \frac{\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2}{12} & \frac{-10\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{24} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}-8}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{2-\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{-2\sqrt{3}-1}{5} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ7◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (0,2,-1,-1)$, $e_2 = (0,0,-1,1)$, $e_3 = (-1,0,1,0)$, $e_4 = (1,-1,2,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-1,4,-11,2)$ в этом базисе.

ЕГ7◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0,2,-1,3)\ ,\quad u_2 = (-1,-2,0,-2)\ ,\quad u_3 = (2,10,-3,7)$$
$$u_4 = (1,-2,2,-2)\ ,\quad u_5 = (-2,0,-2,2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-5,1,-1,1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ7◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 45 & -9 & 27 \\ -9 & 585 & -27 \\ 27 & -27 & 81 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ7◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3,-2,0,4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4,0,-1,3)$, $(-3,-1,1,6)$, $(-1,-2,0,3)$ и $(-1,-2,1,5)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ7◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-5}{9} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{1+3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1+3\sqrt{3}}{9} & \frac{-13}{18} & \frac{-4+3\sqrt{3}}{18} \\ \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{-13}{18} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{6}-\sqrt{3}}{27} & \frac{-4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{9} \\ \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{27} & \frac{5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-14\sqrt{3}-8\sqrt{6}}{36} \\ \frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{27} & \frac{\sqrt{2}+8}{18} & \frac{-10\sqrt{3}+8\sqrt{6}}{36} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}-1}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{2-\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{3}-8}{10} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}+1}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{3}-2}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{3}-2}{5} & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{3}+8}{10} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ8◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2,-1,0,0)$, $e_2 = (-1,1,-1,-1)$, $e_3 = (-2,2,0,-2)$, $e_4 = (0,2,-2,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-5,-4,3,1)$ в этом базисе.

ЕГ8◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (5,-1,-3,-5)\ , \quad u_2 = (-4,2,7,3)\ , \quad u_3 = (-6,2,7,5)$$
$$u_4 = (-4,2,6,4)\ , \quad u_5 = (-1,1,4,0)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0,-1,1,-2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ8◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 1458 & -162 & -486 \\ -162 & 666 & -90 \\ -486 & -90 & 450 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ8◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(0,-4,5,5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1,-4,6,6)$, $(2,-5,6,7)$, $(1,-4,6,5)$ и $(0,-3,5,6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ8◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{42} & \frac{-2\sqrt{2}-6\sqrt{7}-4}{28} & \frac{-12\sqrt{3}+2\sqrt{42}-12\sqrt{6}}{56} \\ \frac{-2\sqrt{6}+6\sqrt{21}-4\sqrt{3}}{84} & \frac{13\sqrt{2}-2}{28} & \frac{-6\sqrt{3}-4\sqrt{42}-6\sqrt{6}}{56} \\ \frac{6\sqrt{6}+2\sqrt{21}+12\sqrt{3}}{84} & \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{7}+6}{28} & \frac{-10\sqrt{3}+18\sqrt{6}}{56} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-4}{14} & \frac{-2\sqrt{3}+4-3\sqrt{14}}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+12+\sqrt{14}}{28} \\ \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{-13\sqrt{3}-2}{28} & \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{14}-6}{28} \\ \frac{-6\sqrt{3}-\sqrt{14}+12}{28} & \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{14}-6}{28} & \frac{-5\sqrt{3}-18}{28} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}+4}{14} & \frac{2\sqrt{3}-4+3\sqrt{14}}{28} & \frac{6\sqrt{3}-12-\sqrt{14}}{28} \\ \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{14}-4}{28} & \frac{13\sqrt{3}+2}{28} & \frac{-3\sqrt{3}-2\sqrt{14}+6}{28} \\ \frac{6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} & \frac{-3\sqrt{3}+2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{5\sqrt{3}+18}{28} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{26+8\sqrt{2}}{34} & \frac{-3\sqrt{34}+4\sqrt{2}-8}{34} & \frac{-\sqrt{102}-3\sqrt{6}+6\sqrt{3}}{51} \\ \frac{6\sqrt{17}+8-8\sqrt{2}}{34} & \frac{13\sqrt{2}+8}{34} & \frac{-\sqrt{102}+3\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{51} \\ \frac{-2\sqrt{17}+6-6\sqrt{2}}{17} & \frac{-\sqrt{34}-3\sqrt{2}+6}{17} & \frac{-9\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{51} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ9◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (2,-2,2,-2)$, $e_2 = (2,-1,-1,-2)$, $e_3 = (2,-1,1,0)$, $e_4 = (-2,0,-1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 3-ю координаты вектора $v = (-10,1,6,11)$ в этом базисе.

ЕГ9◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2,-2,1,4)\,,\quad u_2 = (-6,2,-5,-4)\,,\quad u_3 = (-4,-2,-1,-4)$$
$$u_4 = (6,0,4,4)\,,\quad u_5 = (-4,0,-2,-4)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0,-2,2,-1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ9◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 125 & 5 & -75 \\ 5 & 65 & -15 \\ -75 & -15 & 225 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ9◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4,4,3,5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3,6,4,5)$, $(-3,3,3,4)$, $(-4,6,4,5)$ и $(-4,6,5,6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ9◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} \\ \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}+9}{17} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{13\sqrt{3}+8}{34} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}+2}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{2-2\sqrt{2}}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{12} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{13}{18} & \frac{-1+3\sqrt{3}}{9} & \frac{-4-3\sqrt{3}}{18} \\ \frac{-3\sqrt{3}-1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1-3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{-4+3\sqrt{3}}{18} & \frac{3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ10◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1,0,0,-1)$, $e_2 = (-2,-1,-1,0)$, $e_3 = (2,-2,1,2)$, $e_4 = (0,-2,0,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-12,3,-6,-7)$ в этом базисе.

ЕГ10◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0,2,2,0)\ , \quad u_2 = (1,2,0,-1)\ , \quad u_3 = (-1,0,3,2)$$
$$u_4 = (0,2,3,1)\ , \quad u_5 = (-1,-6,-2,3)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-4,3,-3,0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ10◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 425 & 5 & -75 \\ 5 & 1025 & -15 \\ -75 & -15 & 225 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ10◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5,0,1,-3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-5,0,0,-4)$, $(-6,1,3,-2)$, $(-5,0,2,-3)$ и $(-4,0,2,-2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ10◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{10+\sqrt{2}}{11} & \frac{-3\sqrt{22}+\sqrt{2}-2}{22} & \frac{-\sqrt{66}-3\sqrt{6}+6\sqrt{3}}{66} \\ \frac{6\sqrt{11}+2-2\sqrt{2}}{22} & \frac{5\sqrt{2}+1}{11} & \frac{-\sqrt{66}+3\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{66} \\ \frac{-2\sqrt{11}+6-6\sqrt{2}}{22} & \frac{-\sqrt{22}-3\sqrt{2}+6}{22} & \frac{-9\sqrt{3}-\sqrt{6}}{33} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{10}{19} & \frac{3+3\sqrt{57}}{38} & \frac{-3+3\sqrt{57}}{38} \\ \frac{3-3\sqrt{57}}{38} & \frac{14}{19} & \frac{-9-\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-3-3\sqrt{57}}{38} & \frac{-9+\sqrt{57}}{38} & \frac{14}{19} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{19} & \frac{3-3\sqrt{19}}{19} & \frac{3+3\sqrt{19}}{19} \\ \frac{3+3\sqrt{19}}{19} & \frac{-9}{19} & \frac{\sqrt{19}-9}{19} \\ \frac{3-3\sqrt{19}}{19} & \frac{-\sqrt{19}-9}{19} & \frac{-9}{19} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{8}{19} & \frac{9\sqrt{6}+9\sqrt{38}}{76} & \frac{-9\sqrt{2}+3\sqrt{114}}{38} \\ \frac{-9+3\sqrt{57}}{38} & \frac{2\sqrt{6}}{19} & \frac{-27\sqrt{2}-\sqrt{114}}{38} \\ \frac{9+3\sqrt{57}}{38} & \frac{-27\sqrt{6}+3\sqrt{38}}{76} & \frac{4\sqrt{2}}{19} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ11◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (1,0,-2,1)$, $e_3 = (-2,-1,2,1)$, $e_4 = (2,-1,1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (12,2,-10,0)$ в этом базисе.

ЕГ11◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (5,2,1,-4)\ ,\quad u_2 = (2,2,2,-4)\ ,\quad u_3 = (3,0,-1,0)$$
$$u_4 = (3,-1,-1,4)\ ,\quad u_5 = (-4,-1,-2,-1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-2,2,-2,0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ11◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ11◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1,3,4,-1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1,2,4,0)$, $(3,4,4,1)$, $(1,2,5,0)$ и $(0,3,4,0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ11◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{4\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{2}-1}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{2\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{7\sqrt{2}-8}{18} \\ \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}+2}{28} & \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{14}-4}{28} \\ \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{-5\sqrt{3}+18}{28} & \frac{-6\sqrt{3}-\sqrt{14}-12}{28} \\ \frac{-2\sqrt{3}-3\sqrt{14}-4}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} & \frac{-5\sqrt{3}+4}{14} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ12◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, -2, -1, 1)$, $e_2 = (-1, -1, 0, 1)$, $e_3 = (1, 2, 0, -1)$, $e_4 = (2, 0, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (10, 10, -6, -10)$ в этом базисе.

ЕГ12◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-2, -1, 1, 0)\ , \quad u_2 = (-2, 4, 2, -4)\ , \quad u_3 = (-2, 0, -3, -2)$$
$$u_4 = (0, 1, -4, -2)\ , \quad u_5 = (8, 10, 0, -4)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0, -3, 5, -1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ12◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ12◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, -4, 0, 2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, -3, 1, 3)$, $(-5, -2, -1, 2)$, $(-5, -3, -1, 1)$ и $(-5, -2, 2, 3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ12◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{-\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{-9+\sqrt{51}+6\sqrt{3}}{51} & \frac{-4\sqrt{3}-3\sqrt{17}+8}{34} \\ \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-12-9\sqrt{3}}{51} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{9+\sqrt{51}-6\sqrt{3}}{51} & \frac{-13\sqrt{3}-8}{34} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{5}{34} & \frac{9-\sqrt{51}}{17} & \frac{12+3\sqrt{51}}{34} \\ \frac{9+\sqrt{51}}{17} & \frac{-5}{17} & \frac{-9+\sqrt{51}}{17} \\ \frac{12-3\sqrt{51}}{34} & \frac{-9-\sqrt{51}}{17} & \frac{5}{34} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ13⋄1. Образуют ли векторы $e_1 = (1,-2,-2,0)$, $e_2 = (-1,0,0,1)$, $e_3 = (1,-1,1,-1)$, $e_4 = (-1,-1,0,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (-8,-4,-11,11)$ в этом базисе.

ЕГ13⋄2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (4,-1,2,3)\ , \quad u_2 = (0,0,3,0)\ , \quad u_3 = (-2,-1,-1,-3)$$
$$u_4 = (3,-1,3,2)\ , \quad u_5 = (4,-4,5,0)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-5,3,-1,1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ13⋄3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 45 & -9 & 27 \\ -9 & 585 & -27 \\ 27 & -27 & 81 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ13⋄4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(0,2,-1,-1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1,3,0,-1)$, $(0,3,-2,1)$, $(0,2,1,0)$ и $(0,2,0,0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ13⋄5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}+1}{11} & \frac{-3+3\sqrt{33}+2\sqrt{3}}{66} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{11}+6}{22} \\ \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{11}-2}{22} & \frac{-15-\sqrt{3}}{33} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}-6}{22} \\ \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}-6}{22} & \frac{9+\sqrt{33}-6\sqrt{3}}{66} & \frac{-\sqrt{3}-9}{11} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}+2}{20} & \frac{6\sqrt{5}}{20} & \frac{3\sqrt{2}-6}{20} \\ \frac{-6\sqrt{5}}{20} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-2\sqrt{5}}{20} \\ \frac{3\sqrt{2}-6}{20} & \frac{2\sqrt{5}}{20} & \frac{\sqrt{2}+18}{20} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{-3\sqrt{30}}{20} & \frac{9}{20} \\ \frac{3\sqrt{30}}{20} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{30}}{20} \\ \frac{9}{20} & \frac{-\sqrt{30}}{20} & \frac{-17}{20} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{22} & \frac{3\sqrt{22}-\sqrt{2}}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{-3\sqrt{66}-\sqrt{6}}{22} & \frac{\sqrt{2}}{11} & \frac{-\sqrt{11}+3}{11} \\ \frac{\sqrt{66}-3\sqrt{6}}{22} & \frac{\sqrt{22}+3\sqrt{2}}{11} & \frac{9}{11} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ14◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2,-1,-1,1)$, $e_2 = (-2,-2,-1,1)$, $e_3 = (0,0,1,1)$, $e_4 = (2,1,0,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 4-ю координаты вектора $v = (12,12,7,-2)$ в этом базисе.

ЕГ14◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1,7,3,-2)\ ,\quad u_2 = (2,3,-1,4)\ ,\quad u_3 = (-1,3,3,-6)$$
$$u_4 = (-1,-4,-1,0)\ ,\quad u_5 = (3,4,-2,6)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (2,-1,5,0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ14◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 32 \\ -16 & 1040 & -64 \\ 32 & -64 & 272 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ14◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5,-1,4,0)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(6,-1,4,0)$, $(6,0,4,1)$, $(7,-1,3,1)$ и $(4,-1,6,1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ14◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+4}{14} & \frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}-4}{28} \\ \frac{-6\sqrt{2}-2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{5\sqrt{2}+18}{28} & \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{7}-4}{28} & \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{13\sqrt{2}+2}{28} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{18-\sqrt{42}}{28} & \frac{6+3\sqrt{42}}{28} \\ \frac{18+\sqrt{42}}{28} & \frac{-13}{28} & \frac{-9+2\sqrt{42}}{28} \\ \frac{6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-9-2\sqrt{42}}{28} & \frac{11}{28} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{6}}{9} & \frac{-\sqrt{2}}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-7\sqrt{6}}{18} & \frac{4\sqrt{2}}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{2\sqrt{6}}{9} & \frac{8\sqrt{2}}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-13}{18} & \frac{4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{1+3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{4+3\sqrt{3}}{18} & \frac{-13}{18} & \frac{-1+3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1-3\sqrt{3}}{9} & \frac{-1-3\sqrt{3}}{9} & \frac{-5}{9} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ15◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 2, -1, 0)$, $e_2 = (0, -1, 2, 0)$, $e_3 = (2, 2, 2, 2)$, $e_4 = (-1, -1, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-9, -11, -1, -4)$ в этом базисе.

ЕГ15◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, -6, 4, -1)\ , \quad u_2 = (0, 1, -1, 0)\ , \quad u_3 = (-2, 0, 1, -1)$$
$$u_4 = (-3, 0, 0, -3)\ , \quad u_5 = (2, 2, 0, 4)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-3, 5, -6, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ15◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 125 & -75 & 5 \\ -75 & 225 & -15 \\ 5 & -15 & 65 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ15◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, -3, -1, -3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, -3, 1, -4)$, $(3, -1, 0, -1)$, $(1, -3, 1, -4)$ и $(1, -2, -2, -2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ15◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3-6\sqrt{2}}{12} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{4} & \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

б) $$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{18} & \frac{8\sqrt{2}}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{-2\sqrt{6}}{9} & \frac{4\sqrt{2}}{9} & \frac{-7}{9} \\ \frac{-4\sqrt{6}}{9} & \frac{-\sqrt{2}}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

в) $$\begin{pmatrix} \frac{-7}{12} & \frac{1-6\sqrt{2}}{12} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{1+6\sqrt{2}}{12} & \frac{-7}{12} & \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-5}{6} \end{pmatrix}$$

г) $$\begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{2}+1}{9} & \frac{4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{2\sqrt{2}-2}{9} \\ \frac{-2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-5\sqrt{2}+8}{18} & \frac{-7\sqrt{2}-8}{18} \\ \frac{-4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-5\sqrt{2}+8}{18} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ16◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, -1, -2, 2)$, $e_2 = (1, 2, 1, 2)$, $e_3 = (-1, -1, -2, 2)$, $e_4 = (2, 0, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-2, -5, -6, 5)$ в этом базисе.

ЕГ16◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, -2, 4, -5)\ , \quad u_2 = (1, 1, -1, 1)\ , \quad u_3 = (0, -2, -2, 0)$$
$$u_4 = (6, 6, 2, -2)\ , \quad u_5 = (3, 2, 4, -5)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (5, -1, 6, -4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ16◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 720 & -240 & -240 \\ -240 & 800 & 0 \\ -240 & 0 & 800 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ16◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3, -4, -5, 3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-2, -2, -5, 5)$, $(-3, -3, -5, 3)$, $(-3, -3, -3, 4)$ и $(-2, -3, -4, 4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ16◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{7} & \frac{6\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{14} & \frac{-\sqrt{14}-6}{14} \\ \frac{-6\sqrt{21}-2\sqrt{6}}{28} & \frac{\sqrt{2}}{14} & \frac{-2\sqrt{14}+3}{14} \\ \frac{2\sqrt{21}-6\sqrt{6}}{28} & \frac{4\sqrt{7}+3\sqrt{2}}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-17}{26} & \frac{-3\sqrt{39}}{26} & \frac{3}{13} \\ \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{39}}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{-\sqrt{39}}{13} & \frac{-11}{13} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{2}+4}{22} & \frac{6\sqrt{2}+6\sqrt{11}+12}{44} & \frac{-6\sqrt{2}+6\sqrt{11}-12}{44} \\ \frac{6\sqrt{2}-6\sqrt{11}+12}{44} & \frac{-13\sqrt{2}+18}{44} & \frac{-9\sqrt{2}-4\sqrt{11}-18}{44} \\ \frac{-6\sqrt{2}-6\sqrt{11}-12}{44} & \frac{-9\sqrt{2}+4\sqrt{11}-18}{44} & \frac{-13\sqrt{2}+18}{44} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{39-8\sqrt{3}}{102} & \frac{-4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{-9\sqrt{2}-\sqrt{102}-6\sqrt{6}}{34} \\ \frac{-12-3\sqrt{51}-8\sqrt{3}}{102} & \frac{13\sqrt{3}-8}{34} & \frac{-9\sqrt{2}+\sqrt{102}-6\sqrt{6}}{34} \\ \frac{9-\sqrt{51}+6\sqrt{3}}{51} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-12\sqrt{2}+9\sqrt{6}}{34} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ17◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (0,0,0,-2)$, $e_2 = (-2,2,-1,-1)$, $e_3 = (-1,2,1,-2)$, $e_4 = (-1,-1,0,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (0,-11,-6,10)$ в этом базисе.

ЕГ17◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1,1,-3,-1)\ ,\quad u_2 = (1,0,-1,-1)\ ,\quad u_3 = (-5,2,-3,1)$$
$$u_4 = (-6,2,-6,0)\ ,\quad u_5 = (6,-2,2,-2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0,1,-6,4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ17◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 45 & 27 & -9 \\ 27 & 81 & -27 \\ -9 & -27 & 585 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ17◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-1,-5,-3,2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-1,-5,-2,3)$, $(-2,-5,-2,3)$, $(-2,-4,-4,3)$ и $(-1,-3,-1,3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ17◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-6}{11} & \frac{3-\sqrt{33}}{22} & \frac{1+3\sqrt{33}}{22} \\ \frac{3+\sqrt{33}}{22} & \frac{-10}{11} & \frac{-3+\sqrt{33}}{22} \\ \frac{1-3\sqrt{33}}{22} & \frac{-3-\sqrt{33}}{22} & \frac{-6}{11} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4}{6} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{3-2\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{-2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{8} \\ \frac{-\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{2\sqrt{3}+3}{12} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ18◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, -1, -2, -2)$, $e_2 = (-2, -1, -1, -1)$, $e_3 = (-2, 1, -2, -2)$, $e_4 = (0, 0, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-1, 7, -16, -12)$ в этом базисе.

ЕГ18◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-5, -4, 3, 2)\ , \quad u_2 = (4, -2, -4, -4)\ , \quad u_3 = (2, 9, -1, 4)$$
$$u_4 = (-2, -7, 3, -4)\ , \quad u_5 = (-2, 6, 4, 4)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0, -1, 2, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ18◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ18◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(3, 1, 0, -5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4, 1, 0, -5)$, $(4, 2, -1, -5)$, $(3, 1, 0, -4)$ и $(4, 1, -1, -4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ18◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{2}+8}{34} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{34}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{2}+3\sqrt{34}-8}{34} \\ \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{34}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{2}+9}{17} & \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{34}-6}{17} \\ \frac{-4\sqrt{2}-3\sqrt{34}-8}{34} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{34}-6}{17} & \frac{-13\sqrt{2}+8}{34} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{9} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}+3}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} \\ \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}+9}{17} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{13\sqrt{3}+8}{34} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}-1}{3} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ19◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1,-1,0,1)$, $e_2 = (1,1,1,0)$, $e_3 = (1,-2,1,2)$, $e_4 = (-2,-1,0,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (9,12,1,-9)$ в этом базисе.

ЕГ19◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0,-1,-1,-2)\ , \quad u_2 = (-3,1,2,3)\ , \quad u_3 = (-6,-2,4,2)$$
$$u_4 = (1,1,2,3)\ , \quad u_5 = (7,1,-4,-3)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-1,2,-5,3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ19◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 810 & 81 & -648 \\ 81 & 405 & -567 \\ -648 & -567 & 2106 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ19◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4,2,-1,-3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-5,2,-2,-4)$, $(-5,1,1,-2)$, $(-3,1,-2,-1)$ и $(-2,1,-2,-2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ19◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}-1}{5} & \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} & \frac{2+\sqrt{2}}{5} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{10} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{5} & \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{2}-8}{10} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{12} & \frac{-1+6\sqrt{2}}{12} & \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{36} \\ \frac{-\sqrt{2}-12}{12} & \frac{7}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{36} \\ \frac{-2\sqrt{2}+6}{12} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-5\sqrt{3}}{18} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{-8}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-11}{28} & \frac{9+2\sqrt{42}}{28} & \frac{-6+3\sqrt{42}}{28} \\ \frac{9-2\sqrt{42}}{28} & \frac{13}{28} & \frac{-18-\sqrt{42}}{28} \\ \frac{-6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-18+\sqrt{42}}{28} & \frac{-1}{14} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ20◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 2, -2, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 0)$, $e_3 = (-2, 2, -1, 1)$, $e_4 = (-2, 2, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-9, 10, -10, 6)$ в этом базисе.

ЕГ20◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-4, 4, 0, 3)\ , \quad u_2 = (4, -2, 1, -4)\ , \quad u_3 = (2, 0, 1, -2)$$
$$u_4 = (4, -8, -2, -4)\ , \quad u_5 = (-2, 4, 1, 1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0, -2, 4, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ20◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 80 & 32 & -16 \\ 32 & 272 & -64 \\ -16 & -64 & 1040 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ20◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5, 4, -1, -2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(6, 6, 1, -2)$, $(6, 3, 1, -2)$, $(5, 5, 0, -2)$ и $(5, 4, 0, -1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ20◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{17\sqrt{2}}{26} & \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{\sqrt{3}}{13} \\ \frac{-3\sqrt{78}}{26} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ \frac{-3\sqrt{2}}{13} & \frac{\sqrt{39}}{13} & \frac{-11\sqrt{3}}{39} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-4}{17} & \frac{4-3\sqrt{17}}{17} & \frac{2\sqrt{17}+6}{17} \\ \frac{3\sqrt{17}+4}{17} & \frac{-4}{17} & \frac{2\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{-2\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-2\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-9}{17} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{14} & \frac{-6+3\sqrt{42}}{28} & \frac{-18-\sqrt{42}}{28} \\ \frac{-6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-11}{28} & \frac{9-2\sqrt{42}}{28} \\ \frac{-18+\sqrt{42}}{28} & \frac{9+2\sqrt{42}}{28} & \frac{13}{28} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}-8}{34} & \frac{-8\sqrt{3}-6\sqrt{51}-8\sqrt{6}}{68} & \frac{-6+2\sqrt{17}-6\sqrt{2}}{17} \\ \frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{34}+8}{34} & \frac{-26\sqrt{3}+8\sqrt{6}}{68} & \frac{6+2\sqrt{17}+6\sqrt{2}}{17} \\ \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{34}+6}{17} & \frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{51}+6\sqrt{6}}{34} & \frac{-8+9\sqrt{2}}{17} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ21◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 2, -2, -2)$, $e_2 = (-1, 2, 1, 2)$, $e_3 = (2, 1, 1, 0)$, $e_4 = (1, 0, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-16, -1, 3, 10)$ в этом базисе.

ЕГ21◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -2, -2, -1)\ , \quad u_2 = (3, 0, 3, -2)\ , \quad u_3 = (0, -5, -5, -2)$$
$$u_4 = (1, -2, -1, -2)\ , \quad u_5 = (1, -3, -2, -2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-2, 1, -5, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ21◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 810 & -648 & 81 \\ -648 & 2106 & -567 \\ 81 & -567 & 405 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ21◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5, 3, 2, 2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, 5, 3, 2)$, $(-5, 3, 3, 3)$, $(-3, 3, 3, 4)$ и $(-4, 4, 4, 3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:
а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ21◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{11} & \frac{-\sqrt{11}+3}{11} & \frac{1+3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{\sqrt{11}+3}{11} & \frac{-9}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{-3\sqrt{11}+1}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{2} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \frac{2\sqrt{3}-6+2\sqrt{6}}{12} & \frac{-2\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6} & \frac{-2+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{-6-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{12} & \frac{-2+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+1}{11} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{11}+6}{22} & \frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{11}-2}{22} \\ \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}+6}{22} & \frac{9-\sqrt{3}}{11} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{11}-6}{22} \\ \frac{-\sqrt{3}-3\sqrt{11}-2}{22} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{11}-6}{22} & \frac{-5\sqrt{3}+1}{11} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ22⋄1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, -2, 1, -2)$, $e_2 = (-2, 1, 2, 2)$, $e_3 = (2, 1, 0, -2)$, $e_4 = (-1, 1, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 2-ю координаты вектора $v = (7, -6, 7, -19)$ в этом базисе.

ЕГ22⋄2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-2, 0, -4, -2)\ , \quad u_2 = (3, -1, 1, 2)\ , \quad u_3 = (1, -1, -3, 1)$$
$$u_4 = (3, -1, 1, 4)\ , \quad u_5 = (-4, 2, 2, -3)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (3, -4, 1, -2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ22⋄3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 2448 & 432 & -912 \\ 432 & 2336 & -1360 \\ -912 & -1360 & 2000 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ22⋄4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5, -1, -5, 1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, -1, -4, 3)$, $(-4, 0, -5, 3)$, $(-6, -1, -4, 1)$ и $(-6, 1, -5, 2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ22⋄5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-5}{34} & \frac{9+\sqrt{51}}{17} & \frac{-12+3\sqrt{51}}{34} \\ \frac{9-\sqrt{51}}{17} & \frac{5}{17} & \frac{-9-\sqrt{51}}{17} \\ \frac{-12-3\sqrt{51}}{34} & \frac{-9+\sqrt{51}}{17} & \frac{-5}{34} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}-8}{34} & \frac{-6\sqrt{3}-2\sqrt{51}-6\sqrt{6}}{34} & \frac{-8+6\sqrt{17}-8\sqrt{2}}{34} \\ \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{34}+6}{17} & \frac{-8\sqrt{3}+9\sqrt{6}}{34} & \frac{6+2\sqrt{17}+6\sqrt{2}}{17} \\ \frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{34}+8}{34} & \frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{51}+6\sqrt{6}}{34} & \frac{-26+8\sqrt{2}}{34} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} \\ \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+9}{17} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{-4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}-8}{34} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{17}+8}{34} \\ \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{4\sqrt{3}-9}{17} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{17}+8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} & \frac{13\sqrt{3}-8}{34} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ23◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1,0,1,-1)$, $e_2 = (-1,2,-2,2)$, $e_3 = (1,0,-1,2)$, $e_4 = (1,-2,-1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 3-ю координаты вектора $v = (-3,0,-4,0)$ в этом базисе.

ЕГ23◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2,3,-6,-5)\ , \quad u_2 = (6,-4,-6,-2)\ , \quad u_3 = (0,5,-4,-5)$$
$$u_4 = (-1,1,1,0)\ , \quad u_5 = (2,4,-6,-6)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0,1,-2,4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ23◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 425 & -575 & 145 \\ -575 & 1625 & -215 \\ 145 & -215 & 505 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ23◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-2,5,3,5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3,6,4,4)$, $(-2,6,2,5)$, $(-1,5,4,4)$ и $(-2,5,3,6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ23◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}-1}{19} & \frac{-6\sqrt{3}-6\sqrt{57}-6\sqrt{6}}{76} & \frac{-6+6\sqrt{19}-6\sqrt{2}}{38} \\ \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{38}+6}{38} & \frac{-10\sqrt{3}+9\sqrt{6}}{38} & \frac{18+2\sqrt{19}+18\sqrt{2}}{38} \\ \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{38}+6}{38} & \frac{18\sqrt{3}-2\sqrt{57}+18\sqrt{6}}{76} & \frac{-10+9\sqrt{2}}{19} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{3}+2}{20} & \frac{3\sqrt{10}}{20} & \frac{-3\sqrt{3}-6}{20} \\ \frac{-3\sqrt{10}}{20} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{10}}{20} \\ \frac{-3\sqrt{3}-6}{20} & \frac{\sqrt{10}}{20} & \frac{-\sqrt{3}+18}{20} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{3}-2}{20} & \frac{-3\sqrt{10}}{20} & \frac{3\sqrt{3}+6}{20} \\ \frac{3\sqrt{10}}{20} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{20} \\ \frac{3\sqrt{3}+6}{20} & \frac{-\sqrt{10}}{20} & \frac{\sqrt{3}-18}{20} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}+2}{28} & \frac{2\sqrt{6}-6\sqrt{21}-4\sqrt{3}}{84} & \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}+6}{28} \\ \frac{-2\sqrt{2}-6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{-5\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{42} & \frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} \\ \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{-6\sqrt{6}-2\sqrt{21}+12\sqrt{3}}{84} & \frac{-5\sqrt{2}-18}{28} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ24◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1,-1,-1,1)$, $e_2 = (-2,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (1,0,2,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (1,0,-1,-3)$ в этом базисе.

ЕГ24◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1,1,1,0)\ ,\quad u_2 = (-1,2,3,1)\ ,\quad u_3 = (-5,-5,-3,2)$$
$$u_4 = (4,4,3,-1)\ ,\quad u_5 = (5,1,-1,-2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0,-4,1,-4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ24◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 225 & -15 & -75 \\ -15 & 1025 & 5 \\ -75 & 5 & 425 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ24◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5,-2,2,5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4,0,2,5)$, $(7,-2,1,4)$, $(7,-3,3,5)$ и $(4,-1,3,6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ24◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $$\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} & \frac{-4\sqrt{3}-5}{18} & \frac{-\sqrt{3}-5}{9} \\ \frac{-4\sqrt{3}-11}{18} & \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} & \frac{\sqrt{3}-1}{9} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{9} & \frac{\sqrt{3}+5}{9} & \frac{-4\sqrt{3}+1}{9} \end{pmatrix}$$

б) $$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-8}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{2+\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{3}-1}{5} \end{pmatrix}$$

в) $$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+4}{6} & \frac{2\sqrt{6}-6-4\sqrt{3}}{36} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} \\ \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-5\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{36} & \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-\sqrt{6}-12+2\sqrt{3}}{36} & \frac{-5\sqrt{2}-2}{12} \end{pmatrix}$$

г) $$\begin{pmatrix} \frac{-7}{10} & \frac{-\sqrt{15}}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ25◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (2,1,1,0)$, $e_3 = (-2,2,0,-1)$, $e_4 = (-1,-2,1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (15,-6,6,5)$ в этом базисе.

ЕГ25◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0,2,-2,2)\ , \quad u_2 = (8,-6,-1,-2)\ , \quad u_3 = (8,-6,0,-2)$$
$$u_4 = (6,-4,-4,-1)\ , \quad u_5 = (0,1,-2,1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-2,6,-6,2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ25◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 45 & -9 & 27 \\ -9 & 585 & -27 \\ 27 & -27 & 81 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ25◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-1,-2,-1,-4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-2,-1,0,-5)$, $(1,0,-2,-4)$, $(1,-3,0,-3)$ и $(1,-2,-1,-3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ25◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{\sqrt{3}+2-2\sqrt{6}}{12} & \frac{2\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}+2}{12} & \frac{5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4}{12} \\ \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}+4}{12} & \frac{-2\sqrt{3}-4-\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}-4}{6} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{\sqrt{6}-12-2\sqrt{3}}{36} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2}{12} & \frac{-5\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{36} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-2\sqrt{6}-6+4\sqrt{3}}{36} & \frac{-\sqrt{2}-4}{6} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{4} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ26◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1,-1,1,1)$, $e_2 = (1,1,2,2)$, $e_3 = (-1,0,1,0)$, $e_4 = (-2,0,1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (5,5,7,13)$ в этом базисе.

ЕГ26◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0,-2,1,1)\ , \quad u_2 = (0,-1,-3,0)\ , \quad u_3 = (1,-5,1,3)$$
$$u_4 = (-3,7,1,-5)\ , \quad u_5 = (3,1,2,2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-1,1,-3,1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ26◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 45 & 27 & -9 \\ 27 & 81 & -27 \\ -9 & -27 & 585 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ26◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5,1,1,5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4,3,1,5)$, $(7,2,3,6)$, $(4,3,1,4)$ и $(5,2,2,6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ26◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{9-\sqrt{33}}{22} & \frac{3+3\sqrt{33}}{22} \\ \frac{9+\sqrt{33}}{22} & \frac{-8}{11} & \frac{-9+\sqrt{33}}{22} \\ \frac{3-3\sqrt{33}}{22} & \frac{-9-\sqrt{33}}{22} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{\sqrt{11}+3}{11} & \frac{3\sqrt{11}-1}{11} \\ \frac{-\sqrt{11}+3}{11} & \frac{9}{11} & \frac{-\sqrt{11}-3}{11} \\ \frac{-3\sqrt{11}-1}{11} & \frac{\sqrt{11}-3}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{6}}{8} & \frac{6\sqrt{2}-6}{12} & \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{6\sqrt{6}+6\sqrt{3}}{24} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3\sqrt{6}+12\sqrt{3}}{24} & \frac{-6\sqrt{2}-6}{12} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ27◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 0, -1, 2)$, $e_2 = (-1, -1, 1, 2)$, $e_3 = (-1, -1, 2, -2)$, $e_4 = (0, 0, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-2, -5, 14, -5)$ в этом базисе.

ЕГ27◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-6, -4, -6, -2)\ , \quad u_2 = (4, 3, 4, 1)\ , \quad u_3 = (2, 2, -4, -3)$$
$$u_4 = (-4, -3, 2, 2)\ , \quad u_5 = (-2, -2, 2, 2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0, -4, 3, -2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ27◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 1044 & -636 & 264 \\ -636 & 884 & -216 \\ 264 & -216 & 1184 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ27◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(0, 2, -4, 2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(0, 1, -5, 2)$, $(0, 3, -2, 1)$, $(1, 2, -4, 3)$ и $(1, 2, -5, 3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ27◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

б) $$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3} & \frac{-4-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-4\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

в) $$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

г) $$\begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}-8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+6-\sqrt{17}}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+8+3\sqrt{17}}{34} \\ \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}-9}{17} & \frac{3\sqrt{3}-6+\sqrt{17}}{17} \\ \frac{-4\sqrt{3}-3\sqrt{17}+8}{34} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-13\sqrt{3}-8}{34} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ28◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1,-2,1,-1)$, $e_2 = (0,2,1,-1)$, $e_3 = (0,2,-1,2)$, $e_4 = (-2,-1,-1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-6,-8,-11,16)$ в этом базисе.

ЕГ28◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0,3,4,-5)\ ,\quad u_2 = (8,0,-2,0)\ ,\quad u_3 = (4,0,0,-2)$$
$$u_4 = (4,2,2,-4)\ ,\quad u_5 = (6,0,-1,-1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0,-3,3,-4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ28◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 464 & 256 & -544 \\ 256 & 320 & -320 \\ -544 & -320 & 1040 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ28◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(2,-4,5,2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1,-5,5,1)$, $(1,-5,5,4)$, $(1,-4,6,4)$ и $(2,-3,7,3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ28◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+4}{14} & \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{-2\sqrt{2}+6\sqrt{7}-4}{28} \\ \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{-5\sqrt{2}+18}{28} & \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{-2\sqrt{2}-6\sqrt{7}-4}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{-13\sqrt{2}+2}{28} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}-4}{6} & \frac{-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6}}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{12} & \frac{-5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2}{12} & \frac{-5\sqrt{3}-2}{12} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-15-8\sqrt{3}}{54} & \frac{4\sqrt{3}-11}{18} & \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{18} \\ \frac{12-5\sqrt{3}}{54} & \frac{-5\sqrt{3}-8}{18} & \frac{3\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{18} \\ \frac{-3+5\sqrt{3}}{27} & \frac{-\sqrt{3}-1}{9} & \frac{\sqrt{6}+12\sqrt{2}}{18} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}-4}{14} & \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}+4}{28} \\ \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{5\sqrt{2}-18}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{13\sqrt{2}-2}{28} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ29◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, 0, 0, -2)$, $e_2 = (0, -1, 1, -1)$, $e_3 = (2, -2, 2, -1)$, $e_4 = (-2, 2, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (0, -8, 5, -5)$ в этом базисе.

ЕГ29◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, 2, 2, 2)\ , \quad u_2 = (-5, -4, -2, -6)\ , \quad u_3 = (-4, -5, -3, -4)$$
$$u_4 = (-3, -3, -1, -2)\ , \quad u_5 = (2, -2, -3, 2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-4, 6, -2, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ29◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 272 & 104 & -88 \\ 104 & 296 & -40 \\ -88 & -40 & 200 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ29◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3, -1, 4, 0)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-2, 0, 5, 0)$, $(-1, 0, 4, 0)$, $(-3, 0, 3, 2)$ и $(-3, -1, 3, 1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ29◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}-1}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{2-\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{10} \\ \frac{2-\sqrt{3}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{3}-8}{10} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-15-2\sqrt{3}}{36} & \frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2}{12} & \frac{6\sqrt{2}-6-4\sqrt{6}}{24} \\ \frac{-3+6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{36} & \frac{-5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-6\sqrt{2}-6+4\sqrt{6}}{24} \\ \frac{-6-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{36} & \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}-4}{12} & \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{6}}{12} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}-2}{12} & \frac{\sqrt{2}+2-4\sqrt{3}}{12} & \frac{2\sqrt{2}+4+2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}{12} & \frac{5\sqrt{2}-2}{12} & \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-4}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+4}{12} & \frac{-2\sqrt{2}-4-2\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{2}-4}{6} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{6\sqrt{2}-1}{12} & \frac{-3\sqrt{2}-2}{12} \\ \frac{-6\sqrt{2}-1}{12} & \frac{7}{12} & \frac{-3\sqrt{2}+2}{12} \\ \frac{3\sqrt{2}-2}{12} & \frac{3\sqrt{2}+2}{12} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ30◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, -1, 0, 2)$, $e_2 = (-2, 0, -2, -1)$, $e_3 = (2, 1, 2, 1)$, $e_4 = (2, 2, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 3-ю координаты вектора $v = (20, 12, 18, 6)$ в этом базисе.

ЕГ30◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2, -2, 4, -6)\ , \quad u_2 = (-1, -3, 0, -1)\ , \quad u_3 = (0, 2, -1, 2)$$
$$u_4 = (1, 6, -1, 4)\ , \quad u_5 = (-2, -8, 0, -4)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (1, -3, 3, -2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ30◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 2448 & 432 & -912 \\ 432 & 2336 & -1360 \\ -912 & -1360 & 2000 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ30◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(2, 1, -1, 0)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, 0, 0, 2)$, $(3, 0, -1, 2)$, $(1, 0, -2, 2)$ и $(3, 1, 0, 1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ30◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-27-4\sqrt{3}}{66} & \frac{6\sqrt{3}-3\sqrt{22}-12}{44} & \frac{18\sqrt{2}+6\sqrt{33}-12\sqrt{6}}{88} \\ \frac{6+\sqrt{66}-4\sqrt{3}}{44} & \frac{-13\sqrt{3}-18}{44} & \frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{33}-18\sqrt{6}}{88} \\ \frac{-6+\sqrt{66}+4\sqrt{3}}{44} & \frac{-9\sqrt{3}-2\sqrt{22}+18}{44} & \frac{39\sqrt{2}+18\sqrt{6}}{88} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}-4}{14} & \frac{2\sqrt{2}+4-6\sqrt{7}}{28} & \frac{6\sqrt{2}+12+2\sqrt{7}}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{13\sqrt{2}-2}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{5\sqrt{2}-18}{28} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{21}{34} & \frac{-4+3\sqrt{51}}{34} & \frac{-3-\sqrt{51}}{17} \\ \frac{-4-3\sqrt{51}}{34} & \frac{21}{34} & \frac{3-\sqrt{51}}{17} \\ \frac{-3+\sqrt{51}}{17} & \frac{3+\sqrt{51}}{17} & \frac{13}{17} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{2}}{17} & \frac{-3\sqrt{17}+4}{17} & \frac{2\sqrt{51}+6\sqrt{3}}{51} \\ \frac{3\sqrt{34}+4\sqrt{2}}{17} & \frac{4}{17} & \frac{-2\sqrt{51}+6\sqrt{3}}{51} \\ \frac{2\sqrt{34}-6\sqrt{2}}{17} & \frac{-2\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-3\sqrt{3}}{17} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ31◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 2, 1, -2)$, $e_2 = (0, 2, -2, 0)$, $e_3 = (-1, 0, -2, -2)$, $e_4 = (0, 1, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (5, 2, 2, 16)$ в этом базисе.

ЕГ31◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (4, 0, 2, -4)\ , \quad u_2 = (2, -6, 0, 6)\ , \quad u_3 = (2, -2, 3, -4)$$
$$u_4 = (-2, 6, -3, 0)\ , \quad u_5 = (-2, 2, -2, 2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-2, 3, -6, 3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ31◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 45 & 27 & -9 \\ 27 & 81 & -27 \\ -9 & -27 & 585 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ31◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, 5, 2, -4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, 7, 3, -4)$, $(0, 6, 4, -4)$, $(1, 7, 3, -4)$ и $(2, 4, 1, -3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ31◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}-2}{12} & \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{3}}{12} & \frac{\sqrt{2}+2+4\sqrt{3}}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{\sqrt{2}-4}{6} & \frac{-2\sqrt{2}-4+2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{5\sqrt{2}-2}{12} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 1 & 0 & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ32◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2,0,0,-2)$, $e_2 = (-2,1,-1,-1)$, $e_3 = (-1,0,1,-1)$, $e_4 = (-1,0,0,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 2-ю координаты вектора $v = (0,-1,3,3)$ в этом базисе.

ЕГ32◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2,0,-1,-4)\ , \quad u_2 = (2,1,-1,-6)\ , \quad u_3 = (6,-3,1,-6)$$
$$u_4 = (-2,1,0,2)\ , \quad u_5 = (0,-2,0,4)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (5,-2,4,0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ32◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 225 & -75 & -15 \\ -75 & 425 & 5 \\ -15 & 5 & 1025 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ32◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1,1,-4,3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(3,2,-3,4)$, $(3,2,-3,5)$, $(2,1,-5,5)$ и $(2,2,-3,4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ32◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{\sqrt{3}+3}{9} \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-3+\sqrt{3}}{9} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-4-\sqrt{3}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \\ \frac{-4+\sqrt{3}}{6} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-\sqrt{2}+8}{18} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-4\sqrt{2}-1}{9} & \frac{4\sqrt{2}-2}{9} \\ \frac{-7\sqrt{2}+8}{18} & \frac{-2\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ33◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2,-2,-1,0)$, $e_2 = (0,-1,0,-1)$, $e_3 = (1,2,2,-1)$, $e_4 = (2,0,-1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-5,-16,-9,-2)$ в этом базисе.

ЕГ33◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1,-4,-2,4)\ , \quad u_2 = (1,0,4,-4)\ , \quad u_3 = (2,-2,5,-4)$$
$$u_4 = (1,0,2,-2)\ , \quad u_5 = (-3,2,-1,0)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-2,1,-2,1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ33◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 425 & 145 & -575 \\ 145 & 505 & -215 \\ -575 & -215 & 1625 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ33◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(4,-3,-4,4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(3,-1,-4,4)$, $(6,-2,-2,3)$, $(3,-3,-3,5)$ и $(3,-3,-4,5)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ33◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{19} & \frac{-3\sqrt{19}-3}{19} & \frac{-\sqrt{57}+\sqrt{3}}{19} \\ \frac{3\sqrt{38}-3\sqrt{2}}{19} & \frac{9}{19} & \frac{-\sqrt{57}-9\sqrt{3}}{57} \\ \frac{-3\sqrt{38}-3\sqrt{2}}{19} & \frac{-\sqrt{19}+9}{19} & \frac{-3\sqrt{3}}{19} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-8}{19} & \frac{9+3\sqrt{57}}{38} & \frac{-9+3\sqrt{57}}{38} \\ \frac{9-3\sqrt{57}}{38} & \frac{4}{19} & \frac{-27-\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-9-3\sqrt{57}}{38} & \frac{-27+\sqrt{57}}{38} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{2}-2}{28} & \frac{2\sqrt{2}-4-6\sqrt{7}}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+6-4\sqrt{7}}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}-4}{28} & \frac{-5\sqrt{2}-4}{14} & \frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{7}+12}{28} \\ \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}+6}{28} & \frac{-6\sqrt{2}-2\sqrt{7}+12}{28} & \frac{-5\sqrt{2}-18}{28} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{3}-1}{19} & \frac{9\sqrt{2}+3\sqrt{114}+6\sqrt{6}}{76} & \frac{-3\sqrt{6}+3\sqrt{38}-6\sqrt{2}}{38} \\ \frac{-3\sqrt{3}+3\sqrt{19}-6}{38} & \frac{-15\sqrt{2}+9\sqrt{6}}{38} & \frac{-9\sqrt{6}-\sqrt{38}-18\sqrt{2}}{38} \\ \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{19}+6}{38} & \frac{-27\sqrt{2}+\sqrt{114}-18\sqrt{6}}{76} & \frac{-5\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{19} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ34◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (0,0,0,-1)$, $e_2 = (1,1,-2,-1)$, $e_3 = (0,0,2,-2)$, $e_4 = (-2,0,2,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-1,3,-12,9)$ в этом базисе.

ЕГ34◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1,6,-2,-3)\ ,\quad u_2 = (0,4,0,0)\ ,\quad u_3 = (0,7,-1,-2)$$
$$u_4 = (1,-4,0,1)\ ,\quad u_5 = (-2,-6,2,2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-1,2,-3,3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ34◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 125 & -75 & 5 \\ -75 & 225 & -15 \\ 5 & -15 & 65 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ34◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3,5,-5,3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-1,5,-5,4)$, $(-3,4,-5,5)$, $(-4,5,-4,2)$ и $(-4,4,-5,4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ34◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{2}-1}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{2\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{7\sqrt{2}-8}{18} \\ \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}-1}{5} & \frac{\sqrt{5}\sqrt{6}}{10} & \frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{-3\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{10} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{5} & \frac{\sqrt{5}\sqrt{6}}{20} & \frac{-\sqrt{6}+8\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}-2}{28} & \frac{3\sqrt{3}+6-2\sqrt{14}}{28} & \frac{2\sqrt{3}+4+3\sqrt{14}}{28} \\ \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{5\sqrt{3}-18}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} \\ \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{-6\sqrt{3}-\sqrt{14}-12}{28} & \frac{5\sqrt{3}-4}{14} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}+2}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}+6}{28} & \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}-4}{28} \\ \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}+6}{28} & \frac{5\sqrt{2}+18}{28} & \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}-12}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{7}-4}{28} & \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{7}-12}{28} & \frac{5\sqrt{2}+4}{14} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ35◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (2,1,-1,2)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (-1,-2,1,-2)$, $e_4 = (-2,0,0,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-3,-9,0,3)$ в этом базисе.

ЕГ35◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0,7,2,3)\ , \quad u_2 = (-8,3,-6,-1)\ , \quad u_3 = (-2,8,4,4)$$
$$u_4 = (-3,5,4,3)\ , \quad u_5 = (-6,4,-4,0)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (2,-2,1,-4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ35◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ35◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5,3,1,-1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(5,4,1,1)$, $(4,4,1,1)$, $(6,5,2,0)$ и $(6,5,1,0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ35◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $$\begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{3}-4}{22} & \frac{18\sqrt{2}+6\sqrt{33}+12\sqrt{6}}{88} & \frac{-6\sqrt{6}+6\sqrt{11}-12\sqrt{2}}{44} \\ \frac{-6\sqrt{3}+3\sqrt{22}-12}{44} & \frac{-39\sqrt{2}+18\sqrt{6}}{88} & \frac{-9\sqrt{6}-4\sqrt{11}-18\sqrt{2}}{44} \\ \frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{22}+12}{44} & \frac{-27\sqrt{2}+4\sqrt{33}-18\sqrt{6}}{88} & \frac{-13\sqrt{6}+18\sqrt{2}}{44} \end{pmatrix}$$

б) $$\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}-8}{34} & \frac{-4\sqrt{3}-8-3\sqrt{17}}{34} & \frac{3\sqrt{3}+6-\sqrt{17}}{17} \\ \frac{-4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{13\sqrt{3}-8}{34} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} \\ \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{3\sqrt{3}+6-\sqrt{17}}{17} & \frac{4\sqrt{3}-9}{17} \end{pmatrix}$$

в) $$\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}+8}{34} & \frac{-4\sqrt{2}+3\sqrt{34}+8}{34} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{34}-6}{17} \\ \frac{-4\sqrt{2}-3\sqrt{34}+8}{34} & \frac{13\sqrt{2}+8}{34} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{34}-6}{17} \\ \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{34}-6}{17} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{34}-6}{17} & \frac{4\sqrt{2}+9}{17} \end{pmatrix}$$

г) $$\begin{pmatrix} \frac{13}{22} & \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{22}}{44} & \frac{6-3\sqrt{66}}{44} \\ \frac{-6+3\sqrt{66}}{44} & \frac{-31\sqrt{3}}{132} & \frac{-9-2\sqrt{66}}{44} \\ \frac{-6-3\sqrt{66}}{44} & \frac{-9\sqrt{3}+6\sqrt{22}}{132} & \frac{-31}{44} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ36◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (0,2,0,0)$, $e_2 = (1,2,1,-1)$, $e_3 = (2,-2,1,-2)$, $e_4 = (2,-2,0,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (8,10,3,1)$ в этом базисе.

ЕГ36◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (7,1,3,-2)\ , \quad u_2 = (-4,0,-2,1)\ , \quad u_3 = (1,-2,0,1)$$
$$u_4 = (3,-1,1,0)\ , \quad u_5 = (-7,0,-4,2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-3,3,-1,2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ36◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 425 & -75 & 5 \\ -75 & 225 & -15 \\ 5 & -15 & 1025 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ36◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(4,4,0,-5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4,3,1,-4)$, $(4,4,2,-4)$, $(3,4,1,-4)$ и $(6,5,0,-4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ36◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}-4-\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{3}+2-2\sqrt{6}}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4}{12} & \frac{\sqrt{3}-4}{6} & \frac{2\sqrt{3}+4+\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}+2}{12} & \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}+4}{12} & \frac{5\sqrt{3}-2}{12} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+1}{11} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{22}+6}{22} & \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{22}-2}{22} \\ \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{22}+6}{22} & \frac{\sqrt{2}+9}{11} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{22}-6}{22} \\ \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{22}-2}{22} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{22}-6}{22} & \frac{5\sqrt{2}+1}{11} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{11}}{66} & \frac{1-3\sqrt{33}}{22} \\ \frac{-3+\sqrt{33}}{22} & \frac{-10\sqrt{3}}{33} & \frac{-3-\sqrt{33}}{22} \\ \frac{-1-3\sqrt{33}}{22} & \frac{-3\sqrt{3}+3\sqrt{11}}{66} & \frac{-6}{11} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{6}-2}{6} & \frac{-2\sqrt{6}-1}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{2\sqrt{6}-1}{6} & \frac{\sqrt{6}+2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ37◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2,-2,-1,0)$, $e_2 = (-1,-1,-2,-2)$, $e_3 = (0,2,0,2)$, $e_4 = (2,1,2,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 4-ю координаты вектора $v = (1,13,0,10)$ в этом базисе.

ЕГ37◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (4,2,0,-8)\,, \quad u_2 = (0,-7,2,-2)\,, \quad u_3 = (-6,1,4,8)$$
$$u_4 = (-4,-4,4,4)\,, \quad u_5 = (0,8,0,0)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (1,-3,3,-2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ37◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 585 & -45 & -45 \\ -45 & 1125 & -675 \\ -45 & -675 & 1125 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ37◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-3,5,-4,-1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4,6,-4,-2)$, $(-1,6,-4,-2)$, $(-2,4,-3,-1)$ и $(-4,5,-4,0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ37◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+8}{18} & \frac{4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{\sqrt{2}-8}{18} \\ \frac{-2\sqrt{2}-2}{9} & \frac{4\sqrt{2}+1}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{7\sqrt{2}-8}{18} & \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{5\sqrt{2}+8}{18} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2\sqrt{3}}{9} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{9} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-\sqrt{6}}{4} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ38◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 1, -2, -1)$, $e_2 = (2, 1, -2, 0)$, $e_3 = (1, 2, 2, -2)$, $e_4 = (1, -1, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (1, 1, -8, 0)$ в этом базисе.

ЕГ38◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, -6, -1, 2)\ , \quad u_2 = (-6, 0, 2, 4)\ , \quad u_3 = (0, -1, 1, -1)$$
$$u_4 = (-1, -3, 0, 1)\ , \quad u_5 = (-6, -4, 2, 4)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0, 5, -5, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ38◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 125 & -75 & 5 \\ -75 & 225 & -15 \\ 5 & -15 & 65 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ38◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, 5, 5, 5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, 5, 5, 6)$, $(-4, 6, 5, 6)$, $(-4, 5, 6, 5)$ и $(-4, 5, 4, 6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ38◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{3\sqrt{10}}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{3\sqrt{30}}{20} & \frac{-\sqrt{3}}{6} & \frac{-\sqrt{30}}{20} \\ \frac{-3}{20} & \frac{\sqrt{10}}{20} & \frac{-19}{20} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{-3\sqrt{10}}{10} & 0 & \frac{-\sqrt{10}}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-10}{19} & \frac{3-3\sqrt{57}}{38} & \frac{3+3\sqrt{57}}{38} \\ \frac{3+3\sqrt{57}}{38} & \frac{-14}{19} & \frac{-9+\sqrt{57}}{38} \\ \frac{3-3\sqrt{57}}{38} & \frac{-9-\sqrt{57}}{38} & \frac{-14}{19} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-26\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{56} & \frac{4+6\sqrt{14}+4\sqrt{2}}{28} & \frac{-3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} \\ \frac{4\sqrt{3}-6\sqrt{42}+4\sqrt{6}}{56} & \frac{-10+4\sqrt{2}}{14} & \frac{-6\sqrt{2}-2\sqrt{7}-12}{28} \\ \frac{-6\sqrt{3}-4\sqrt{42}-6\sqrt{6}}{56} & \frac{-12+2\sqrt{14}-12\sqrt{2}}{28} & \frac{-5\sqrt{2}+18}{28} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ39◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (2,1,-2,2)$, $e_2 = (-2,1,-1,-2)$, $e_3 = (-1,1,0,-2)$, $e_4 = (-1,0,-2,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 3-ю координаты вектора $v = (7,2,5,-1)$ в этом базисе.

ЕГ39◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-6,-3,1,-2)\ , \quad u_2 = (2,2,5,-4)\ , \quad u_3 = (-4,-2,2,-4)$$
$$u_4 = (-5,-2,3,-3)\ , \quad u_5 = (8,5,2,2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (5,-4,1,-1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ39◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 810 & 81 & -648 \\ 81 & 405 & -567 \\ -648 & -567 & 2106 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ39◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-2,1,-4,5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-1,0,-3,5)$, $(-3,3,-5,4)$, $(-2,2,-3,4)$ и $(-1,0,-4,6)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ39◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-8}{9} \\ \frac{-8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-5}{6} & \frac{2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-7}{12} & \frac{-1+6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1-6\sqrt{2}}{12} & \frac{-7}{12} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}+4\sqrt{6}}{12} & \frac{4+2\sqrt{6}+4\sqrt{2}}{12} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{4\sqrt{3}-6\sqrt{2}+4\sqrt{6}}{24} & \frac{-10+2\sqrt{2}}{12} & \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} \\ \frac{-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{24} & \frac{-2+4\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{12} & \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-8}{18} & \frac{-4\sqrt{3}+5}{18} & \frac{-\sqrt{3}+5}{9} \\ \frac{-4\sqrt{3}+11}{18} & \frac{-5\sqrt{3}-8}{18} & \frac{1+\sqrt{3}}{9} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{9} & \frac{\sqrt{3}-5}{9} & \frac{-4\sqrt{3}-1}{9} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ40◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (0,0,1,0)$, $e_3 = (2,0,2,2)$, $e_4 = (0,-2,-2,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 3-ю координаты вектора $v = (-3,4,7,-6)$ в этом базисе.

ЕГ40◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0,-3,-1,-1)\ ,\quad u_2 = (0,1,-3,1)\ ,\quad u_3 = (2,1,3,1)$$
$$u_4 = (0,2,4,0)\ ,\quad u_5 = (2,0,1,1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-4,4,-1,2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ40◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ40◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(3,1,0,3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(5,1,2,2)$, $(4,2,0,3)$, $(2,2,1,5)$ и $(4,3,2,4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ40◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $$\begin{pmatrix} \frac{-15}{28} & \frac{3-2\sqrt{42}}{28} & \frac{2+3\sqrt{42}}{28} \\ \frac{3+2\sqrt{42}}{28} & \frac{-23}{28} & \frac{-6+\sqrt{42}}{28} \\ \frac{2-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-6-\sqrt{42}}{28} & \frac{-9}{14} \end{pmatrix}$$

б) $$\begin{pmatrix} \frac{-10\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{24} & \frac{4\sqrt{6}+2+2\sqrt{2}}{12} & \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-4}{12} \\ \frac{-12\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{24} & \frac{-10+2\sqrt{2}}{12} & \frac{-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-4}{12} \\ \frac{-6\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{24} & \frac{2\sqrt{6}-4-4\sqrt{2}}{12} & \frac{4-\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$$

в) $$\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{\sqrt{3}-2-2\sqrt{6}}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2}{12} & \frac{-5\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6}}{12} & \frac{-\sqrt{3}-4}{6} \end{pmatrix}$$

г) $$\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}+2}{12} & \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2}{12} & \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}-4}{12} \\ \frac{\sqrt{3}-2-2\sqrt{6}}{12} & \frac{5\sqrt{3}+2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6}}{12} \\ \frac{2\sqrt{3}-4+\sqrt{6}}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}{12} & \frac{\sqrt{3}+4}{6} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ41◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1, 1, 2, 0)$, $e_2 = (2, 2, 0, -2)$, $e_3 = (-1, 0, 2, 2)$, $e_4 = (2, 1, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 4-ю координаты вектора $v = (-13, -8, 12, 7)$ в этом базисе.

ЕГ41◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (0, -1, 3, -2)\ , \quad u_2 = (-6, 6, -10, 10)\ , \quad u_3 = (-1, 2, -2, 1)$$
$$u_4 = (2, 0, 0, -2)\ , \quad u_5 = (-1, -2, -2, 5)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (3, -3, 4, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ41◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 425 & 145 & -575 \\ 145 & 505 & -215 \\ -575 & -215 & 1625 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ41◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-1, 2, -1, -4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-1, 3, 1, -4)$, $(-1, 3, 1, -3)$, $(-2, 2, 0, -4)$ и $(-1, 2, 0, -3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:
а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ41◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-18\sqrt{3}+8\sqrt{6}}{52} & \frac{3\sqrt{13}}{13} & \frac{-3\sqrt{2}-6}{13} \\ \frac{-3\sqrt{39}}{26} & -1 & \frac{-\sqrt{26}}{13} \\ \frac{-6\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{26} & \frac{2\sqrt{13}}{13} & \frac{-2\sqrt{2}+9}{13} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-4}{14} & \frac{2\sqrt{3}-4-3\sqrt{14}}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+12-\sqrt{14}}{28} \\ \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{14}-4}{28} & \frac{-13\sqrt{3}-2}{28} & \frac{-3\sqrt{3}+2\sqrt{14}+6}{28} \\ \frac{-6\sqrt{3}+\sqrt{14}+12}{28} & \frac{-3\sqrt{3}-2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{-5\sqrt{3}-18}{28} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{3}+4}{22} & \frac{-6\sqrt{3}+3\sqrt{22}+12}{44} & \frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{22}-12}{44} \\ \frac{-6\sqrt{3}-3\sqrt{22}+12}{44} & \frac{13\sqrt{3}+18}{44} & \frac{9\sqrt{3}-2\sqrt{22}-18}{44} \\ \frac{6\sqrt{3}-3\sqrt{22}-12}{44} & \frac{9\sqrt{3}+2\sqrt{22}-18}{44} & \frac{13\sqrt{3}+18}{44} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{66} & \frac{-6\sqrt{2}+6\sqrt{11}+12}{44} & \frac{12\sqrt{3}+6\sqrt{66}-12\sqrt{6}}{88} \\ \frac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{33}+4\sqrt{3}}{44} & \frac{-13\sqrt{2}-18}{44} & \frac{-18\sqrt{3}+4\sqrt{66}+18\sqrt{6}}{88} \\ \frac{-2\sqrt{6}+2\sqrt{33}+4\sqrt{3}}{44} & \frac{9\sqrt{2}+4\sqrt{11}-18}{44} & \frac{26\sqrt{3}+18\sqrt{6}}{88} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ42◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (0, 1, 2, -2)$, $e_2 = (-1, 1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 1, 0)$, $e_4 = (-1, 2, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-6, -1, -5, 5)$ в этом базисе.

ЕГ42◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, 1, 3, -6)\ , \quad u_2 = (2, 0, 2, -2)\ , \quad u_3 = (-2, 0, 2, -6)$$
$$u_4 = (0, -1, -2, 3)\ , \quad u_5 = (-1, 0, -2, 3)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-5, 1, -1, 5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ42◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 272 & 104 & -88 \\ 104 & 296 & -40 \\ -88 & -40 & 200 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ42◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-2, -5, -5, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, -5, -3, 0)$, $(-2, -6, -6, -2)$, $(0, -4, -6, 1)$ и $(0, -5, -6, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ42◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}-2}{4} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{9} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{2\sqrt{3}-6-2\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{18} & \frac{-\sqrt{2}-1}{3} & \frac{2\sqrt{3}+6-2\sqrt{6}}{12} \\ \frac{-\sqrt{6}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{18} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{5}{6} & \frac{2-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-1+6\sqrt{2}}{12} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ43◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (2,1,0,-2)$, $e_2 = (-1,2,-2,2)$, $e_3 = (2,2,1,-1)$, $e_4 = (-2,-1,0,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 4-ю координаты вектора $v = (7,2,12,-6)$ в этом базисе.

ЕГ43◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-4,-4,4,0)\ , \quad u_2 = (-8,0,0,0)\ , \quad u_3 = (-2,-4,0,-2)$$
$$u_4 = (-5,-2,0,-1)\ , \quad u_5 = (-3,-2,4,1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (2,-4,4,-3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ43◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 810 & -648 & 81 \\ -648 & 2106 & -567 \\ 81 & -567 & 405 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ43◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5,2,-3,-5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4,3,-3,-6)$, $(-5,3,-2,-6)$, $(-5,1,-4,-3)$ и $(-5,2,-4,-4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ43◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{7}{12} & \frac{-1-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1+6\sqrt{2}}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{14} & \frac{18+\sqrt{42}}{28} & \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{14}}{28} \\ \frac{18\sqrt{2}-2\sqrt{21}}{28} & \frac{13}{28} & \frac{9\sqrt{3}+6\sqrt{14}}{84} \\ \frac{-6\sqrt{2}-6\sqrt{21}}{28} & \frac{-9+2\sqrt{42}}{28} & \frac{11\sqrt{3}}{84} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{7\sqrt{2}-8}{18} & \frac{-5\sqrt{2}-8}{18} & \frac{2\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+2}{9} & \frac{-4\sqrt{2}-1}{9} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ44◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (2, 1, -1, 1)$, $e_2 = (2, 2, 1, 2)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (1, -2, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 3-ю координаты вектора $v = (-3, -8, -1, -5)$ в этом базисе.

ЕГ44◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (4, -1, 2, 2)\ , \quad u_2 = (2, 1, 2, 1)\ , \quad u_3 = (0, -3, -4, -3)$$
$$u_4 = (4, 4, 6, 3)\ , \quad u_5 = (2, -1, 0, 0)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (0, -6, 4, -3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ44◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 272 & 104 & -88 \\ 104 & 296 & -40 \\ -88 & -40 & 200 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ44◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-5, -3, 2, 3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, -4, 2, 4)$, $(-4, -3, 1, 3)$, $(-6, -2, 3, 3)$ и $(-6, -3, 4, 4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ44◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{26} & \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{3\sqrt{3}}{13} \\ \frac{-3\sqrt{78}}{26} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{13}}{13} \\ \frac{-9\sqrt{2}}{13} & \frac{\sqrt{39}}{13} & \frac{-7\sqrt{3}}{39} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{2}-8}{34} & \frac{4\sqrt{2}-8-3\sqrt{34}}{34} & \frac{-3\sqrt{2}+6-\sqrt{34}}{17} \\ \frac{3\sqrt{34}+4\sqrt{2}-8}{34} & \frac{-13\sqrt{2}-8}{34} & \frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}+6}{17} \\ \frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}+6}{17} & \frac{-3\sqrt{2}+6-\sqrt{34}}{17} & \frac{-4\sqrt{2}-9}{17} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{-4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{-4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} \\ \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+9}{17} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-4}{14} & \frac{6\sqrt{2}-6\sqrt{21}-4\sqrt{6}}{56} & \frac{6\sqrt{6}+2\sqrt{7}-12\sqrt{2}}{28} \\ \frac{-2\sqrt{3}-3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{39\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{56} & \frac{-3\sqrt{6}+4\sqrt{7}+6\sqrt{2}}{28} \\ \frac{-6\sqrt{3}+\sqrt{14}+12}{28} & \frac{-9\sqrt{2}-4\sqrt{21}+6\sqrt{6}}{56} & \frac{5\sqrt{6}+18\sqrt{2}}{28} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ45◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 2, 1, 1)$, $e_2 = (1, -2, -1, 1)$, $e_3 = (-1, 2, -1, 1)$, $e_4 = (2, 2, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (10, -14, -8, 1)$ в этом базисе.

ЕГ45◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, 4, -4, 3)\ , \quad u_2 = (0, -5, 6, -3)\ , \quad u_3 = (-2, -1, 4, 3)$$
$$u_4 = (2, 1, -2, 1)\ , \quad u_5 = (0, -4, 4, -4)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-1, 2, -4, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ45◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 1458 & -486 & -162 \\ -486 & 450 & -90 \\ -162 & -90 & 666 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ45◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, -2, 3, 0)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-5, 0, 3, 1)$, $(-5, -1, 3, 0)$, $(-5, -3, 4, 2)$ и $(-4, -2, 5, 1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ45◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}+4-2\sqrt{3}}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2}{12} \\ \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}-4}{6} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}+2}{12} & \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-5\sqrt{2}-2}{12} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4}{12} & \frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2}{12} \\ \frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{6}-4}{12} & \frac{-\sqrt{3}+4}{6} & \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}+4}{12} \\ \frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2}{12} & \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}{12} & \frac{-5\sqrt{3}+2}{12} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ46◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 2, 1, -2)$, $e_2 = (0, -1, 1, 1)$, $e_3 = (2, 0, 0, 1)$, $e_4 = (2, 2, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 3-ю координаты вектора $v = (7, 4, -7, -1)$ в этом базисе.

ЕГ46◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (6, 2, -2, 8)\ , \quad u_2 = (5, 3, -4, 4)\ , \quad u_3 = (5, 3, -5, 2)$$
$$u_4 = (0, -4, 2, -2)\ , \quad u_5 = (4, 0, -2, 2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (4, -3, 4, 0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ46◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 320 & 160 & 160 \\ 160 & 800 & 0 \\ 160 & 0 & 800 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ46◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, 1, -2, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, 1, -2, -1)$, $(3, 2, 0, -1)$, $(2, 1, -1, -1)$ и $(1, 0, -1, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ46◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} & \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+3\sqrt{17}-8}{34} \\ \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{17}+6}{17} & \frac{-4\sqrt{3}+9}{17} & \frac{-3\sqrt{3}-\sqrt{17}-6}{17} \\ \frac{-4\sqrt{3}-3\sqrt{17}-8}{34} & \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{17}-6}{17} & \frac{-13\sqrt{3}+8}{34} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{3} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ47⋄1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1,-1,1,0)$, $e_2 = (2,-1,-1,2)$, $e_3 = (0,2,1,0)$, $e_4 = (-1,-1,2,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-4,-17,3,5)$ в этом базисе.

ЕГ47⋄2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (3,-1,1,-1)\ , \quad u_2 = (5,-3,4,-2)\ , \quad u_3 = (2,-1,3,1)$$
$$u_4 = (4,-2,2,-2)\ , \quad u_5 = (-3,2,-3,1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-1,6,-2,0)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ47⋄3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 882 & 147 & -441 \\ 147 & 245 & -147 \\ -441 & -147 & 441 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ47⋄4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1,-3,1,2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(0,-1,1,2)$, $(2,-2,2,2)$, $(1,-1,0,4)$ и $(1,-2,0,3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ47⋄5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}-1}{11} & \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{66}-2\sqrt{6}}{44} & \frac{3\sqrt{6}+\sqrt{22}-6\sqrt{2}}{22} \\ \frac{-\sqrt{3}-3\sqrt{11}+2}{22} & \frac{15\sqrt{2}+\sqrt{6}}{22} & \frac{-3\sqrt{6}+\sqrt{22}+6\sqrt{2}}{22} \\ \frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{11}+6}{22} & \frac{-9\sqrt{2}-\sqrt{66}+6\sqrt{6}}{44} & \frac{\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{11} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}+1}{11} & \frac{-\sqrt{2}+3\sqrt{22}+2}{22} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{22}-6}{22} \\ \frac{-\sqrt{2}-3\sqrt{22}+2}{22} & \frac{5\sqrt{2}+1}{11} & \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{22}-6}{22} \\ \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{22}-6}{22} & \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{22}-6}{22} & \frac{\sqrt{2}+9}{11} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{11}{28} & \frac{6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{9+2\sqrt{42}}{28} \\ \frac{6+3\sqrt{42}}{28} & \frac{1}{14} & \frac{-18+\sqrt{42}}{28} \\ \frac{9-2\sqrt{42}}{28} & \frac{-18-\sqrt{42}}{28} & \frac{-13}{28} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{19} & \frac{-\sqrt{57}-\sqrt{3}}{19} & \frac{-3\sqrt{19}+3}{19} \\ \frac{-3\sqrt{19}+3}{19} & \frac{-3\sqrt{3}}{19} & \frac{\sqrt{19}+9}{19} \\ \frac{-3\sqrt{19}-3}{19} & \frac{-\sqrt{57}+9\sqrt{3}}{57} & \frac{-9}{19} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ48◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, 2, 0, 1)$, $e_2 = (-1, -1, -2, 2)$, $e_3 = (1, -2, 0, 1)$, $e_4 = (0, -1, -1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 2-ю координаты вектора $v = (9, 0, 14, -8)$ в этом базисе.

ЕГ48◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-7, 2, -4, -2)\ , \quad u_2 = (0, 2, 0, 2)\ , \quad u_3 = (-6, 1, -3, -2)$$
$$u_4 = (-2, 1, -2, -1)\ , \quad u_5 = (1, -1, 2, 1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (1, -1, 2, -2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ48◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 425 & 145 & -575 \\ 145 & 505 & -215 \\ -575 & -215 & 1625 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ48◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, 5, 2, -5)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-4, 7, 3, -5)$, $(-3, 7, 2, -6)$, $(-4, 6, 4, -4)$ и $(-4, 7, 3, -4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ48◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+4}{6} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{5\sqrt{2}+2}{12} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{-4-\sqrt{3}}{6} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \\ \frac{-4+\sqrt{3}}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{-\sqrt{42}-6\sqrt{3}}{42} & \frac{-3\sqrt{14}+2}{14} \\ \frac{-\sqrt{14}+6}{14} & \frac{-3\sqrt{3}}{14} & \frac{2\sqrt{14}+3}{14} \\ \frac{-3\sqrt{14}-2}{14} & \frac{-2\sqrt{42}+3\sqrt{3}}{42} & \frac{-1}{14} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-13}{18} & \frac{-4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} \\ \frac{-4+3\sqrt{3}}{18} & \frac{-13}{18} & \frac{1+3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1+3\sqrt{3}}{9} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-5}{9} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ49◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1,1,-1,2)$, $e_2 = (2,0,2,0)$, $e_3 = (-1,2,2,-1)$, $e_4 = (2,0,-1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (17,-8,6,1)$ в этом базисе.

ЕГ49◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2,3,-1,0)\ , \quad u_2 = (-3,-3,-3,3)\ , \quad u_3 = (0,-1,5,-4)$$
$$u_4 = (1,4,-1,-2)\ , \quad u_5 = (-1,0,-4,3)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-2,3,-2,1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ49◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 272 & 104 & -88 \\ 104 & 296 & -40 \\ -88 & -40 & 200 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ49◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-2,0,-3,1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3,2,-2,1)$, $(-3,0,-1,2)$, $(0,0,-2,1)$ и $(-1,-1,-1,2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ49◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{-\sqrt{15}}{10} & \frac{-7}{10} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-6\sqrt{2}-\sqrt{3}}{18} & \frac{-\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{-2\sqrt{6}+1}{6} & \frac{-\sqrt{3}}{18} & \frac{\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}-2}{6} & \frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{18} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-5}{9} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{1+3\sqrt{3}}{9} \\ \frac{1+3\sqrt{3}}{9} & \frac{-13}{18} & \frac{-4+3\sqrt{3}}{18} \\ \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{-13}{18} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} \\ \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4}{6} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ50◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (2,0,-1,0)$, $e_3 = (0,2,0,2)$, $e_4 = (2,-2,2,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 2-ю координаты вектора $v = (0,-8,-6,-14)$ в этом базисе.

ЕГ50◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (3,-2,1,1)\,, \quad u_2 = (-3,0,1,-1)\,, \quad u_3 = (3,-1,0,1)$$
$$u_4 = (-5,3,-2,-3)\,, \quad u_5 = (3,-1,2,5)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-3,1,-1,2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ50◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 720 & -240 & -240 \\ -240 & 800 & 0 \\ -240 & 0 & 800 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ50◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1,-4,-4,-1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1,-2,-4,-2)$, $(1,-3,-4,0)$, $(2,-4,-3,-2)$ и $(0,-4,-4,0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ50◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-7}{12} & \frac{-2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{1-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-5}{6} & \frac{2+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{1+6\sqrt{2}}{12} & \frac{2-3\sqrt{2}}{12} & \frac{-7}{12} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2}{12} \\ \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4}{6} & \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-15\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{24} & \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{12} & \frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2}{12} \\ \frac{6\sqrt{2}+6+4\sqrt{6}}{24} & \frac{-\sqrt{6}+4\sqrt{2}}{6} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4}{12} \\ \frac{-3\sqrt{2}+12-2\sqrt{6}}{24} & \frac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{12} & \frac{-5\sqrt{3}+2}{12} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ51◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (1,0,0,2)$, $e_2 = (-2,-2,-1,0)$, $e_3 = (-2,-2,-1,-2)$, $e_4 = (-2,0,1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 3-ю координаты вектора $v = (2,6,4,-9)$ в этом базисе.

ЕГ51◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-5,-6,0,-5)\ ,\quad u_2 = (-1,-2,-2,-3)\ ,\quad u_3 = (6,4,-6,0)$$
$$u_4 = (2,4,3,5)\ ,\quad u_5 = (-2,-3,-1,-3)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (4,-4,3,-5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ51◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 32 \\ -16 & 1040 & -64 \\ 32 & -64 & 272 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ51◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1,-4,0,3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1,-3,1,3)$, $(0,-2,1,5)$, $(0,-3,1,3)$ и $(0,-5,1,4)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ51◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+8}{18} & \frac{2\sqrt{2}-2}{9} & \frac{-7\sqrt{2}-8}{18} \\ \frac{-2-4\sqrt{2}}{9} & \frac{1-4\sqrt{2}}{9} & \frac{-2\sqrt{2}+2}{9} \\ \frac{-\sqrt{2}-8}{18} & \frac{2+4\sqrt{2}}{9} & \frac{-5\sqrt{2}+8}{18} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-15\sqrt{2}+8\sqrt{6}}{36} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{9} & \frac{-4\sqrt{3}-11}{18} \\ \frac{3\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{18} & \frac{-4\sqrt{6}+\sqrt{2}}{9} & \frac{-\sqrt{3}+1}{9} \\ \frac{-12\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{36} & \frac{-\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{9} & \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{2}-1}{3} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{\sqrt{2}-1}{3} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ52◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 1, 1, -1)$, $e_2 = (2, 1, -1, -2)$, $e_3 = (-1, -2, -2, 2)$, $e_4 = (0, 2, 1, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (10, 0, -5, -6)$ в этом базисе.

ЕГ52◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-1, -5, 0, 4)\ , \quad u_2 = (-2, 0, -5, -2)\ , \quad u_3 = (1, 3, 1, -2)$$
$$u_4 = (-1, 3, -6, -4)\ , \quad u_5 = (-1, -3, 0, 2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-4, 6, -6, 2)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ52◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 464 & 256 & -544 \\ 256 & 320 & -320 \\ -544 & -320 & 1040 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ52◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(0, 5, -3, 4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(0, 6, -2, 6)$, $(1, 4, -1, 5)$, $(1, 6, -2, 4)$ и $(-1, 5, -3, 5)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ52◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $$\begin{pmatrix} \frac{-39\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{56} & \frac{-2\sqrt{6}-6\sqrt{7}-4\sqrt{2}}{28} & \frac{-3\sqrt{3}+2\sqrt{14}-6}{28} \\ \frac{-6\sqrt{2}+6\sqrt{21}-4\sqrt{6}}{56} & \frac{-5\sqrt{6}+4\sqrt{2}}{14} & \frac{6\sqrt{3}+\sqrt{14}+12}{28} \\ \frac{-9\sqrt{2}-4\sqrt{21}-6\sqrt{6}}{56} & \frac{6\sqrt{6}-2\sqrt{7}+12\sqrt{2}}{28} & \frac{-5\sqrt{3}+18}{28} \end{pmatrix}$$

б) $$\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}+2}{28} & \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{14}-6}{28} \\ \frac{-2\sqrt{3}-3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{5\sqrt{3}+4}{14} & \frac{6\sqrt{3}-\sqrt{14}-12}{28} \\ \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{14}-6}{28} & \frac{6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} & \frac{5\sqrt{3}+18}{28} \end{pmatrix}$$

в) $$\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{2}-2}{28} & \frac{2\sqrt{2}+4-6\sqrt{7}}{28} & \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{7}+6}{28} \\ \frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{5\sqrt{2}-4}{14} & \frac{-6\sqrt{2}+2\sqrt{7}-12}{28} \\ \frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{7}+6}{28} & \frac{-6\sqrt{2}-2\sqrt{7}-12}{28} & \frac{5\sqrt{2}-18}{28} \end{pmatrix}$$

г) $$\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}}{11} & \frac{1-3\sqrt{33}}{22} & \frac{-3\sqrt{6}-3\sqrt{22}}{44} \\ \frac{\sqrt{3}+9\sqrt{11}}{66} & \frac{-6}{11} & \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{22}}{44} \\ \frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{11}}{66} & \frac{-3-\sqrt{33}}{22} & \frac{5\sqrt{6}}{11} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ53◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1, 0, -2, -1)$, $e_2 = (-2, 0, 1, 2)$, $e_3 = (0, -1, -2, -1)$, $e_4 = (0, 2, -2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-3, 4, 23, 14)$ в этом базисе.

ЕГ53◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-3, -6, -2, -1)\ , \quad u_2 = (-4, 0, -2, 0)\ , \quad u_3 = (-1, 2, -1, -1)$$
$$u_4 = (-4, 0, -1, 2)\ , \quad u_5 = (2, -4, 0, -2)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-5, 3, -4, 3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ53◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 612 & -288 & -18 \\ -288 & 612 & -18 \\ -18 & -18 & 1602 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ53◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-4, 3, -5, -1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-3, 2, -6, -1)$, $(-4, 4, -5, 0)$, $(-5, 3, -4, -1)$ и $(-2, 3, -4, 0)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ53◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}-1}{5} & \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} & \frac{2+\sqrt{2}}{5} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{10} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{5} & \frac{-\sqrt{2}\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{2}-8}{10} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}}{27} & \frac{-3\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-9\sqrt{2}-\sqrt{6}}{18} \\ \frac{9+\sqrt{3}}{27} & \frac{-13}{18} & \frac{4\sqrt{6}-9\sqrt{2}}{36} \\ \frac{-9+\sqrt{3}}{27} & \frac{-4-3\sqrt{3}}{18} & \frac{13\sqrt{6}}{36} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} & \frac{-4}{9} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{4} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ54◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2,-1,-1,0)$, $e_2 = (-1,1,0,1)$, $e_3 = (1,0,0,-1)$, $e_4 = (2,0,1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 4-ю и 1-ю координаты вектора $v = (9,-1,1,-8)$ в этом базисе.

ЕГ54◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (6,-1,-2,3)\ ,\quad u_2 = (7,-7,1,-4)\ ,\quad u_3 = (-8,3,2,-3)$$
$$u_4 = (-6,5,0,1)\ ,\quad u_5 = (9,-5,-1,0)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (3,-5,6,-3)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ54◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 425 & 145 & -575 \\ 145 & 505 & -215 \\ -575 & -215 & 1625 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ54◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(-1,-1,-1,-3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(-2,-1,-2,-3)$, $(-2,-2,-1,-1)$, $(-1,-1,0,-1)$ и $(-1,0,1,-2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ54◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{3}}{14} & \frac{2-3\sqrt{42}}{28} & \frac{-6\sqrt{6}-6\sqrt{7}}{56} \\ \frac{2\sqrt{3}+9\sqrt{14}}{84} & \frac{-15}{28} & \frac{3\sqrt{6}-12\sqrt{7}}{56} \\ \frac{6\sqrt{3}-3\sqrt{14}}{84} & \frac{-3-2\sqrt{42}}{28} & \frac{23\sqrt{6}}{56} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-2}{11} & \frac{6-3\sqrt{22}}{22} & \frac{6+3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{6+3\sqrt{22}}{22} & \frac{-9}{22} & \frac{2\sqrt{22}-9}{22} \\ \frac{6-3\sqrt{22}}{22} & \frac{-2\sqrt{22}-9}{22} & \frac{-9}{22} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{26} & \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{-9}{13} \\ \frac{-3\sqrt{39}}{26} & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{39}}{13} \\ \frac{-9}{13} & \frac{\sqrt{39}}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-10+4\sqrt{2}}{14} & \frac{2\sqrt{2}-6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{6\sqrt{6}+2\sqrt{21}+12\sqrt{3}}{84} \\ \frac{4+6\sqrt{14}+4\sqrt{2}}{28} & \frac{-13\sqrt{2}+2}{28} & \frac{3\sqrt{6}-4\sqrt{21}+6\sqrt{3}}{84} \\ \frac{-12+2\sqrt{14}-12\sqrt{2}}{28} & \frac{-3\sqrt{2}-4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{5\sqrt{6}-18\sqrt{3}}{84} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ55◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, 0, 1, -1)$, $e_2 = (2, -2, 1, 1)$, $e_3 = (0, -1, 1, -2)$, $e_4 = (2, 1, 0, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 4-ю координаты вектора $v = (20, -4, 0, 20)$ в этом базисе.

ЕГ55◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (1, 3, 2, -3)\ , \quad u_2 = (5, 7, 6, -5)\ , \quad u_3 = (-1, -1, -1, -1)$$
$$u_4 = (2, 2, 2, -1)\ , \quad u_5 = (-3, 1, -1, 1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-1, 5, -2, 1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ55◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 80 & 32 & -16 \\ 32 & 272 & -64 \\ -16 & -64 & 1040 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ55◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(1, 1, -1, -3)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, 0, 0, -1)$, $(3, 3, -2, -3)$, $(1, 0, 0, -1)$ и $(2, 3, -1, -2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ55◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{2} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-2+\sqrt{2}}{3} & \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2}{6} & \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{18} \\ \frac{2\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{3} & \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{18} \\ \frac{-2\sqrt{3}-2-2\sqrt{2}}{6} & \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2}{6} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{9} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+2}{12} & \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4}{12} & \frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2}{12} \\ \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}+4}{12} & \frac{-\sqrt{3}+4}{6} & \frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{6}-4}{12} \\ \frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{6}-2}{12} & \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4}{12} & \frac{-5\sqrt{3}+2}{12} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ56◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2, 0, -2, -2)$, $e_2 = (1, 0, -2, 0)$, $e_3 = (1, -1, -1, -1)$, $e_4 = (1, -1, 2, 1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (-9, -1, 1, -9)$ в этом базисе.

ЕГ56◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-2, 0, 2, 1)\ , \quad u_2 = (-2, 2, 0, -1)\ , \quad u_3 = (-4, 2, 2, 0)$$
$$u_4 = (-4, 1, 3, 1)\ , \quad u_5 = (-4, 3, 5, 4)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (3, -3, 5, -5)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ56◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 1458 & -486 & -162 \\ -486 & 450 & -90 \\ -162 & -90 & 666 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ56◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(2, -4, 2, 1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(2, -2, 3, 3)$, $(1, -2, 3, 3)$, $(3, -4, 2, 2)$ и $(2, -5, 1, 2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ56◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-10+8\sqrt{2}}{18} & \frac{-2\sqrt{2}+2}{9} & \frac{7\sqrt{6}+8\sqrt{3}}{54} \\ \frac{2\sqrt{2}+8}{9} & \frac{-4\sqrt{2}+1}{9} & \frac{-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{27} \\ \frac{-2-8\sqrt{2}}{18} & \frac{-4\sqrt{2}-2}{9} & \frac{5\sqrt{6}-8\sqrt{3}}{54} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} & \frac{-\sqrt{3}+1}{9} & \frac{-4\sqrt{3}-11}{18} \\ \frac{-\sqrt{3}-5}{9} & \frac{-4\sqrt{3}+1}{9} & \frac{\sqrt{3}-1}{9} \\ \frac{-4\sqrt{3}-5}{18} & \frac{\sqrt{3}+5}{9} & \frac{-5\sqrt{3}+8}{18} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{3}-1}{3} & \frac{\sqrt{3}-1}{3} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ57◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1,-1,2,1)$, $e_2 = (-1,2,-1,0)$, $e_3 = (2,-1,1,-1)$, $e_4 = (2,0,0,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-1,8,-9,5)$ в этом базисе.

ЕГ57◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (2,1,2,-1)\ ,\quad u_2 = (1,-1,-2,2)\ ,\quad u_3 = (0,3,3,-2)$$
$$u_4 = (1,-1,-1,1)\ ,\quad u_5 = (0,0,-1,1)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-3,1,-5,1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ57◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 612 & -288 & -18 \\ -288 & 612 & -18 \\ -18 & -18 & 1602 \end{pmatrix}\ .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ57◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(2,-5,-1,-2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(1,-5,0,-1)$, $(2,-4,1,-3)$, $(2,-5,0,-2)$ и $(4,-5,1,-1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:
а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ57◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $$\begin{pmatrix} \frac{13\sqrt{3}-2}{28} & \frac{3\sqrt{3}+6-2\sqrt{14}}{28} & \frac{2\sqrt{3}+4+3\sqrt{14}}{28} \\ \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{5\sqrt{3}-18}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} \\ \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{-6\sqrt{3}-\sqrt{14}-12}{28} & \frac{5\sqrt{3}-4}{14} \end{pmatrix}$$

б) $$\begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{2}-2}{28} & \frac{-6\sqrt{3}+4\sqrt{42}+6\sqrt{6}}{56} & \frac{4+6\sqrt{14}-4\sqrt{2}}{28} \\ \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{7}-6}{28} & \frac{10\sqrt{3}+18\sqrt{6}}{56} & \frac{12-2\sqrt{14}-12\sqrt{2}}{28} \\ \frac{-2\sqrt{2}+6\sqrt{7}+4}{28} & \frac{12\sqrt{3}+2\sqrt{42}-12\sqrt{6}}{56} & \frac{10+4\sqrt{2}}{14} \end{pmatrix}$$

в) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-4+\sqrt{3}}{6} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{3} & \frac{-\sqrt{3}-4}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$$

г) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2\sqrt{6}-1}{6} & \frac{-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-2\sqrt{6}-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-\sqrt{6}+2}{6} \\ \frac{\sqrt{6}-2}{6} & \frac{\sqrt{6}+2}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ58◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (2,1,2,-1)$, $e_2 = (1,1,-2,1)$, $e_3 = (2,-1,-2,-1)$, $e_4 = (0,0,-2,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 2-ю и 1-ю координаты вектора $v = (2,-9,-4,-6)$ в этом базисе.

ЕГ58◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-3,-4,2,-3)\ ,\quad u_2 = (-4,-4,4,0)\ ,\quad u_3 = (-3,-2,4,-4)$$
$$u_4 = (3,4,-2,-3)\ ,\quad u_5 = (0,2,2,-5)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (5,-2,2,-1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ58◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 2448 & 432 & -912 \\ 432 & 2336 & -1360 \\ -912 & -1360 & 2000 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ58◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5,-3,-5,-4)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(6,-3,-6,-5)$, $(6,-2,-6,-5)$, $(4,-3,-4,-4)$ и $(4,-3,-3,-3)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ58◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{2}-8}{26} & \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{6-6\sqrt{2}}{13} \\ \frac{3\sqrt{26}}{26} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{-3\sqrt{2}+6}{13} & \frac{\sqrt{39}}{13} & \frac{4+9\sqrt{2}}{13} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{-6-3\sqrt{42}}{28} & \frac{18-\sqrt{42}}{28} \\ \frac{-6+3\sqrt{42}}{28} & \frac{11}{28} & \frac{9+2\sqrt{42}}{28} \\ \frac{18+\sqrt{42}}{28} & \frac{9-2\sqrt{42}}{28} & \frac{-13}{28} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3\sqrt{14}+2}{14} & \frac{\sqrt{14}-6}{14} \\ \frac{-3\sqrt{14}+2}{14} & \frac{1}{14} & \frac{-2\sqrt{14}-3}{14} \\ \frac{-\sqrt{14}-6}{14} & \frac{2\sqrt{14}-3}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{26} & \frac{3\sqrt{13}}{26} & \frac{9}{13} \\ \frac{3\sqrt{39}}{26} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{-\sqrt{39}}{13} \\ \frac{-9}{13} & \frac{\sqrt{13}}{13} & \frac{-7}{13} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ59◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-1,-2,0,2)$, $e_2 = (-2,2,-1,0)$, $e_3 = (-1,-1,1,0)$, $e_4 = (-1,2,-1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 3-ю и 2-ю координаты вектора $v = (0,7,-5,1)$ в этом базисе.

ЕГ59◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (-3,-5,-1,-3)\ ,\quad u_2 = (-4,-2,1,-5)\ ,\quad u_3 = (3,3,0,2)$$
$$u_4 = (-1,-1,0,0)\ ,\quad u_5 = (5,7,1,5)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-2,3,-1,1)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w.

ЕГ59◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 612 & -18 & -288 \\ -18 & 1602 & -18 \\ -288 & -18 & 612 \end{pmatrix}.$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ59◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(5,3,-3,-2)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(6,3,-3,-2)$, $(7,4,-2,-2)$, $(6,3,-2,-2)$ и $(7,3,-4,-1)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3
в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3
г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4
д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ59◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{3-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-1}{2} & \frac{6+3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{3+6\sqrt{2}}{12} & \frac{6-3\sqrt{2}}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{6}+2}{6} & \frac{2\sqrt{6}-1}{6} \\ \frac{-\sqrt{6}+2}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-\sqrt{6}-2}{6} \\ \frac{-2\sqrt{6}-1}{6} & \frac{\sqrt{6}-2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{36} & \frac{3-6\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-6+3\sqrt{2}}{12} & \frac{-\sqrt{3}}{6} & \frac{-6-3\sqrt{2}}{12} \\ \frac{-3-6\sqrt{2}}{12} & \frac{-6\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{36} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} & \frac{-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2}{12} \\ \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4}{12} & \frac{-\sqrt{2}+4}{6} & \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{12} \\ \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2}{12} & \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4}{12} & \frac{-5\sqrt{2}+2}{12} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).

ЕГ60◇1. Образуют ли векторы $e_1 = (-2,-1,-2,0)$, $e_2 = (-2,-1,2,0)$, $e_3 = (-1,-1,1,0)$, $e_4 = (0,1,-1,1)$ базис в координатном векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$? Если да, найдите 1-ю и 2-ю координаты вектора $v = (-11,-5,11,0)$ в этом базисе.

ЕГ60◇2. В евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ найдите в линейной оболочке векторов

$$u_1 = (6,-5,2,-1)\ ,\quad u_2 = (2,-1,0,0)\ ,\quad u_3 = (0,-1,1,-3)$$
$$u_4 = (-4,4,-2,2)\ ,\quad u_5 = (8,-6,2,0)$$

вектор u_w, ближайший к вектору $w = (-1,4,-5,4)$, и вычислите расстояние и косинус угла между векторами w и u_w .

ЕГ60◇3. Матрица Грама векторов $e_1 = \overrightarrow{AD}$, $e_2 = \overrightarrow{AB}$ и $e_3 = \overrightarrow{AA_1}$, выходящих из вершины A параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, имеет вид

$$\big((e_i,e_j)\big) = \begin{pmatrix} 882 & 147 & -441 \\ 147 & 245 & -147 \\ -441 & -147 & 441 \end{pmatrix} .$$

Найдите **а)** расстояние от точки C до плоскости A_1BD **б)** площадь треугольника A_1C_1D **в)** объём тетраэдра A_1C_1BD и **г)** радиус **д)** центр вписанного в него шара.

ЕГ60◇4. У вершины A четырёхмерного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^4$ координаты $(3,3,2,1)$, а у четырёх соседних с ней вершин — координаты $(4,3,2,1)$, $(2,4,2,3)$, $(3,4,3,3)$ и $(3,5,2,2)$. Обозначим через Δ_3 трёхмерный тетраэдр с вершинами в четырёх вершинах Π, соединённых рёбрами с противоположной к A вершиной, а через Δ_4 — четырёхмерный симплекс с основанием Δ_3 и вершиной A. Найдите:

а) четырёхмерный объём Δ_4 **б)** трёхмерный объём Δ_3

в) расстояние от A до трёхмерного подпространства, проходящего через Δ_3

г) центр и радиус четырёхмерного шара, описанного вокруг Δ_4

д) центр и радиус трёхмерного шара, описанного вокруг Δ_3.

ЕГ60◇5. Матрица линейного преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеет вид

а) $\begin{pmatrix} \frac{-8}{19} & \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{19}}{38} & \frac{9-3\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-9+3\sqrt{57}}{38} & \frac{-4\sqrt{3}}{57} & \frac{-27-\sqrt{57}}{38} \\ \frac{-9-3\sqrt{57}}{38} & \frac{-27\sqrt{3}+3\sqrt{19}}{114} & \frac{-4}{19} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{-9\sqrt{2}+1}{19} & \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{38}+6}{38} & \frac{-3\sqrt{2}+3\sqrt{38}-6}{38} \\ \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{38}+6}{38} & \frac{-5\sqrt{2}+9}{19} & \frac{-9\sqrt{2}-\sqrt{38}-18}{38} \\ \frac{-3\sqrt{2}-3\sqrt{38}-6}{38} & \frac{-9\sqrt{2}+\sqrt{38}-18}{38} & \frac{-5\sqrt{2}+9}{19} \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \frac{-13\sqrt{3}-2}{28} & \frac{-2\sqrt{3}+4-3\sqrt{14}}{28} & \frac{-3\sqrt{3}+6+2\sqrt{14}}{28} \\ \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{14}+4}{28} & \frac{-5\sqrt{3}-4}{14} & \frac{6\sqrt{3}+\sqrt{14}-12}{28} \\ \frac{-3\sqrt{3}-2\sqrt{14}+6}{28} & \frac{6\sqrt{3}-\sqrt{14}-12}{28} & \frac{-5\sqrt{3}-18}{28} \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} \frac{27\sqrt{2}+\sqrt{6}}{38} & \frac{-3\sqrt{6}+3\sqrt{38}+6\sqrt{2}}{38} & \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{19}-6}{38} \\ \frac{-9\sqrt{2}-3\sqrt{114}+6\sqrt{6}}{76} & \frac{5\sqrt{6}+9\sqrt{2}}{19} & \frac{9\sqrt{3}-\sqrt{19}-18}{38} \\ \frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{114}-6\sqrt{6}}{76} & \frac{9\sqrt{6}+\sqrt{38}-18\sqrt{2}}{38} & \frac{5\sqrt{3}+9}{19} \end{pmatrix}$

В каждом из случаев выясните, является ли это линейное преобразование ортогональным, и если является, то каким: поворотом, или композицией поворота с отражением в плоскости, перпендикулярной оси поворота (в обоих случаях явно укажите ось и угол поворота).