Итоговый письменный экзамен по геометрии

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой из задач оценивается в 10 баллов. Один ответ без обоснования оценивается в ноль баллов вне зависимости от того, правильный он или нет. Вклад в итоговую отметку даёт сумма набранных баллов в процентах от 60. Таким образом, для получения 100% достаточно полностью решить любые 6 задач из восьми.

Задача 1 (10 баллов). Дана прямоугольная матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ и столбец $b \in \mathbb{R}^m$ (той же высоты, что и матрица). Докажите, что система неравенств $Ax \leqslant b$ на столбец $x \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда задаёт непустой многогранник в $\mathbb{R}^n$, когда для любой строки из m неотрицательных чисел $y \in \mathbb{R}^{m*}_{\geqslant 0}$, такой что $yA = 0$, выполняется неравенство $yb \geqslant 0$.

Задача 2 (10 баллов). На листе бумаги нарисованы точка a и две прямые, пересекающиеся в точке b, не поместившейся на листе. Одной линейкой постройте прямую (ab).

Задача 3 (теорема Аполлония). Пусть точки A, B эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ лежат на его сопряжённых диаметрах[1], касательные к эллипсу в этих точках пересекаются в точке P, и O — центр эллипса.

а) **(10 баллов)** Докажите, что четырёхугольник $OAPB$ — параллелограмм, и вычислите его площадь. Зависит ли она от выбора сопряжённых диаметров?

б) **(10 баллов)** Вычислите сумму квадратов длин $|OA|^2 + |OB|^2$. Зависит ли она от выбора сопряжённых диаметров?

Задача 4 (10 баллов). Существует ли на комплексной проективной плоскости пучок коник, содержащий ровно одну вырожденную конику и не содержащий двойной прямой? Если да, приведите явный пример такого пучка. Если нет, объясните почему.

Задача 5. Поле $\mathbb{F}_9$ состоит из 9 элементов $a + ib$, где a и b пробегают поле $\mathbb{F}_3 = \{-1, 0, 1\}$ вычетов по модулю 3 и $i^2 = -1 \pmod 3$. Из скольких точек состоит

а) **(10 баллов)** проективная коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ в $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_9)$

б) **(10 баллов)** аффинная квадрика $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ в $\mathbb{A}^3(\mathbb{F}_9)$.

Задача 6 (10 баллов). Две гладких коники на евклидовой плоскости касаются друг друга в двух разных точках, и их общие касательные в этих точках пересекаются в точке p. Докажите, что прямая, соединяющая любой из фокусов любой из коник с точкой p, делит пополам один из двух углов между касательными, опущенными из этого фокуса на другую конику.

[1] напомним, что две прямые называются *сопряжёнными диаметрами* эллипса, если каждая из них проходит через центр эллипса и полюс другой прямой