Вопросы к коллоквиуму по Геометрии, что состоится в среду, 2 ноября

Как будет организован коллоквиум. На коллоквиуме каждому студенту будет выдан билет, содержащий два вопроса и задачу. Полный правильный ответ на каждый из вопросов оценивается в 35 баллов, полное правильное решение задачи — в 30 баллов. В приводимом ниже списке перечислены все вопросы, в тех формулировках, как они войдут в билеты.

Я постараюсь добиться того, чтобы полные правильные ответы на различные билеты требовали примерно одинаковых трудозатрат. Это означает, что в билетах будут встречаться некоторые куски из или, наоборот, комбинации перечисленных далее вопросов, ибо в списке, что представлен ниже, вопросы собраны в группы по близости тем, которые они охватывают, а не по тому, как они будут распределены между билетами.

Список теоретических вопросов. Ниже в квадратных скобках после вопроса и/или группы вопросов указаны ссылки на те разделы записок лекций, где можно прочитать полные ответы на сей вопрос и/или группу вопросов. *Убедитесь, что у Вас имеются самые последние обновления лекционных записок, иначе ссылки могут оказаться неверными!*

1) Определение векторного пространства [n° 1.1]. Порождающий набор является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим [n° 2.1]. Если векторы $w_1, w_2, \ldots, w_m$ порождают V, а векторы $u_1, u_2, \ldots, u_k$ линейно независимы, то $m \geqslant k$ и векторы w_i можно перенумеровать так, что набор $u_1, u_2, \ldots, u_k$, w_{k+1}, w_{k+2}, $\ldots$, w_m (получающихся заменой первых k векторов w_i векторами u_i) также будет порождать пространство V [лем. 2.2]. Теорема о базисе и определение размерности векторного пространства [сл. 2.1].

2) Сумма и пресечение подпространств $U, W \subset V$, равенство

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

[n° 2.2, предл. 2.3]. Трансверсальные подпространства, критерии трансверсальности [опр. 2.1, предл. 2.2, сл. 2.5]. Определение линейного отображения $F : V \longrightarrow W$, равенство

$$\dim V = \dim \ker F + \dim \operatorname{im} F$$

[опр. 1.1, n° 2.3, предл. 2.5].

3) Двойственные пространства и двойственные базисы [n° 2.4 , предл. 2.6 , опр. 2.3]. Изоморфизм $V \simeq V^{**}$ [n° 2.4.1]. Аннулятор $\operatorname{Ann}(M) \subset V$ множества линейных форм $M \subset V^*$, соотношения $\dim U + \dim \operatorname{Ann} U = \dim V$, $\operatorname{Ann}\operatorname{Ann} U = U$, $U \subset W \iff \operatorname{Ann}(W) \subset \operatorname{Ann}(U)$, $\operatorname{Ann}(U+W) = \operatorname{Ann}(U) \cap \operatorname{Ann}(W)$, $\operatorname{Ann}(U \cap W) = \operatorname{Ann}(U) + \operatorname{Ann}(W)$ [n° 2.5.1].

4) Определение объёма n-мерного ориентированного параллелепипеда, свойства объёма: кососимметричность, обращение в нуль на линейно зависимых векторах, полилинейность [опр. 3.1, лем. 3.1]. Корректность определения чётности перестановки и единственность объёма с точностью до пропорциональности [n° 3.1.1, n° 3.2]. Определение и свойства определителя квадратной матрицы: полилинейность, кососимметричность, $\det A = \det A^t$ [n° 3.3]. Существование объёма; набор векторов образует базис , если и только если натянутый на них параллелепипед имеет ненулевой объём; правило Крамера для отыскания координат разложения заданного вектора по заданному базису [n° 3.3.1, n° 3.3.2]

5) Матрица перехода $C_{uw} : w = u \cdot C_{uv}$, линейно выражающая набор векторов $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ через набор векторов $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ [n° 3.4]. Три определения произведения матриц [n° 3.4.1]. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ [предл. 3.3].

6) Определение аффинного пространства, ассоциированного с данным векторным пространством [n° 2.6]. Определение аффинного подпространства [n° 2.6.2], в частности определения прямой и плоскости в произвольном аффинном пространстве [прим. 2.12]. Уравнение аффинной гиперплоскости, проходящей через заданные точки [прим. 3.2], в частности, уравнения прямых на координатной плоскости [n° 1.4.2].

7) Центр тяжести набора взвешенных точек [лем. 1.4]. Теорема о группировании масс [упр. 1.3]. Независимость барицентрической комбинации точек от выбора «начальной» точки [n° 1.4.1]. Барицентрические координаты на плоскости [теор. 1.2] и в многомерном пространстве [n° 2.6.3, прим. 3.4].

8) Определение евклидова пространства, длины вектора и угла между векторами [опр. 1.2, n° 1.5]. Ортогональная проекция и нормальная составляющая вектора относительно другого ненулевого вектора [предл. 1.1]. Неравенства Коши – Буняковского – Шварца и тр-ка [сл. 1.2, сл. 1.3]. Уравнение гиперплоскости, перпендикулярной заданному вектору и проходящей через заданную точку [прим. 4.3]. Серединный перпендикуляр; существование и единственность описанного вокруг симплекса шара [прим. 4.4, n° 4.4.5].

9) Ортогонализация Грама – Шмидта; существование ортонормальных базисов [n° 4.1.2]. Ортогональная проекция вектора на подпространство и

нормальная составляющая вектора относительно подпространства [n° 4.3, предл. 4.4]. Соотношения $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$ и $V = U \oplus U^{\perp}$ [сл. 4.3, сл. 4.4].

10) Матрица Грама $G_{uv} = ((u_i, v_j))$ двух наборов векторов и её преобразование при линейной замене векторов [n° 4.2]. Определитель Грама Γ_v набора векторов $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ равен квадрату n-мерного объёма натянутого на них параллелепипеда [предл. 4.3]. Все ортонормальные базисы имеют равный по модулю объём; ориентация евклидова пространства [сл. 4.2, n° 4.2.1]. Объём неориентированного n-мерного параллелепипеда равен произведению неориентированного объёма его основания на длину опущенной на него высоты [прим. 4.5]. Расстояние от точки до гиперплоскости и угол (наименьший!) между вектором и гиперплоскостью [n° 4.3.1, прим. 4.6]. Векторное произведение в $\mathbb{R}^3$ и его обобщение: произведение $(n-1)$ векторов в $\mathbb{R}^n$ [прим. 4.7, прим. 4.8].

В качестве задач следует ожидать что-нибудь типа:

Чему равно расстояние от гиперплоскости, пересекающей оси координат в заданных точках, до заданной точки?

Чему равен угол между данными прямой и гиперплоскостью?

Чему равны площадь, объём, 4-мерный объём, и т. д. заданного параллелограмма или симплекса?

Напишите в $\mathbb{R}^5$ вектор, перпендикулярный трём или четырём заданным.

и т. п. Но могут быть и более творческие задачи:

Какое максимальное число векторов можно выпустить из одной точки в $\mathbb{R}^4$ (варианты: в $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^5$, и т. д.) так, чтобы все углы между ними были тупыми?

Есть ли у $2n$-мерного куба такое сечение двумерной плоскостью, которое является правильным $2n$-угольником?

Может ли двумерная плоскость, не пересекающая ни одного ребра 4-мерного симплекса (в $\mathbb{R}^4$), иметь с эти симплексом непустое пересечение?

и т. п.

Пример возможного билета.

ВОПРОС 1. Определение объёма n-мерного ориентированного параллелепипеда в n-мерном векторном пространстве. Свойства объёма: кососимметричность, обращение в нуль на линейно зависимых векторах и полилинейность.

вопрос 2. Неравенства Коши – Буняковского – Шварца и треугольника. Определение длины вектора и угла между векторами в евклидовом пространстве.

задача. Может ли двумерная плоскость, не пересекающая ни одного ребра 4-мерного симплекса (в $\mathbb{R}^4$), иметь с эти симплексом непустое пересечение?