Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 1. 2.XI.2011

Вопрос 1. Определение векторного пространства. Единственность нулевого вектора. Противоположный вектор $-v$ однозначно определяется по v. Соотношения $(-1)\cdot v = -v$ и $0 \cdot v = 0$.

Вопрос 2. Ортогонализация Грама – Шмидта; существование ортонормальных базисов.

Задача 1. Прямая $\ell_1 \subset \mathbb{R}^3$ лежит в плоскости XOZ и задаётся в ней уравнением $2x - 3z = 5$, а прямая $\ell_2 \subset \mathbb{R}^3$ лежит в плоскости YOZ и задаётся в ней уравнением $3y + 2z = 7$. Найдите расстояние между этими прямыми.

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 2. 2.XI.2011

Вопрос 1. Определения порождающего набора, линейной зависимости, базиса. Порождающий набор является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим.

Вопрос 2. Ортогональная проекция вектора на подпространство и нормальная составляющая вектора относительно подпространства. Кратчайшее расстояние от конца вектора до подпространства.

Задача 1. В векторном пространстве $\mathbb{R}^4$ задан конечный набор двумерных подпространств. Всегда ли найдётся двумерное подпространство, трансверсальное ко всем подпространствам из заданного набора?

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 3. 2.XI.2011

Вопрос 1. Три определения произведения матриц. Равенство $(AB)^t = B^t A^t$.

Вопрос 2. Определение аффинного пространства, ассоциированного с данным векторным пространством, и аффинного подпространства в нём. Покажите, что два аффинных подпространства с одним и тем же направляющим векторным подпространством либо не пересекаются, либо совпадают.

Задача 1. Зафиксируем произвольный четырёхмерный параллелепипед Π ненулевого объёма и рассмотрим четырёхмерный симплекс с вершиной в одной из вершин A параллелепипеда Π и четырьмя другими вершинами — в вершинах Π, соединённых ребром с противоположной к A вершиной. Зависит ли объём этого симплекса от выбора вершины A?

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 4. 2.XI.2011

Вопрос 1. Если векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$ порождают V, а векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы, то $m \geqslant k$ и векторы w_i можно перенумеровать так, что набор $u_1, u_2, \dots, u_k$, w_{k+1}, w_{k+2}, $\dots$, w_m (получающихся заменой первых k векторов w_i векторами u_i) также будет порождать V.

Вопрос 2. Определение объёма n-мерного ориентированного параллелепипеда, свойства объёма: кососимметричность, обращение в нуль на линейно зависимых векторах, полилинейность.

Задача 1. В правильном четырёхмерном симплексе $ABCDE$ обозначим через X середину отрезка, соединяющего центры двумерных граней ABC и CDE. Проходящая через точку X прямая YZ пересекает прямую AE в точке Y, а плоскость BCD — в точке Z. Найдите $\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{YZ}$.

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 5. 2.XI.2011

Вопрос 1. Теорема о базисе и определение размерности векторного пространства. В n-мерном векторном пространстве каждый линейно независимый набор из n векторов, и каждый порождающий набор из n векторов являются базисами.

Вопрос 2. Уравнение аффинной гиперплоскости в $\mathbb{A}^n$, проходящей через заданные n точек.

Задача 1. Таблица попарных скалярных произведений (e_i, e_j) векторов

$$e_1 = \overrightarrow{AD}\ , \quad e_2 = \overrightarrow{AB}\ , \quad e_3 = \overrightarrow{AA_1}\ ,$$

составляющих выходящие из A рёбра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, такова:

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Найдите объём тетраэдра A_1C_1BD.

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 6. 2.XI.2011

Вопрос 1. Сумма и пресечение векторных подпространств $U, W \subset V$, равенство

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

Вопрос 2. Векторное произведение в $\mathbb{R}^3$: вычисление в ортонормальном базисе и геометрическое описание (в частности, независимость от выбора ортонормального базиса).

Задача 1. Таблица попарных скалярных произведений (e_i, e_j) векторов

$$e_1 = \overrightarrow{AD}\,, \quad e_2 = \overrightarrow{AB}\,, \quad e_3 = \overrightarrow{AA}_1\,,$$

составляющих выходящие из A рёбра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, такова:

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите площадь треугольника B_1D_1C.

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 7. 2.XI.2011

Вопрос 1. Определение линейного отображения $F : V \longrightarrow W$, и подпространств $\ker F$ и $\operatorname{im} F$. Равенство $\dim V = \dim \ker F + \dim \operatorname{im} F$.

Вопрос 2. Определение евклидова пространства, длины вектора и угла между векторами. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца и неравенство треугольника.

Задача 1. Какое максимальное число векторов можно выпустить из заданной точки евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ так, чтобы все углы между ними были тупыми?

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 8. 2.XI.2011

Вопрос 1. Трансверсальные подпространства. Равносильности: $U \cap W = 0 \iff \forall v \in U + W$ имеется единственное представление $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W \iff \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

Вопрос 2. Определение евклидова пространства. Ортогональная проекция и нормальная составляющая вектора относительно другого ненулевого вектора. Кратчайшее расстояние от конца одного данного вектора до одномерного подпространства, натянутого на другой данный ненулевой вектор.

Задача 1. Может ли поле из 27 элементов содержать подполе из 9 элементов ?

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 9. 2.XI.2011

Вопрос 1. Двойственные пространства и двойственные базисы. Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ линейно независимы, то функционалы вычисления $\mathrm{ev}_{v_1}, \mathrm{ev}_{v_2}, \dots, \mathrm{ev}_{v_m} : V^* \longrightarrow \Bbbk$ тоже линейно независимы.

Вопрос 2. Матрица Грама $G_{uv} = ((u_i, v_j))$ двух наборов векторов и её преобразование при линейной замене векторов.

Задача 1. Найдите расстояние от точки $(-2, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$ до плоскости, пересекающей координатные оси при $x = 3$, $y = 5$, $z = 2$.

CopyLeft: «Вышка» & $\mathscr{ALG}$

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 10. 2.XI.2011

Вопрос 1. Корректность определения чётности перестановки. Правило ниточек.

Вопрос 2. Вычисление наименьшего угла между вектором и векторами из заданного подпространства в евклидовом векторного пространстве.

Задача 1. В $\mathbb{R}^4$ нарисован произвольный 4-мерный симплекс положительного объёма, и строго внутри него отмечена некоторая точка P. Всегда ли можно провести через неё двумерную плоскость, не пересекающую рёбер симплекса?

CopyLeft: «Вышка» & $\mathscr{ALG}$

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 11. 2.XI.2011

Вопрос 1. Определение определителя квадратной матрицы. Полилинейность определителя. Равенство $\det\, A = \det A^t$.

Вопрос 2. Описание ГМТ, равноудалённых от двух данных в n-мерном евклидовом пространстве.

Задача 1. Найдите объём правильного четырёхмерного кокуба, описанного вокруг шара радиуса 1.

CopyLeft: «Вышка» & $\mathscr{ALG}$

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 12. 2.XI.2011

Вопрос 1. Набор векторов образует базис, если и только если натянутый на них параллелепипед имеет ненулевой объём. Правило Крамера для отыскания координат разложения заданного вектора по заданному базису.

Вопрос 2. Ортогональное дополнение к подпространству в евклидовом пространстве. Соотношения $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$ и $V = U \oplus U^{\perp}$.

Задача 1. Найдите объём правильного четырёхмерного симплекса, вписанного в шар радиуса 1.

CopyLeft: «Вышка» & $\mathscr{ALG}$

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 13. 2.XI.2011

Вопрос 1. Матрица перехода C_{uw}, линейно выражающая набор векторов $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ через набор векторов $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ по формуле $w = u \cdot C_{uv}$. Три определения произведения матриц. Равенство $C_{uw} = C_{uv}C_{vw}$.

Вопрос 2. Все ортонормальные базисы евклидова пространства имеют равный по модулю объём. Ориентация евклидова пространства.

Задача 1. Дан произвольный параллелепипед в $\mathbb{R}^3$. Надлежащим образом выбирая на каждой из его граней по диагонали, можно получить ровно два различных тетраэдра. Равны ли их объёмы?

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 14. 2.XI.2011

Вопрос 1. Существование и единственность центра тяжести набора взвешенных точек. Теорема о группировании масс.

Вопрос 2. Обобщённое «векторное произведение» $(n-1)$ векторов в $\mathbb{R}^n$: его геометрическое описание и вычисление в координатах относительно ортонормального базиса. Отыскание координат вектора, перпендикулярного $(n-1)$ заданным векторам n-мерного евклидова пространства.

Задача 1. В евклидовом векторном пространстве задана гиперплоскость Π и два вектора, лежащие в одном полупространстве относительно неё. Верно ли, что если угол между этими двумя векторами тупой, то и угол между их проекциями тупой?

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 15. 2.XI.2011

Вопрос 1. Независимость барицентрической комбинации точек от выбора «начальной» точки. Барицентрические координаты точки относительно симплекса, выражение барицентрических координат через объёмы (можно ограничиться 2-мерным случаем — барицентрическими координатами точки относительно треугольника на плоскости).

Вопрос 2. Уравнение гиперплоскости, перпендикулярной заданному вектору и проходящей через заданную точку. Вычисление расстояния от точки до такой гиперплоскости.

Задача 1. Может ли двумерное векторное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа прямых?

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 16. 2.XI.2011

Вопрос 1. Аннулятор $\mathrm{Ann}\,(N) \subset V^*$ множества векторов $N \subset V$. Соотношение

$$\dim U + \dim \mathrm{Ann}\, U = \dim V\,.$$

Вопрос 2. Определитель Грама Γ_v набора векторов $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ равен квадрату n-мерного объёма натянутого на них параллелепипеда.

Задача 1. Найдите в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ угол между плоскостью, параллельной оси OX и пересекающей координатную плоскость YOZ по прямой $z + 2y = 8$, и плоскостью, параллельной оси OZ и пересекающей координатную плоскость XOY по прямой $5y - x = 1$.

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 17. 2.XI.2011

Вопрос 1. Двойственность: правило $U \rightleftarrows \mathrm{Ann}\,(U)$ задаёт биекцию между подпространствами в V и в V^*, причём $U \subset W \iff \mathrm{Ann}\,(W) \subset \mathrm{Ann}\,(U)$.

Вопрос 2. Существование и единственность точки, равноудалённой от $n+1$ заданных и не лежащих в одной гиперплоскости точек n-мерного евклидова пространства.

Задача 1. Внутри четырёхмерного симплекса $ABCDE \subset \mathbb{R}^4$ ненулевого объёма взяли точку P. Существует ли прямая, проходящая через P и пересекающая прямую (AB) и плоскость (CDE)? Если вдруг существует, то много ли таких прямых?

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 18. 2.XI.2011

Вопрос 1. Канонический изоморфизм $V \simeq V^{**}$.

Вопрос 2. Объём неориентированного n-мерного параллелепипеда равен произведению неориентированного объёма его основания на длину опущенной на него высоты.

Задача 1. В четырёхмерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^4$ заданы непересекающиеся прямая $\ell = p + v \cdot t$, и двумерная плоскость $\Pi = q + U$, такие что $v \notin U$. Верно ли, что объединение всех прямых (ab) с $a \in \ell$, $b \in \Pi$ совпадает со всем пространством $\mathbb{A}^4$?

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 19. 2.XI.2011

Вопрос 1. Единственность (с точностью до пропорциональности) ненулевого кососимметричного и линейного по каждому аргументу отображения $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{\omega} \Bbbk$ (число аргументов совпадает с размерностью пространства V).

Вопрос 2. Отыскание расстояния от заданной точки до m-мерного аффинного пространства, натянутого на $m+1$ заданных и не лежащих в одном $(m-1)$-мерном аффинном подпространстве точек евклидова пространства.

Задача 1. Три вектора в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ таковы, что все скалярные произведения между ними неотрицательны. Всегда ли найдётся ортонормальный базис в $\mathbb{R}^3$, такой что все три данных вектора окажутся в одном координатном октанте?

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 20. 2.XI.2011

Вопрос 1. Определение определителя квадратной матрицы. Линейность определителя по каждому аргументу. Кососимметричность определителя. Существование ненулевой формы объёма.

Вопрос 2. Ортогональная проекция вектора на подпространство в евклидовом векторном пространстве, кратчайшее расстояние от конца вектора до подпространства реализуется вдоль единственного перпендикуляра, опущенного из конца вектора на подпространство.

Задача 1. Для произвольных трёх векторов u, v, w трёхмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ выразите $([u,v],[v,w])$ через скалярные произведения векторов u, v и w.

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 21. 2.XI.2011

Вопрос 1. Равенство $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Вопрос 2. Определение евклидова пространства. Неравенство треугольника и неравенство Коши – Буняковского – Шварца.

Задача 1. Найдите объём правильного октаэдра, описанного около единичной сферы в $\mathbb{R}^3$.

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 22. 2.XI.2011

Вопрос 1. Аннуляторы $\mathrm{Ann}\,(M) \subset V$ множества линейных форм $M \subset V^*$ и $\mathrm{Ann}\,(N) \subset V^*$ множества векторов $N \subset V$. Соотношение $\mathrm{Ann}\,\mathrm{Ann}\,U = U$.

Вопрос 2. Равенство $\det^2(u,w) = \det \begin{pmatrix} (u,u) & (u,w) \\ (w,u) & (w,w) \end{pmatrix}$ для любых двух векторов u, w на евклидовой координатной плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача 1. Опишите геометрическое место концов векторов, равноудалённых от двух заданных гиперплоскостей $u_1^\perp$ и $u_2^\perp$, перпендикулярных непропорциональным ненулевым векторам u_1, u_2 евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 23. 2.XI.2011

Вопрос 1. Двойственность: правило $U \rightleftarrows \mathrm{Ann}\,(U)$ задаёт биекцию между подпространствами в V и в V^*, причём $\mathrm{Ann}\,(U+W) = \mathrm{Ann}\,(U) \cap \mathrm{Ann}\,(W)$.

Вопрос 2. Отношение объёма n-мерного параллелепипеда к объёму симплекса, натянутого на его вершину и все соседние с нею вершины.

Задача 1. Напишите направляющие векторы биссектрис углов, возникающих при пересечении прямых $2x - y = 5$ и $3y + x = 2$ на евклидовой координатной плоскости $\mathbb{R}^2$.

Коллоквиум по геометрии по материалам 1-го модуля. Билет 24. 2.XI.2011

Вопрос 1. Двойственность: правило $U \rightleftarrows \mathrm{Ann}\,(U)$ задаёт биекцию между подпространствами в V и в V^*, причём $\mathrm{Ann}\,(U \cap W) = \mathrm{Ann}\,(U) + \mathrm{Ann}\,(W)$.

Вопрос 2. Существование и единственность точки, равноудалённой от $n+1$ заданных и не лежащих в одной гиперплоскости точек n-мерного евклидова пространства.

Задача 1. Таблица попарных скалярных произведений (e_i, e_j) векторов

$$e_1 = \overrightarrow{AD}\,, \quad e_2 = \overrightarrow{AB}\,, \quad e_3 = \overrightarrow{AA_1}\,,$$

составляющих выходящие из A рёбра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \subset \mathbb{R}^3$, такова:

$$\big((e_i, e_j)\big) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите площадь треугольника B_1D_1C.