Расширения Галуа

ТГЗ◇1 (норма и след). Пусть $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ — расширение Галуа степени n с группой Галуа $G = \operatorname{Gal}\mathbb{F}/\Bbbk$. Напомню, что *следом* $\operatorname{Sp}(\vartheta)$ и *нормой* $N(\vartheta)$ элемента $\vartheta \in \mathbb{F}$ называются соответственно след и определитель $\Bbbk$-линейного оператора умножения на ϑ: $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $x \mapsto \vartheta x$. Обозначим через $\chi_\vartheta(t) = \det(t\mathrm{Id}_\mathbb{F} - \vartheta)$ и $\mu_\vartheta(t)$ характеристический и минимальный многочлены этого оператора. Покажите, что $\chi_\vartheta(t) = \prod_{g\in G}(t - g(\vartheta)) = \mu_\vartheta(t)^{n/\deg\vartheta}$ и выведите отсюда, что $\operatorname{Sp}(\vartheta) = \sum_{g\in G} g(\vartheta)$ и $N(\vartheta) = \prod_{g\in G} g(\vartheta)$.

ТГЗ◇2. Пусть $f \in \Bbbk[x]$ неприводим и приведён, а $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$. Покажите, что дискриминант[1] многочлена f является квадратом в $\Bbbk$, если и только если группа $\operatorname{Gal} f/\Bbbk$ осуществляет лишь чётные перестановки корней многочлена f.

ТГЗ◇3. Обозначим через $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ «школьные» арифметические квадратные корни. Покажите, что **а)** $\mathbb{Q}\big[\sqrt{2}, \sqrt{3}\big]$ **б)** $\mathbb{Q}\Big[\sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}\Big]$ являются расширениями Галуа поля $\mathbb{Q}$ и найдите их группы Галуа над $\mathbb{Q}$.

ТГЗ◇4. Найдите группы Галуа над $\mathbb{Q}$ многочленов **а)** $x^3 - 3x + 1$ **б)** $x^3 + 2x + 1$ **в)** $x^4 + 1$ **г)** $x^4 + x^2 + 1$ **д)** $x^4 - 5x^2 + 6$ **е)** $x^4 + 2x^2 + x + 3$ **ж)** $x^4 + x^2 + x + 1$ **з)** $x^5 - 2$.

ТГЗ◇5*. Покажите, что при любом простом $p \in \mathbb{N}$ и любом $a \in \mathbb{Q} \smallsetminus \mathbb{Q}^p$ группа Галуа многочлена $x^p - a$ над $\mathbb{Q}$ изоморфна группе $\mathrm{Af}_1(\mathbb{F}_p)$ аффинных преобразований прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$.

ТГЗ◇6. Найдите группу Галуа многочлена $x^3 - x - 1$ над полем $\mathbb{Q}\big[\sqrt{-23}\big]$.

ТГЗ◇7. Предъявите неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ степени 6 с группой Галуа S_6 над полем $\mathbb{Q}$.

ТГЗ◇8. При каких n примитивный корень $e^{2\pi i/n}$ имеет степень 2 над $\mathbb{Q}$?

ТГЗ◇9. Какие корни из единицы содержатся в поле $\mathbb{Q}\big[\sqrt{-5}\big]$?

ТГЗ◇10* (построение Гаусса). Объясните, как построить циркулем и линейкой правильный 17-угольник.

ТГЗ◇11. Найдите поле разложения над $\mathbb{F}_p$ многочлена $x^m - 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и простых $p \in \mathbb{N}$.

ТГЗ◇12 (критерий Рабина). Покажите, что для неприводимости в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлена f степени n необходимо и достаточно, чтобы f делил $x^{p^n} - x$ и был взаимно прост с $x^{p^{n/q}} - x$ для всех простых $q \mid n$.

ТГЗ◇13. Пользуясь только соответствием Галуа и тем, что любой многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ нечётной степени имеет корень в $\mathbb{R}$, а из любого числа $z \in \mathbb{C}$ можно извлечь в $\mathbb{C}$ квадратный корень, докажите, что

а) не существует нетривиальных конечных расширений $\mathbb{F} \supsetneq \mathbb{R}$ нечётной степени

б*) каждый многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ имеет корень в $\mathbb{C}$

в*) поле $\mathbb{C}$ является алгебраическим замыканием поля $\mathbb{R}$.

ТГЗ◇14. Приведите пример расширения полей степени 4, не содержащего подполей степени 2.

[1] Напомню, что *дискриминантом* приведённого многочлена $f(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$, где α_i — корни многочлена f в любом поле, где он полностью разлагается на линейные множители, называется произведение $\prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2 \in \Bbbk$.