

Расширения полей

ТГ2♦1. Найдите минимальный многочлен числа $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$.

ТГ2♦2. Верно ли, что а) $\cos 36^\circ \in \mathbb{Q}(\sin 36^\circ)$ б) $\sin 36^\circ \in \mathbb{Q}(\cos 36^\circ)$?

ТГ2♦3. Совпадает ли поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$ с полем а) $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ б) $\mathbb{Q}(\sqrt{-1} + \sqrt{2})$?

ТГ2♦4. Найдите размерность $\mathbb{Q}$ -линейной оболочки вещественных чисел

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}.$$

ТГ2♦5. Найдите степень над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочлена а) $x^4 - 2$ б) $x^5 - 2$ в) $x^p - a$, где $p \in \mathbb{N}$ простое и $a \in \mathbb{Q}$ не является p -той степенью.

ТГ2♦6. Покажите, что в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлен $x^{p^n} - x$ является произведением всех неприводимых над $\mathbb{F}_p$ приведённых многочленов, степени которых делят n .

ТГ2♦7. Покажите, что в результате присоединения к $\mathbb{F}_p$ всех примитивных корней из единицы всех отличных от p простых степеней получится алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{F}_p}$.

ТГ2♦8. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое, $q = p^n$, и $a \in \mathbb{F}_p^\times$. Покажите, что многочлен $x^p - x - a$ неприводим в $\mathbb{F}_q[x]$ если и только если $p \nmid n$.

ТГ2♦9. При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$?

ТГ2♦10. Пусть $\text{char } \mathbb{k} = p > 0$. Покажите, что каждый неприводимый многочлен $f \in \mathbb{k}[x]$ представляется в виде $f(x) = g(x^{p^s})$, где $g \in \mathbb{k}[x]$ неприводим и сепарабелен. Выведите отсюда, что все корни f в поле его разложения имеют одинаковую кратность p^s .

ТГ2♦11. Пусть $n \not\equiv 2 \pmod{3}$. Приводим ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен а) $x^n - x + 1$ б) $x^n + x + 1$?

ТГ2♦12. Покажите, что группа правильного n -угольника D_n , порождённая поворотом τ и отражением σ , действует на проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ и на поле рациональных функций $\mathbb{C}(x)$ дробно линейными заменами координаты

$$\tau : x \mapsto e^{\frac{2\pi i}{n}} x, \quad \sigma : x \mapsto x^{-1},$$

и опишите поле её инвариантов $\mathbb{C}(x)^{D_n} \subset \mathbb{C}(x)$.

ТГ2♦13*. Пусть $G = \text{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$, а её подгруппы $P \subset G$ и $N \subset P$ состоят из преобразований $t \mapsto at + b$ с $a \neq 0$ и $t \mapsto t + b$ соответственно. Покажите, что поля инвариантов

а) $\mathbb{F}_q(t)^N = \mathbb{F}_q(t^q - t)$ б) $\mathbb{F}_q(t)^P = \mathbb{F}_q((t^q - t)^{q-1})$

в) $\mathbb{F}_q(t)^G = \mathbb{F}_q\left((t^{q^2} - t)^{q+1} / (t^q - t)^{q^2+1}\right).$

ТГ2♦14*. Пусть $\text{char } \mathbb{k} = p$, а элементы x и y алгебраически независимы над $\mathbb{k}$. Найдите степень $[\mathbb{k}(x, y) : \mathbb{k}(x^p, y^p)]$ и покажите, что существует бесконечное множество таких полей $\mathbb{F}$, что $\mathbb{k}(x^p, y^p) \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{k}(x, y)$.

ТГ2♦15*. Коммутативное кольцо называется *нормальным*, если оно не имеет делителей нуля и целозамкнуто в своём поле частных. Покажите, что целое замыкание нётерова нормального кольца A с полем частных Q_A в любом конечном расширении $L \supset Q_A$ конечно порождено как A -модуль.

ТГ2♦16*. Покажите, что кольцо многочленов над нормальным кольцом нормально.