

Расширения коммутативных колец

ТГ1♦1. Покажите, что всякий ненулевой гомоморфизм из поля в произвольное коммутативное кольцо с единицей является вложением.

ТГ1♦2. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[x]/(x^3 + x + 1)$. Обозначим через $\vartheta \in \mathbb{K}$ класс одночлена x по модулю $x^3 + x + 1$. Покажите, что $\mathbb{K}$ является полем, каждый элемент которого однозначно представляется в виде $b_0 + b_1\vartheta + b_2\vartheta^2$ с $b_i \in \mathbb{Q}$, и запишите в таком виде элементы $(1 + 2\vartheta)^{-1}$ и $(1 + \vartheta + \vartheta^2)^{-1}$.

ТГ1♦3. Пусть в расширениях полей $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{F}$ элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{L}$ составляют базис $\mathbb{L}$ как векторного пространства над $\mathbb{K}$, а элементы $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{F}$ — базис $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{L}$. Покажите, что mn произведений $\varphi_i\lambda_j \in \mathbb{F}$ образуют базис $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{K}$.

ТГ1♦4. Опишите факторкольца $A[x]/(f)$ для

а) $A = \mathbb{Z}/(6), f = 3x^2$

б) $A = \mathbb{Z}/(6), f = 2x^3 + 1$

в) $A = \mathbb{Z}, f = 5x - 1$

и выясните, вкладывается ли в них A в качестве подкольца, состоящего из классов констант.

ТГ1♦5*. Пусть нод многочленов $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ равен 1 в кольце $\mathbb{Z}[x]$. Обязательно ли конечно факторкольцо $\mathbb{Z}[x]/(f, g)$?

ТГ1♦6. Существует ли многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ степени $\deg f > 1$, редукция которого по модулю p неприводима в $\mathbb{F}_p[x]$ для всех простых $p \in \mathbb{N}$?

ТГ1♦7. Пусть A — коммутативное кольцо, и A -модуль M линейно порождается над A элементами $m_1, \dots, m_r \in M$. Рассмотрим A -линейный эндоморфизм $\varphi : M \rightarrow M$, действующий на эти образующие по правилу $(m_1, \dots, m_r) \mapsto (m_1, \dots, m_r) \cdot F$, где F — квадратная $r \times r$ матрица с элементами из A . Докажите, что

а) $\det(F) \cdot M \subset \varphi(M)$

б) если модуль M не аннулируется умножением ни на какой ненулевой элемент из A , то $IM \neq M$ для любого собственного идеала $I \subsetneq A$.

ТГ1♦8. Пусть поле $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ конечномерно как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Покажите, что кольцо $O_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{K}$ целых над $\mathbb{Z}$ элементов поля $\mathbb{K}$ является свободным $\mathbb{Z}$ -модулем ранга, равного степени¹ $\deg \mathbb{K}/\mathbb{Q}$ поля $\mathbb{K}$ над $\mathbb{Q}$.

ТГ1♦9. Опишите кольца целых (над $\mathbb{Z}$) чисел в полях

а) $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1)$

б) $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 3)$

в*) $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}[x]/(x^2 - d)$, где $d \in \mathbb{Z}$ свободно от квадратов

г*) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{1}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}[x]/(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

ТГ1♦10*. Пусть идеал $I \subset \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ таков, что факторкольцо $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/I$ является полем. Может ли это поле быть бесконечным?

¹Т. е. размерности $\mathbb{K}$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$.