Классические производные функторы

A8◇1. Установите взаимно-однозначное соответствие между классами точных троек

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

с точностью до изоморфизма, тождественного на M и N, и элементами абелевой группы $\mathrm{Ext}^1(M,N)$. Какой операции на точных тройках отвечает сложение в Ext^1?

A8◇2. Покажите, что точные тройки $C \hookrightarrow D \twoheadrightarrow E$ и $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ включаются в коммутативную диаграмму (с точными строками и столбцами)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & C \arrow[d, hook] \\
A \arrow[r, hook] & F \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & D \arrow[d, two heads] \\
& E \arrow[r, equal] & E
\end{tikzcd}$$

если и только если равно нулю произведение Ионеды[1] $\xi_2\xi_1 \in \mathrm{Ext}^2(E,A)$ классов $\xi_1 \in \mathrm{Ext}^1(C,A)$ и $\xi_2 \in \mathrm{Ext}^1(E,C)$, отвечающих исходным точным тройкам по предыдущей задаче.

A8◇3 (инъективные модули). Покажите, что следующие свойства модуля I над (коммутутивным) кольцом K попарно эквивалентны:

а) любой гомоморфизм $M \xrightarrow{\varphi} I$ продолжается на любое расширение[2] $M \hookrightarrow N$;

б) любой K-линейный гомоморфизм $\mathfrak{q} \xrightarrow{\varphi} I$ любого идеала $\mathfrak{q} \subset K$ продолжается до гомоморфизма $\mathfrak{q} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} I$;

в) функтор $\mathrm{Hom}(*\,,\,I)$ точен[3]; **г)** $\mathrm{Ext}^1(M,I) = 0\ \forall M$; **д)** $\mathrm{Ext}^\nu(M,I) = 0\ \forall\ M$ и $\forall\ \nu \geqslant 1$;

A8◇4. Покажите, что **а)** $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ являются инъективными $\mathbb{Z}$-модулями

б) для любого $\mathbb{Z}$-модуля M и ненулевого $m \in M$ есть морфизм $M \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(m) \neq 0$.

в) над произвольным коммутативным кольцом K теми же свойствами обладает модуль $E_K = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (гомоморфизмов аддитивных групп);

г) всякий K-модуль M канонически вкладывается в произведение[4] $M_I \stackrel{\text{def}}{=} \prod_\varphi [E_K]_\varphi$, которое является инъективным K-модулем.

д) По предыдущему всякий модуль M обладает правой инъективной резольвентой

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d} I^0 \xrightarrow{d} I^1 \xrightarrow{d} I^2 \longrightarrow \ \cdots$$

Покажите, что всякий момрфизм модулей $M \xrightarrow{\overline{\varphi}} N$ однозначно с точностью до гомотопии продолжается до морфизма резольвент[5] $I^\bullet \xrightarrow{f} J^\bullet$.

A8◇5 (резольвента Картана – Эйленберга). Для любого комплекса K-модулей $M^\bullet$ постройте точные по столбцам двойные комплексы[6]

а) $I^{\bullet,\bullet}$ инъективных модулей (сосредоточенный в верхней полуплоскости);

---

[1] напомню, что произведение Ионеды $\mathrm{Ext}^\mu(L,M) \otimes \mathrm{Ext}^\nu(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\mu+\nu}(L,N)$ определяется спуском на когомологии отображения композиции морфизмов резольвент

[2] т. е. $\exists\ N \xrightarrow{\widehat{\varphi}} I$, ограничение которого на M равно φ

[3] т. е. переводит точные тройки в точные тройки или, что то же самое, сохраняет точность последовательностей

[4] прямое произведение модулей E_K, занумерованных всевозможными K-линейными отображениями $M \xrightarrow{\varphi} E_K$

[5] в частности, инъективная резольвента единственна с точностью до гомотопической эквивалентности

[6] их тотальные комплексы называются *резольвентами Картана – Эйленберга* комплекса $M^\bullet$

б) $P^{\bullet}_{\bullet}$ проективных модулей (сосредоточенный в нижней полуплоскости);
столбцы которых являются инъективными (соотв. проективными) резольвентами модулей $M^{\bullet}$, а строчные когомологии (рассматриваемые как комплексы относительно вертикального дифференциала) являются инъективными (соотв. проективными) резольвентами модулей когомологий $H^{\bullet}(M)$. Покажите, что каждый морфизм комплексов единственным с точностью до гомотопии образом продолжается до морфизма их резольвент Картана – Эйленберга[7].

A8◇6 (использование ацикличных резольвент). Пусть комплекс $K^{\bullet}$ имеет единственный ненулевой модуль когомологий $H^0(K^{\bullet}) = M$, а комплекс $L^{\bullet}$ — единственный ненулевой модуль когомологий $H^0(L^{\bullet}) = N$. Покажите, что:

а) Если $\mathrm{Ext}^{\nu}(K^i, N) = 0$ при всех i и $\nu \geqslant 1$, то $\mathrm{Ext}^m(M, N)$ можно вычислять как m-тую когомологию комплекса[8] $\mathrm{Hom}(K^{\bullet}, N)$;

б) Если $\mathrm{Ext}^{\nu}(M, L^i) = 0$ при всех i и $\nu \geqslant 1$, то $\mathrm{Ext}^m(M, N)$ можно вычислять как m-тую когомологию комплекса $\mathrm{Ext}^{\nu}(M, L^{\bullet})$.

в) Сформулируйте и докажите аналогичные факты про Tor ы.

A8◇7. Вычислите все $\mathrm{Tor}_{\nu}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ в категории конечно порождённых $\mathbb{Z}$-модулей в случае когда: **а)** m, n взаимно просты **б)** $m = p^r$, $n = p^s$, где $p \geqslant 2$ простое

A8◇8. Пусть $\Bbbk$ — поле, $K = \Bbbk[x, y]$, $L = \Bbbk[x, y]/(x)$, $M = k[x, y]/(x, y)$. В категории K-модулей вычислите все Ext'ы и Tor'ы между K, L и M.

A8◇9. Обозначим через $S = \oplus S^n V$ симметрическую алгебру конечномерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ характерестики нуль, а через F — свободный S-модуль ранга 1. В категории S-модулей вычислите[9] **а)** $\mathrm{Tor}_{\nu}(F, F)$ **б)** $\mathrm{Tor}_{\nu}(F, \Bbbk)$ **в)** $\mathrm{Tor}_{\nu}(\Bbbk, \Bbbk)$ **г)** $\mathrm{Ext}^{\nu}(F, F)$ **д)** $\mathrm{Ext}^{\nu}(F, \Bbbk)$ **е)** $\mathrm{Ext}^{\nu}(\Bbbk, F)$ **ж)** $\mathrm{Ext}^{\nu}(\Bbbk, \Bbbk)$

A8◇10. В предыдущей задаче рассмотрим вместо S внешнюю алгебру $\Lambda = \oplus \Lambda^n V$ и свободный левый Λ-модуль F ранга 1. В категории левых Λ-модулей вычислите **а)** $\mathrm{Tor}_{\nu}(F, F)$ **б)** $\mathrm{Tor}_{\nu}(F, \Bbbk)$ **в)** $\mathrm{Tor}_{\nu}(\Bbbk, \Bbbk)$ **г)** $\mathrm{Ext}^{\nu}(F, F)$ **д)** $\mathrm{Ext}^{\nu}(F, \Bbbk)$ **е)** $\mathrm{Ext}^{\nu}(\Bbbk, F)$ **ж)** $\mathrm{Ext}^{\nu}(\Bbbk, \Bbbk)$

A8◇11 (бар-конструкция). Для произвольной (в т.ч. некоммутативной) ассоциативной алгебры A с единицей над $\Bbbk$ и целого $m \geqslant 0$ обозначим через $B_m = A \underset{\Bbbk}{\otimes} A^{\otimes m} \underset{\Bbbk}{\otimes} A$ тензорное произведение (над $\Bbbk$) $m+2$ копий A. Покажите, что

а) отображение $B_m \xrightarrow{d} B_{m-1}$ переводящее $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_m \otimes a_{m+1}$ в

$$\sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu} a_0 \otimes \cdots \otimes a_{\nu-1} \otimes a_{\nu} a_{\nu+1} \otimes a_{\nu+2} \cdots \otimes a_{m+1}$$

имеет $d^2 = 0$ и доставляет свободную резольвенту для A в категории левых $A \otimes A^{\mathrm{opp}}$-модулей[10], и для любого A-модуля M тензорное произведение $B_{\bullet} \underset{A}{\otimes} M$ будет свободной резольвентой M в категории левых A-модулей[11].

б) $\mathrm{Ext}^{\nu}_A(A, N)$ является ν-той когомологией[12] комплекса $C^{\bullet}_A(N)$, имеющего в качестве однородной компоненты степени m пространство $C^m = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A^{\otimes(m+1)}, N)$ всех $\Bbbk$-полилинейных форм $A \times \cdots \times A \xrightarrow{\varphi} N$ с дифференциалом $C^m \xrightarrow{d} C^{m+1}$, действующим по правилу $d\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_{m+1}) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \varphi(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{m+1})$.

в) мультипликативная структура на $\mathrm{Ext}^{\bullet}(A, A)$, заданная произведением Ионеды, согласуется с мультипликативной структурой, происходящей из тензорного произведения полилинейных форм[13].

---

[7] в частности, таковая резольвента единственна с точностью до гомотопической эквивалентности

[8] т. е. использовать $K^{\bullet}$ *вместо* проективной резольвенты для N

[9] всюду ниже $\Bbbk = S/V \cdot S$ — это тривиальный S-модуль, на котором каждый $v \in V$ действует нулём

[10] левый $A \otimes A^{\mathrm{opp}}$-модуль M — это то же самое, что A-A бимодуль: он обладает как левой, так и правой A-модульными структурами, в которых $a_1 \otimes a_2 \in A \otimes A^{\mathrm{opp}}$ действует как $m \mapsto a_1 \cdot m \cdot a_2$

[11] она называется *бар-резольвентой*

[12] $\mathrm{Ext}^{\nu}_A(A, N)$ иногда называют «ν-тыми когомологиями алгебры A с коэффициентами в N»

[13] т. е. произведение Ионеды когомологических классов коциклов $\varphi \in C^m$, $\psi \in C^n$ представляет собою когомологический класс формы $\varphi \otimes \psi$, действующей на набор векторов из A по правилу $\varphi \otimes \psi(a_0, \ldots, a_{m+n+1}) = \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_m) \cdot \psi(a_{m+1}, \ldots, a_{m+n+1})$