Категории и функторы.

A5◇1. Категория Δ образована конечными упорядоченными множествами $\underline{n} = \{0, 1, \dots, n\}$ (где $n \geqslant 0$) и неубывающими отображениями $\underline{n} \longrightarrow \underline{m}$.

а°) Порождается ли алгебра стрелок[1] $\mathbb{Z}[\Delta]$ (как ассоциативная алгебра) стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{\underline{n}}$, $\partial_n^{(i)} : \underline{(n-1)} \hookrightarrow \underline{n}$ (вложение, образ которого не содержит i) и $s_n^{(i)} : \underline{n} \twoheadrightarrow \underline{(n-1)}$ (наложение, склеивающее i с $(i+1)$)?

б*) Каковы образующие идеала соотношений между ними?

A5◇2. Покажите, что контравариантный функтор $\mathrm{Hom}(\,*\,, \underline{1})$ задаёт эквивалентность между категорией Δ^{opp} и категорией ∇, объектами которой являются множества $\underline{n}$ с $n \geqslant 1$, а морфизмами — неубывающие отображения $\underline{n} \longrightarrow \underline{m}$, такие что $0 \mapsto 0$ и $n \mapsto m$.

A5◇3°. Покажите, что категория Δ_{big}, образованная *всевозможными* конечными упорядоченными множествами и неубывающими отображениями между ними эквивалентна своей малой полной подкатегории Δ.

A5◇4 (функторы Hom). Свяжем с каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ произвольной категории $\mathscr{C}$ функтор $\mathscr{C} \xrightarrow{h^X} \mathscr{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов $h^X(Y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, Y)$, а стрелку $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$ в композицию $h^X(Y_1) = \mathrm{Hom}(X, Y_1) \xrightarrow{\psi \mapsto \varphi\circ\psi} \mathrm{Hom}(X, Y_2) = h^X(Y_2)$, и функтор $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{h_X} \mathscr{S}et$, переводящий объект Y в $h_X(Y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y, X)$, а стрелку $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$ в композицию $h_X(Y_2) = \mathrm{Hom}(Y_2, X) \xrightarrow{\psi \mapsto \psi\circ\varphi} \mathrm{Hom}(Y_1, X) = h_X(Y_1)$. Проверьте, что сопоставление $X \mapsto h_X$ является функтором из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{F}un(\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}, \mathscr{S}et)$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — функтором из $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}$ в $\mathscr{F}un(\mathscr{C}, \mathscr{S}et)$.

A5◇5. Покажите, что в категории модулей $\mathscr{M}od(K)$ над коммутативным кольцом K (например, в категории $\mathscr{A}b = \mathscr{M}od(\mathbb{Z})$ абелевых групп) при применении функтора h^X к точной последовательности $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ получается точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, C)\ ,$$

самая правая стрелка в которой не обязательно сюрьективна. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение про контравариантный функтор h_X.

A5◇6. Постройте произведения $X \times Y$ и копроизведения $X \otimes Y$ в категориях **а)** множеств **б)** топ. пространств **в)** $\mathbb{Z}$-модулей **г)** групп **д)** коммутативных колец с единицей[2]

A5◇7. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое. Рассмотрим в категории абелевых групп $\mathscr{A}b$ объекты $A_n = \mathbb{Z}/(p^n)$ и для каждой пары $n > m$ обозначим через $\psi_{nm} : \mathbb{Z}/(p^n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(p^m)$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/(p^m) \xhookrightarrow{[1]\mapsto[p^{n-m}]} \mathbb{Z}/(p^n)$ стандартное вложение. Найдите[3]

а) $\lim A_n$ отн. стрелок ψ_{mn} **б)** $\mathrm{colim} A_n$ отн. стрелок φ_{mn}.

A5◇8. Рассмотрим в $\mathscr{A}b$ объекты $B_n = \mathbb{Z}/(n)$ и для каждой пары натуральных чисел $n|m$ обозначим через $\psi_{nm} : \mathbb{Z}/(n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(m)$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/(m) \xhookrightarrow{[1]\mapsto[n/m]} \mathbb{Z}/(n)$ стандартное вложение. Найдите[4]: **а)** $\lim B_n$ отн. стрелок ψ_{nm} **б)** $\mathrm{colim} B_n$ отн. стрелок φ_{mn}.

A5◇9. Пусть $\mathscr{N}$ — произвольное частично упорядоченное множество. Покажите, что любая диаграмма $\mathscr{N} \xrightarrow{X} \mathscr{S}et$ в категории множеств имеет копредел.

---

[1] т.е. конечные линейные комбинации стрелок с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, если конец стрелки φ не совпадает с началом ψ, то $\psi\varphi \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0$ в $\mathbb{Z}[\Delta]$

[2] и гомоморфизмами, переводящими $1 \mapsto 1$

[3] ответы: $\lim A_n = \mathbb{Z}_p$ есть множество целых p-адических чисел, а $\mathrm{colim} A_n \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ состоит из классов дробей вида z/p^ℓ с $z \in \mathbb{Z}$, рассматриваемых с точностью до целой части

[4] ответы: $\mathrm{colim} B_n = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, а $\lim B_n = \prod_p \mathbb{Z}_p$ есть неархимедово пополнение $\mathbb{Z}$ (т.е. прямое произведение всех колец целых p-адических чисел по всем простым p)

Указание. Назовём *хвостом* диаграммы X любое семейство элементов $x_\nu \in X_\nu$ обладающее двумя свойствами:

(1) с каждым ν, представленным в семействе, в семействе представлены и все $\mu > \nu$;

(2) для любых двух членов семейства $X_{\nu\mu}(x_\nu) = x_\mu$ при $\mu < \nu$.

Покажите, что $\mathrm{colim} X$ изоморфен фактор множеству хвостов по эквивалентности $\{x_\alpha\} \sim \{y_\beta\}$, означающей, что для любых элементов x_α и y_β существует индекс $\gamma > \alpha, \beta$, такой что $X_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = X_{\beta\gamma}(y_\beta)$.

Сопряжённость и (ко) представимость. Если функторы $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ между категориями $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ связаны функториальным по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и $Y \in \mathscr{D}$ изоморфизмом $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))$, то F называется *левым сопряжённым* к G, а G — *правым сопряжённым* к F. В этой ситуации возникают естественные преобразования функторов $F \circ G \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ и $Id_{\mathscr{C}} \xrightarrow{\varrho} G \circ F$: стрелка $FG(Y) \xrightarrow{\lambda_Y} Y$, задающая действие λ над $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$, является образом в $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FG(Y), Y)$ элемента $\mathrm{Id}_{G(Y)} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G(Y), G(Y))$, ϱ строится аналогично. Функтор $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$ называется *представимым*, если он изоморфен в категории $\mathscr{F}un(\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}, \mathscr{S}et)$ функтору h_X для некоторого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Функтор $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}et$ называется *копредставимым*, если он изоморфен в категории $\mathscr{F}un(\mathscr{C}, \mathscr{S}et)$ функтору h^X для некоторого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Объект X называется при этом *(ко) представляющим* объектом соответствующего функтора.

А5◇10. Докажите, что для существования левого сопряжённого функтора F к данному функтору $\mathscr{C} \xleftarrow{G} \mathscr{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ ковариантный функтор

$$\mathscr{D} \xrightarrow{Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))} \mathscr{S}et \tag{1}$$

был копредставим, и буде это так, искомый левый сопряжённый функтор будет переводить X в копредставляющий объект функтора (1). Найдите двойственные необходимые и достаточные условия существования правого сопряжённого к данному функтору $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$.

А5◇11. Постройте левый сопряжённый функтор $\mathscr{S}et \xrightarrow{F} \mathscr{C}$ к функтору забывания алгебраической структуры $\mathscr{S}et \xleftarrow{G} \mathscr{C}$, если $\mathscr{C}$ — это категория **а)** векторных пространств, **б)** групп, **в)** коммутативных и **г)** произвольных ассоциативных алгебр над полем. Дайте в каждом из случаев явное (теоретико-множественное) описание естественного преобразования между композицией сопряжённых функторов и тождественным функтором.

А5◇12. Скажем, что функтор $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и любой диаграммы $\mathscr{N} \xrightarrow{\Phi} \mathscr{C}$ из того, что L является (ко) пределом Φ в $\mathscr{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ \Phi$ в $\mathscr{D}$. Проверьте, что всякий левый сопряжённый функтор перестановочен с копределами, а всякий правый — с пределами.

А5◇13. Для любого расширения $S \subset R$ ассоциативных алгебр с единицей постройте левый и правый сопряжённые функторы к функтору ограничения $\mathscr{M}od(R) \longrightarrow \mathscr{M}od(S)$ левых R-модулей до левых S-модулей[5].

А5◇14* (локализация). Назовём подмножество S коммутативного кольца A с единицей *мультипликативным*, если оно замкнуто относительно умножения, содержит единицу и не содержит нуля. Рассмотрим такое $S \subset A$ как категорию, в которой $\mathrm{Hom}_S(f, g) = \{a \in A \mid af = g\}$, и зададим функтор из S в категорию A-модулей, посылая объект $f \in S$ в свободный A-модуль $A \cdot \left[\frac{1}{f}\right]$ (с одной образующей, которую мы обозначили $\left[\frac{1}{f}\right]$), и посылая стрелку $a \in \mathrm{Hom}_S(f, g)$ в гомоморфизм $\left[\frac{1}{f}\right] \longmapsto a \cdot \left[\frac{1}{g}\right]$. Покажите, что копредел полученной диаграммы[6] $S \longrightarrow \mathscr{M}od(A)$

а) существует и описывается как модуль, состоящий из классов дробей a/s с $a \in A$, $s \in S$ по модулю эквивалентности $a_1/s_1 \sim a_2/s_2$, означающей, что $s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ для некоторого $s \in S$;

б) стандартные правила сложения и умножения дробей корректно определяют на $S^{-1}A$ структуру коммутативного кольца с единицей, а также A-алгебры.

---

[5] Ответ: левый переводит V в $R \underset{S}{\otimes} V$, правый — в $\mathrm{Hom}_S(R, V)$

[6] он обозначается $S^{-1}A = \underset{s \in S}{\mathrm{colim}}\, A \cdot \left[\frac{1}{s}\right]$ и называется *локализацией* (или *модулем частных*) A относительно S