Пределы и предпучки.

Терминология. Функторы $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$ называются *предпучками* (множеств) на категории $\mathscr{C}$. Категорию $\mathscr{F}un(\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}, \mathscr{S}et)$ мы будем для краткости обозначать через $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$. Категория $\mathscr{C}$, в которой все диаграммы[1] имеют (ко) пределы, называется *(ко) замкнутой.* (Ко) предел диаграммы $X \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$ называется (ко) уравнивателем стрелок φ, ψ. В категории множеств ураниватель изоморфен прообразу диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при отображении $\varphi \times \psi : X \longrightarrow Y \times Y$, а коуравнитель изоморфен фактору множества Y по наименьшему отношению эквивалентности $R \subset Y \times Y$, содержащему образ $\varphi \times \psi$.

А$5\frac{1}{2}$◇1. Постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп и коммутативных колец с единицей.

А$5\frac{1}{2}$◇2. Докажите, что для замкнутости категории $\mathscr{C}$ достаточно существования в $\mathscr{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и общим концом.

Указание. Для заданной диаграммы $\mathscr{N} \xrightarrow{X} \mathscr{C}$ рассмотрите прямые произведения

$$A = \prod_{\nu} X_\nu \,, \qquad B = \prod_{\mu\to\nu} X_\nu$$

(в A все объекты диаграммы входят по одному разу, а в B сомножителей столько же, сколько стрелок в $\mathscr{N}$ и каждый объект X_ν входит в него столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается) и покажите, что $\lim X$ изоморфен уравнивателю диаграммы $A \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B$, в которой

$$\alpha = \prod_{\mu\to\nu} X_{\nu\mu}\left(\pi_\mu(A)\right) \,, \quad \beta = \prod_{\mu\to\nu} \mathrm{Id}_{X_\nu}\left(\pi_\nu(A)\right) \,,$$

где $\pi_\eta : A \longrightarrow X_\eta$ суть проекции на сомножители.

А$5\frac{1}{2}$◇3. Пусть диаграммы $\mathscr{N} \xrightarrow{X} \mathscr{C}$ и $\mathscr{M} \xrightarrow{Y} \mathscr{C}$ имеют копределы $N = \lim X_\nu$ и $M = \lim Y_\mu$. Покажите, что для любого функтора $\mathscr{N} \xrightarrow{\tau} \mathscr{M}$ и любого естественного преобразования $X \xrightarrow{f} Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $N \xrightarrow{\varphi} M$, такой что все диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_\nu \arrow[r] \arrow[d, "f_\nu"'] & N \arrow[d, "\varphi"] \\ Y_{\tau(\nu)} \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

коммутативны (горизонтальные стрелки — это канонические морфизмы из элементов диаграммы в копредел), а также докажите двойственное утверждение для копределов.

А$5\frac{1}{2}$◇4. С каждым предпучком множеств F на малой категории $\mathscr{C}$ свяжем категорию индексов $\mathscr{E}_F$, объектами которой являются всевозможные естественные преобразования $h_A \xrightarrow{\alpha} F$ с произвольными[2] $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, а морфизмы из объекта $h_A \xrightarrow{\alpha} F$ в объект $h_B \xrightarrow{\beta} F$ суть всевозможные стрелки

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(h_A, h_B) \,, \tag{2}$$

[1] т. е. индексированные произвольными малыми категориями

[2] по лемме Ионеды такие преобразования биективно соответствуют элементам множеств $F(A)$

такие что $\beta\circ\varphi = \alpha$. Категория индексов $\mathscr{E}_F$ порождает тавтологические диаграммы в категориях $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$ и $\mathscr{C}$, включающиеся в коммутативный треугольник:

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C}) \\ \mathscr{E}_F \arrow[ur, "s_F"] \arrow[dr, "\sigma_F"'] & \\ & \mathscr{C} \arrow[uu, hook, "h\bullet"', "\text{вложение Ионеды}"] \end{tikzcd} \tag{3}$$

(«индекс» $\left(h_A \xrightarrow{\alpha} F\right)$ переводится функтором $\mathscr{E}_F \xrightarrow{s_F} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$ в представимый предпучок h_A, а функтором $\mathscr{E}_F \xrightarrow{\sigma_F} \mathscr{C}$ — в сам объект A). Оба функтора тождественно действуют на все стрелки (2) категории $\mathscr{E}_F$. Покажите, что предпучок F является копределом диаграммы[3] s_F.

А$5\frac{1}{2}\diamond$5. Покажите, что категория предпучков (множеств) на любой малой категории $\mathscr{C}$ козамкнута, причём копределом диаграммы, образованной предпучками $G_\nu : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$ и какими-то морфизмами между ними, будет предпучок, сопоставляющий объекту $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ множество $\varinjlim G_\nu(A)$ (где копредел берётся в категории множеств).

Указание. Это следует из козамкнутости категории множеств и универсальности копредела.

А$5\frac{1}{2}\diamond$6 (универсальность «продолжения по непрерывности»). Покажите, что вложение Ионеды $h_* : \mathscr{C} \xrightarrow{A\mapsto h_A} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$ перестановочно с копределами, и для любого перестановочного с копределами ковариантного функтора $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ в произвольную козамкнутую категорию $\mathscr{D}$ существует единственный с точностью до изоморфизма функторов перестановочный с копределами функтор $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C}) \xrightarrow{E} \mathscr{D}$, такой что $E\circ h_* \simeq F$.

А$5\frac{1}{2}\diamond$7. Явно опишите предпучки $\Delta^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{F} \mathscr{S}et$, отвечающие структуре симплициального пространства на сфере S^n, которая получается

а) «надуванием» n-мерной границы $(n+1)$-мерного симплекса, как на $5\frac{1}{2}$ - 1

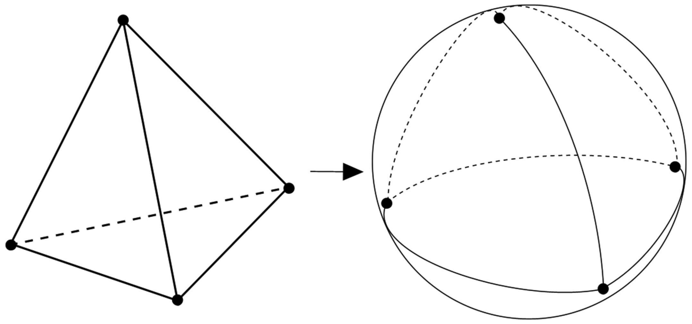

Рис. $5\frac{1}{2}$ - 1.

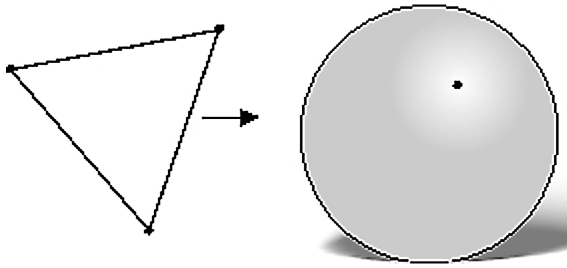

Рис. $5\frac{1}{2}$ - 2.

б) стягиванием $(n-1)$-мерной границы n-мерного симплекса в точку, как на $5\frac{1}{2}$ - 2 (в частности, найдите $|F(\underline{m})|$, т. е. точное количество m-мерных симплексов в каждой размерности[4] m).

А$5\frac{1}{2}\diamond$8*. Вычислите $\pi_3(S^2)$.

[3] таким образом любой предпучок множеств на малой категории канонически представляется в виде копредела диаграммы представимых предпучков

[4] предупреждение: даже для $n = 1$ это число стремится к бесконечности при $m \to \infty$