Ликбез по проективной геометрии.

Пространство гиперповерхностей степени[1] d в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ — это $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$. Прямые (плоскости, 3D-пространства…) в $\mathbb{P}_N$ называются *пучками* (*связками*, *сетями*…) гиперповерхностей. Гиперповерхности степени 2 в $\mathbb{P}_2$ называются *кониками*. Кратностью пересечения гиперповерхности S с прямой ℓ в точке $p \in \ell \cap S$ называется кратность корня p многочлена, задающего ограничение[2] S на ℓ. Прямая ℓ называется касательной к S в точке p, если эта кратность $\geqslant 2$ или $\ell \subset S$.

А4◇1. В предыдущем определении выразите N через n. Какую фигуру образует множество гиперповерхностей проходящих через заданную точку в $\mathbb{P}_n$? Верно ли, что в любом пучке можно найти гиперповерхность, проходящую через произвольно заданную точку?

А4◇2. Покажите, что прямые касающиеся $S \subset \mathbb{P}_n$ в точке $p \in S$ заметают либо проективную гиперплоскость[3] $T_pS \subset \mathbb{P}_n$ коразмерности 1, либо всё пространство[4], и последнее равносильно занулению в p всех частных производных уравнения, задающего S.

А4◇3. Покажите, что пересечение гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ с касательной гиперплоскостью T_pQ в точке $p \in Q$ представляет собой конус с вершиной в p над неособой квадрикой в не задевающем p подпространстве[5] $\mathbb{P}_{n-2} \subset T_pQ$.

А4◇4. Покажите, что на невырожденной квадрике в $\mathbb{P}_n$ нет проективных подпространств размерности $> d := \left[\frac{n-1}{2}\right]$, а d-мерные подпространства, лежащие на квадрике и проходящие через заданную её точку, находятся во взаимно однозначном соответствии со всеми $(d-1)$-мерными подпространствами на невырожденной квадрике в $\mathbb{P}_{n-2}$.

А4◇5. Покажите, вырожденные квадрики в $\mathbb{P}_n$ образуют гиперповерхность S в пространстве квадрик $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Найдите степень этой гиперповерхности. Покажите, что точка $Q \in S$ неособа тогда и только тогда, когда квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ имеет ровно одну особую точку $q \in Q$ и касательное пространство $T_QS \subset \mathbb{P}_N$ (к гиперповерхности S в точке Q) состоит из всех квадрик проходящих через q.

А4◇6. Покажите, что касательные пространства к неособой квадрике в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образуют неособую квадрику в $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ и выразите её матрицу Грама через матрицу Грама исходной квадрики в двойственном базисе.

А4◇7. Покажите, что через любые пять точек на $\mathbb{P}_2$ можно провести конику, причём если никакие 4 точки не коллинеарны, эта коника единственна, а если никакие три не коллинеарны, то неособа.

А4◇8*. Покажите, что шесть точек $p_1, p_2, \dots, p_6 \in \mathbb{P}_2$ тогда и только тогда лежат на конике, когда три точки пересечения «пар противоположных сторон» $(p_1p_2) \cap (p_4p_5)$, $(p_2p_3) \cap (p_5p_6)$, $(p_3p_4) \cap (p_6p_1)$ коллинеарны.

А4◇9. Покажите, что любые пять прямых без тройных пересечений на плоскости касаются единственной гладкой коники.

А4◇10. Покажите, что прямые, служащие продолжениями сторон шестиугольника $p_1, p_2, \dots, p_6 \in \mathbb{P}_2$ тогда и только тогда касаются некоторой коники, когда «главные диагонали» (p_1p_4), (p_2p_5), (p_3p_6) пересекаются в одной точке.

А4◇11. Сколько прямых пересекает все 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$
а) над $\mathbb{C}$ **б)** над $\mathbb{R}$ (укажите все возможные ответы и выделите те, что устойчивы при малых шевелениях данной четвёрки прямых).

---

[1] всюду в этом листке основное поле предполагается алгебраически замкнутым характеристики $\neq 2$

[2] если S задана уравнением $f(x) = 0$, $\ell = (ab)$, и $p = \lambda a + \mu b$, то эта кратность равна степени линейной формы $\det\begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ в разложении многочлена $f|_S(t_0, t_1) = f(t_0a + t_1b)$ на неприводимые множители в $\Bbbk[t_0, t_1]$

[3] точка p называется в этом случае *гладкой* или *неособой*

[4] в этом случае точка называется *особой*

[5] можете также показать, что над $\mathbb{R}$ индекс последней квадрики (т.е. число плюсов минус число минусов в сигнатуре) будет тот же, что и у исходной