Координатные кольца и идеалы аффинных многообразий.

A2◇1. Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Нельзя ли ли задать то же самое многообразие двумя уравнениями?

A2◇2. Укажите для $J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \Bbbk[x, y]$ какой-нибудь $f \in I(V(J)) \setminus J$.

A2◇3. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$ для

а) $J = (xy, (x - y)z)$ **б)** $J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2)$

A2◇4. Снабдим координатную алгебру гиперболы $\Bbbk[\Gamma] = \Bbbk[x, y]/(xy - 1)$ структурой алгебры над $\Bbbk[t] = \Bbbk[\mathbb{A}^1]$ при помощи гомоморфизма поднятия[1] $\Bbbk[\mathbb{A}^1] \xrightarrow{\pi_\alpha^*} \Bbbk[\Gamma]$, ассоциированного с параллельной проекцией гиперболы на x-ось $\Gamma \xrightarrow{\pi_\alpha} \mathbb{A}^1$ вдоль вектора $(\alpha, 1)$. Выясните, при каких α алгебра $\Bbbk[\Gamma]$ цела над $\Bbbk[t]$.

A2◇5 (топология Зарисского). Для аффинного многообразия X и идеала $I \subset \Bbbk[X]$ обозначим через $V(I) \subset X$ множество нулей идеала I на X. Покажите, что

а) множества $V(I)$ образуют систему замкнутых множеств некоторой топологии на X;

б) в этой топологии объединение любого семейства открытых множеств покрывается конечным числом множеств этого семейства (в частности, X *квазикомпактно*).

A2◇6. Пусть $A = \mathscr{C}^0(X)$ — кольцо непрерывных (вещественных или комплексных) функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X. Верно ли, что

а) отображение $X \xrightarrow{x \mapsto \ker \mathrm{ev}_x} \operatorname{Spec}_m A$ биективно?

б) топология Зарисского на $\operatorname{Spec}_m A$ индуцирует исходную топологию на X?

A2◇7. Пусть $X = \operatorname{Spec}_m A$ — аффинное алгебраическое многообразие. Равносильна ли разложимость A в прямое произведение[2] $A = A_1 \times A_2$ разложимости X в дизъюнктное объединение $X = X_1 \sqcup X_2$ двух собственных замкнутых подмножеств?

A2◇8. Верно ли, что:

а) максимальный спектр $\Bbbk$-алгебры, конечномерной как векторное пространство над $\Bbbk$, является конечным множеством?

б) любой непустой слой конечного морфизма конечен как множество?

A2◇9. Докажите, что проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ доминантна.

A2◇10. Покажите, что образ регулярного доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

A2◇11 (лемма Нётер о нормализации). Покажите, что любая гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ допускает конечную сюрьекцию на некоторую гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

A2◇12. Для аффинных алгебраических многообразий $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$, уравнения которых известны,

а) опишите систему уравнений, реализующих $X \times Y$ в качестве подмногообразия в $\mathbb{A}^{n+m}$;

б) покажите, что $X \times Y$ неприводимо, если неприводимы X и Y;

в) выразите $\dim(X \times Y)$ через $\dim X$ и $\dim Y$.

A2◇13. Может ли алгебра регулярных функций $\mathscr{O}_X(U)$ на открытом подмножестве U аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$

а) не быть конечно порожденной $\Bbbk$-алгеброй?

б) быть конечно-порождённой $\Bbbk$-алгеброй, но иметь $\operatorname{Spec}_m \mathscr{O}_X(U) \neq U$?

---

[1] напомним, что *гомоморфизм поднятия* $\Bbbk^Y \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk^X$, ассоциированный с отображением множеств $X \xrightarrow{\varphi} Y$, переводит функцию $\left(Y \xrightarrow{f} \Bbbk\right) \in \Bbbk^Y$ в композицию $\left(X \xrightarrow{f \circ \varphi} \Bbbk\right) \in \Bbbk^X$

[2] напомню, что для разложимости алгебры (даже не обязательно коммутативной) в прямое произведение двух подалгебр необходимо и достаточно разложения единицы в сумму двух независимых идемпотентов: $1 = e_1 + e_2$, где $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$