§6. Пределы и пучки.

6.1. Определение предела. Всякий функтор $\mathcal{N} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$ можно воспринимать как диаграмму в категории $\mathcal{C}$, в вершинах которой стоят объекты $X_\nu = X(\nu) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, занумерованные «индексами» $\nu \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, а стрелками служат $\left(X_\mu \xrightarrow{X_{\nu\mu}} X_\nu\right) = X(\mu \to \nu)$, занумерованные стрелками $\mu \longrightarrow \nu$ категории $\mathcal{N}$.

Зафиксируем категорию $\mathcal{N}$ («тип диаграммы») и свяжем с каждым объектом $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ *постоянную диаграмму* $\overline{C}$, в которой все $\overline{C}_\nu = C$, а все $\overline{C}_{\mu\nu} = \mathrm{Id}_C$. С любой диаграммой $\left(\mathcal{N} \xrightarrow{X} \mathcal{C}\right) \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})$ теперь можно связать предпучок множеств

$$\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{C \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{C},X)} \mathcal{S}et\ .$$

Если он представим, т. е. существует объект $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, такой что

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C,L) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{C},X)\ ,$$

то L называют *пределом* диаграммы X и пишут[1] $L = \lim X_\nu$.

Двойственным образом, объект $L' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ называют *копределом* диаграммы $\mathcal{N} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$ и пишут[2] $L' = \operatorname{colim} X_\nu$, если он копредставляет ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор

$$\mathcal{C} \xrightarrow{C \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X,\overline{C})} \mathcal{S}et\ .$$

т. е. если существует функториальная по $C \in \mathcal{C}$ и $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(L',C) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X,\overline{C})\ .$$

Как и всякие (ко) представляющие объекты, (ко) пределы могут быть определены при помощи «универсальных свойств» и функториальны в разных смыслах, которые уточняются в следующих ниже упражнениях.

Упражнение 6.1. (Универсальность (ко) пределов.)

а) Пусть $L = \lim X_\nu$ является пределом диаграммы $\mathcal{N} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$ в категории $\mathcal{C}$. Постройте семейство канонических стрелок $L \xrightarrow{\pi_\nu} X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками $X_{\nu\mu}$ диаграммы X и универсальны в том смысле, что $\forall\, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ с набором стрелок $Y \xrightarrow{\psi_\nu} X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, *существует* и *единственен* морфизм $Y \xrightarrow{\alpha} \lim X_\nu$ в $\mathcal{C}$, такой что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha\ \forall\, \nu$.

б) Проверьте, что это универсальное свойство задаёт предел однозначно с точностью до *единственного* изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками[3] π_ν.

в) Сформулируйте и докажите соответствующие универсальные свойства копределов.

Упражнение 6.2. (Функториальность (ко) пределов.)

а) Пусть две диаграммы $\mathcal{N} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$ и $\mathcal{M} \xrightarrow{Y} \mathcal{C}$ имеют копределы $N = \operatorname{colim} X_\nu$ и $M = \operatorname{colim} Y_\mu$. Выведите из универсальных свойств копредела, что для любого функтора $\mathcal{N} \xrightarrow{\tau} \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $X \xrightarrow{f} Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $N \xrightarrow{\varphi} M$, такой что все диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_\nu \arrow[r] \arrow[d, "f_\nu"'] & N \arrow[d, "\varphi"] \\ Y_{\tau(\nu)} \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

[1] иногда, особенно в старых книгах, пределы называют *проективными пределами* и обозначают $\varprojlim$

[2] иногда, особенно в старых книгах, копределы называют *индуктивными пределами* и обозначают $\varinjlim$

[3] т. е. для любого другого универсального семейства $L \xrightarrow{\pi'_\nu} X_\nu$ существует и единственен изоморфизм $L \xrightarrow{\sim} L'$, перестановочный со всеми стрелками π_ν, π'_ν и $X_{\nu\mu}$

коммутативны (горизонтальные стрелки — это каноническиме морфизмы из элементов диаграммы в копредел).

б) Сформулируйте и докажите аналогичное функториальное свойство пределов.

Упражнение 6.3. (Перестановочность сопряжённых функторов с (ко) пределами.) Говорят, что функтор $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ и любой диаграммы $\mathscr{N} \xrightarrow{\Phi} \mathscr{C}$ из того, что L является (ко) пределом Φ в $\mathscr{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F\circ\Phi$ в $\mathscr{D}$. Проверьте, что всякий левый сопряжённый функтор перестановочен с копределами, а всякий правый — с пределами (см. n° 5.6).

6.2. Пределы конечных диаграмм. Простейшая категория индексов — это пустая категория $\mathscr{N} = \varnothing$. Поскольку из пустого множества имеется ровно одно отображение в любой класс, $\mathscr{F}un(\mathscr{N},\mathscr{C})$ — это одноэлементное множество, «пустая диаграмма». Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории, поскольку $\operatorname{Hom}(X,\mathrm{Fin})$ и $\operatorname{Hom}(\mathrm{Or},X)$ состоит из одного элемента для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$.

Упражнение 6.4. Найдите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, (произвольных) групп, коммутативнных колец.

Малая категория $\mathscr{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \operatorname{Ob}\mathscr{N}$. Соответствующие диаграммы $\mathscr{N} \xrightarrow{X} \mathscr{C}$ — это просто семейства объектов X_ν без стрелок *между* ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются прямыми *произвелениями* и *копроизвелениями* и обозначаются $\prod\limits_\nu X_\nu$ (произведение) и $\coprod\limits_\nu X_\nu$ (копроизведение). Когда индексов всего два, мы получаем уже обсуждавшиеся нами на прошлом занятии прямые (ко) произведения пар объектов.

Упражнение 6.5. Убедитесь, что для существования любых конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых пар объектов.

Упражнение 6.6. Убедитесь, что в категориях множеств и топологических пространств произведения и копроизведения — это, соответственно, прямые (теоретико множественные и топологические) произведения и дизъюнктные объединения; в категории (всех) групп — это прямые и свободные[4] произведения; в категории коммутативных колец — это прямые и тензорные произведения.

Крайне важная диаграмма возникает из категории индексов $\bullet \rightrightarrows \bullet$ (два объекта и два нетождественных морфизма между ними). Её конкретная реализация представляет собой пару стрелок $X \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$, и (ко) предел такой диаграммы называется *(ко) уравнителем* стрелок φ и ψ. В категории множеств ураниватель — это прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ относительно канонического отображения $X \xrightarrow{\varphi\times\psi} Y \times Y$, т. е. множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$. Коуравнитель устроен хитрее — это фактор множества Y по наименьшему отношению эквивалентности[5] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $X \xrightarrow{\varphi\times\psi} Y \times Y$.

Упражнение 6.7. Проверьте сказанное и модифицируйте его с уважением дополнительных структур так, чтобы построить (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп и коммутативных колец.

Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор-объекты» при помощи «образующих и соотношений». Например, окружность

[4] например, свободное произведение двух экземпляров группы $\mathbb{Z}$ — это свободная (некоммутативная) группа $\mathbb{F}_2$ с двумя образующими

[5] напомним, что *отношение эквивалентности* на Y — это подмножество $R \subset Y\times Y$, которое *рефлексивно* (т. е. содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. (y_1,y_2), $(y_2.y_3) \in R \Rightarrow (y_1,y_3) \in R$); пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности, и всякое отображение $Y \xrightarrow{\xi} Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1,y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $Y \xrightarrow{\xi'} Z'$ тогда и только тогда пропускается через $Y \xrightarrow{\xi} Z$, т. е. представляется в виде композиции $\xi' = \eta\circ\xi$ с некоторой стрелкой $Z \xrightarrow{\eta} Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$ (т. е. эквивалентность, отвечающая ξ, *сильнее*, или *тоньше*, или *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ')

S^1, склеенная из отрезка как на рис. 5◇3, является коуравнителем в категории $\mathcal{T}op$ пары морфизмов $\Delta^0 \overset{0}{\underset{1}{\rightrightarrows}} \Delta^1$, отображающих точку в концы отрезка. Аналогично, *конус непрерывного отображения* $X \xrightarrow{f} Y$ в $\mathcal{T}op$ — это коуравнитель f и постоянного отображения, стягивающего X в какую-нибудь точку[6]. Другой пример: (ко) ядро гомоморфизма $A \xrightarrow{f} B$ в категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей над (произвольным) кольцом — это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма.

Отметим, однако, что в общем случае даже вопрос о нетривиальности коуравнителя может оказаться очень трудным[7] — задание объекта «образующими и соотношениями» далеко не так «конструктивно», как может показаться на первый взгляд.

6.2.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для того чтобы в категории $\mathcal{C}$ существовали пределы любых конечных диаграмм необходимо и достаточно, чтобы в $\mathcal{C}$ существовали: конечный объект, прямые произведения любых двух объектов, и уравнители любых двух стрелок $X \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$ между любыми двумя объектами.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$ — конечная диаграмма. Рассмотрим «маленькое» и «большое» прямые произведения всех объектов диаграммы:

$$A = \prod_{\nu} X_\nu \;, \qquad B = \prod_{\mu \to \nu} X_\nu$$

(в A все объекты диаграммы входят по одному разу, а в B сомножителей столько же, сколько стрелок в $\mathcal{N}$, и каждый объект X_ν диаграммы входит столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается). Мы имеем две очевидных стрелки $A \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} B$:

$$\alpha = \prod_{\mu \to \nu} X_{\nu\mu}\left(\pi_\mu(A)\right) \;, \quad \beta = \prod_{\mu \to \nu} \mathrm{Id}_{X_\nu}\left(\pi_\nu(A)\right) \;,$$

где $A \xrightarrow{\pi_\eta} X_\eta$ суть канонические проекции произведения на сомножители. □

Упражнение 6.8. Убедитесь что уравнитель стрелок a и β является пределом диаграммы X.

Упражнение 6.9. Сформулируйте двойственный критерий существования копределов конечных диаграмм.

6.2.2. Пример: послойные (ко) произведения. Предел диаграммы над категорией индексов

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$$

называется *послойным произведением*. Конкретная реализация такой диаграммы имеет вид

$$X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y \;,$$

и её предел обозначается $X \underset{B}{\times} Y$. Он включается в коммутативный квадрат (называемый *декартовым*)

$$\begin{tikzcd} & X \underset{B}{\times} Y \arrow[dl, "\eta'"'] \arrow[dr, "\xi'"] & \\ X \arrow[dr, "\xi"'] & & Y \arrow[dl, "\eta"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{6-1}$$

[6]чтобы сделать эту точку канонической в гомотопической топологии рассматривают категорию $\mathcal{T}op_*$ пространств с отмеченной точкой и непрерывных отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную

[7]скажем, в категории групп он, вообще говоря, алгоритмически неразрешим

универсальный в том смысле, что для любого другого такого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\psi'"] & \\ X \arrow[dr, "\xi"'] & & Y \arrow[dl, "\eta"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

имеется единственный морфизм $Z \xrightarrow{\varphi' \times \psi'} X \underset{B}{\times} Y$, такой что $\varphi' = \varphi\circ(\varphi' \times \psi')$, $\psi' = \psi\circ(\varphi' \times \psi')$.

Упражнение 6.10. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (6-1) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

Оборачивая *все* стрелки в предыдущем определении, назовём *послойным копроизведением* $X \underset{B}{\otimes} Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$ (т. е. вида $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$). Послойное копроизведение вписывается в коммутативный квадрат (называемый *кодекартовым*)

$$\begin{tikzcd} & X \underset{B}{\otimes} Y & \\ X \arrow[ur, "\varphi"] & & Y \arrow[ul, "\psi"'] \\ & B \arrow[ul, "\xi"] \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

такой, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ X \arrow[ur, "\varphi'"] & & Y \arrow[ul, "\psi'"'] \\ & B \arrow[ul, "\xi"] \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

существует единственный морфизм $X \underset{B}{\otimes} Y \xrightarrow{\quad \varphi' \otimes \psi' \quad} Z$, такой что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi')\circ\varphi$, $\psi' = (\varphi' \otimes \psi')\circ\psi$.

Упражнение 6.11. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[8], коммутативных колец с единицей[9].

Упражнение 6.12. Эта задача для тех, то немного изучал топологию. Пусть связное топологическое пространство $X \cup Y$ представилось в виде объединения связных подпространств X, Y со связным же персечением $X \cap Y$. Докажите следующую теорему Зейферта – ван Кампена о фундаментальных группах: $\pi_1(X \cup Y) = \pi_1(X) \underset{\pi_1(X \cap Y)}{\otimes} \pi_1(Y)$.

6.3. (Ко) замкнутые категории. Категория $\mathscr{C}$, в которой все индексированные малыми категориями диаграммы имеют (ко) пределы, называется *(ко) замкнутой*. Рассуждение, использованное нами в n° 6.2.1 для конечных диаграмм, имеет следующие очевидные обобщения:

[8] в теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*

[9] диаграмма $A \longleftarrow K \longrightarrow A$ в категории коммутативных колец с единицей означает, что A и B являются K-алгебрами; соответствующее копроизведение есть не что иное, как *тензорное произведение* K-алгебр $A \underset{K}{\otimes} B$, которое можно описать как фактор свободного K-модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями $(\varkappa_1 a_1 + \varkappa_2 a_2, \varkappa_1' b_1 + \varkappa_2' b_2) - \sum\limits_{i,j=1}^{2} \varkappa_i \varkappa_j' (a_i, b_j)$

Упражнение 6.13. Докажите, что для замкнутости категории $\mathscr{C}$ достаточно существования в $\mathscr{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Упражнение 6.14. Докажите, что для козамкнутости категории $\mathscr{C}$ достаточно существования в $\mathscr{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Упражнение 6.15. Докажите, что категория множеств замкнута и козамкнута, и выясните, верно ли то же самое для категорий топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп и коммутативных колец.

6.3.1. Пример: пределы частично упорядоченных диаграмм. Как мы видели на стр. 37, любое частично упорядоченное множество (сокр. ЧУМ) $\mathscr{N}$ можно превратить в категорию, объявляя неравенства $\nu \leqslant \mu$ стрелками $\nu \longrightarrow \mu$. Мы будем называть диаграммы $\mathscr{N} \xrightarrow{X} \mathscr{C}$, индексированные ЧУМом $\mathscr{N}$, *частично упорядоченными*.

Упражнение 6.16. Проверьте, что копредел произвольной частично упорядоченной диаграммы

$$\mathscr{N} \xrightarrow{X} \mathscr{S}et$$

в категории множеств допускает следующее *явное* описание. Назовём *хвостом* диаграммы X любое семейство элементов $x_\nu \in X_\nu$ обладающее двумя свойствами:

а) вместе с каждым индексом ν, представленным в семействе, в этом же семействе представлены и все индексы $\mu > \nu$ из $\mathscr{N}$;

б) для любых двух членов семейства $X_{\nu\mu}(x_\nu) = x_\mu$ как только $\mu < \nu$.

Назовём хвосты $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\beta\}$ *эквивалентными*, если у них общий «конец», т. е. для любых элементов x_α и y_β существует индекс $\gamma > \alpha, \beta$, такой что $X_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = X_{\beta\gamma}(y_\beta)$. Убедитесь, что это действительно отношение эквивалентности и что множество классов эквивалентных хвостов изоморфно $\mathrm{colim} X$.

В анализе и топологии особенно любят ЧУМы $\mathscr{N}$, в которых $\forall\, \mu, \nu\ \exists\, \varkappa : \varkappa \geqslant \mu,\ \varkappa \geqslant \nu$. Такие ЧУМы называют *направленными* или *индуктивными*, а индексированные ими диаграммы $\mathscr{N} \longrightarrow \mathscr{C}$ — *прямыми спектрами*. Диаграммы, отвечающие категории $\mathscr{N}^{\mathrm{opp}}$ (где каждое неравенство $\nu \leqslant \mu$ означает стрелку $\nu \longleftarrow \mu$, направление острия которой *совпадает* с направлением острия неравенства) называются *проективными* или *обратными спектрами*.

Например, любой замкнутый относительно пересечения набор открытых множеств образует обратный спектр в категории $\mathscr{U}(X)$ всех открытых подмножеств данного топологического пространства X (в частности, таковым является набор открытых окрестностей любого фиксированного подмножества $Z \subset X$).

Упражнение 6.17. Удостоверьтесь, что у этой обратной системы есть копредел — объединение всех множеств из системы. Что такое послойное произведение $U \underset{X}{\times} V$ и послойное копроизведение $U \underset{\varnothing}{\otimes} V$ в $\mathscr{U}(X)$?

Другой пример: конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ \cdots\ < x_N < x_\infty = 1$, задающие разбиение отрезка $[\,0\,,\,1\,]$ на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямой спектр в категории ∇_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих *измельчениям* разбиения.

Упражнение 6.18. Убедитесь, что у этой системы стрелок имеется копредел в категории всех[10] упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами. Чему он равен[11]?

Упражнение 6.19. Зафиксируем в качестве категории индексов ЧУМ $\mathbb{N}$ с его стандартным (полным) упорядочением по возрастанию и положим $A_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, где p — фиксированное простое число. В категории абелевых групп найдите[12]

а) предел $\lim A_n$ обратной системы канонических факторизаций $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{nm}} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$

б) копредел $\mathrm{colim} A_n$ прямой системы вложений $\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \xhookrightarrow{[1]\mapsto[p^{n-m}]} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

Упражнение 6.20. А теперь рассмотрим ЧУМ $\mathbb{N}$ с другим частичным порядком, задаваемым делимостью: $n \leqslant m \iff n$ делит m, и положим $B_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. В категории абелевых групп найдите[13]:

---

[10] т. е. не обязательно конечных

[11] ответ: $[\,0\,,\,1\,]$

[12] ответы: $\lim A_n = \mathbb{Z}_p$ есть множество целых p-адических чисел, а $\mathrm{colim} A_n \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ состоит из классов дробей вида z/p^ℓ с $z \in \mathbb{Z}$, рассматриваемых с точностью до целой части

[13] ответы: $\mathrm{colim} B_n = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, а $\lim B_n = \prod_p \mathbb{Z}_p$ есть неархимедово пополнение $\mathbb{Z}$ (т. е. прямое произведение всех колец целых p-адических чисел по всем простым p)

а) предел $\lim B_n$ обратной системы канонических факторизаций $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_{nm}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

б) копредел $\operatorname{colim} B_n$ прямой системы вложений $\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xhookrightarrow{[1]\mapsto[n/m]} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

6.3.2. Пример: локализация (в коммутативной алгебре). Подмножество S коммутативного кольца A с единицей называется *мультипликативным*, если оно замкнуто относительно умножения, содержит единицу и не содержит нуля. Каждое мультипликативное множество $S \subset A$ можно превратить в категорию, полагая

$$\mathrm{Hom}_S(f,g) = \{a \in A \mid af = g\}\ ,$$

и задать функтор из этой категории в категорию A-модулей, посылая каждый объект $f \in S$ в свободный A-модуль $A\cdot\left[\frac{1}{f}\right]$ (ранга один[14]), а каждую стрелку $a \in \mathrm{Hom}_S(f,g)$ в гомоморфизм, переводящий базисный элемент $\left[\frac{1}{f}\right]$ в $a\cdot\left[\frac{1}{g}\right]$.

Упражнение 6.21. Покажите, что

а) копредел прямой системы естественных вложений $S^{-1}A \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim\limits_{s\in S} A\cdot\left[\frac{1}{s}\right]$ существует и может быть описан как модуль, состоящий из классов эквивалентности дробей a/s с $a \in A$, $s \in S$ и $a_1/s_1 \sim a_2/s_2 \iff a\cdot(a_1s_2 - a_2s_1) = 0$ для некоторого $a \neq 0$ из A;

б) на $S^{-1}A$ имеется каноническая структура кольца[15] (и A-алгебры).

Упражнение 6.22. Обобщите предыдущую конструкцию на произвольный A-модуль M: покажите, как по данному мультипликативному множеству $S \subset A$ и данному A-модулю M построить прямую систему стрелок, копределом которой будет модуль $S^{-1}M$ дробей вида m/s с $m \in M$, $s \in S$. Опишите явно отношение эквивалентности между такими дробями, убедитесь, что они образуют модуль как над A, так и над $S^{-1}A$, и докажите, что $S^{-1}M \simeq S^{-1}A \underset{A}{\otimes} M$.

Сам термин «локализация» пришёл из алгебраической геометрии, где в роли коммутативного кольца A выступает алгебра полиномиальных функций $\mathbb{F}[X]$ на аффинном алгебраическом многообразии X. Функции $f \in \mathbb{F}[X]$, отличные от нуля в данной точке $x \in X$ образуют мультипликативную систему, и соответствующая локализация называется *локальным кольцом* точки x.

6.4. Пределы предпучков. С каждым предпучком множеств F на малой категории $\mathscr{C}$ можно функториально связать категорию индексов $\mathscr{E}_F$, объектами которой являются всевозможные естественные преобразования $h_A \xrightarrow{\alpha} F$ с произвольными[16] $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Стрелки из объекта $h_A \xrightarrow{\alpha} F$ в объект $h_B \xrightarrow{\beta} F$ в категории $\mathscr{E}_F$ — это всевозможные стрелки

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(h_A, h_B)\,, \tag{6-2}$$

такие что $\beta\circ\varphi = \alpha$ в $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$. Эта категория индексов тавтологически порождает две диаграммы (одну — в категории $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$, другую — в самой категории $\mathscr{C}$), которые включаются в коммутативный треугольник:

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C}) \\ \mathscr{E}_F \arrow[ur, "s_F"] \arrow[dr, "\sigma_F"'] & \\ & \mathscr{C} \arrow[uu, hook, "h_\bullet", "\substack{\text{вложение}\\ \text{Ионеды}}"'] \end{tikzcd} \tag{6-3}$$

Каждый «индекс» $\left(h_A \xrightarrow{\alpha} F\right)$ переводится функтором $\mathscr{E}_F \xrightarrow{s_F} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$ в представимый предпучок h_A, а функтором $\mathscr{E}_F \xrightarrow{\sigma_F} \mathscr{C}$ — в сам объект A. Оба функтора тождественно действуют на все стрелки (6-2) категории $\mathscr{E}_F$. Из леммы Ионеды (см. n° 5.4.1 на стр. 44) сразу следует

[14] символ $\left[\frac{1}{f}\right]$ используется здесь как «имя собственное» для некоторого специального базисного вектора в свободном A-модуле ранга 1

[15] сложение и умножение дробей производится по стандартным правилам

[16] напомним, что по лемме Ионеды такие естественные преобразования биективно соответствуют элементам множеств $F(A)$

6.4.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Предпучок F является копределом диаграммы s_F (таким образом, любой предпучок множеств на малой категории канонически представляется в виде копредела диаграммы представимых предпучков).* □

Упражнение 6.23. Проделайте формальную проверку универсальных свойств.

6.4.2. СЛЕДСТВИЕ. *Категория предпучков на любой малой категории козамкнута.*

Доказательство. Это следует из козамкнутости категории множеств и универсальности копредела. □

Упражнение 6.24. Проверьте, что для заданного набора предпучков $\mathscr{C}^{\text{opp}} \xrightarrow{G_\nu} \mathscr{S}et$ и морфизмов между ними сопоставление объекту $A \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ множества $\operatorname{colim} G_\nu(A)$ (копредел берётся в категории множеств) задаёт на $\mathscr{C}$ предпучок, являющийся копределом предпучков G_ν в категории $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$.

6.4.3. ТЕОРЕМА (О «ПРОДОЛЖЕНИИ ПО НЕПРЕРЫВНОСТИ»). *Вложение Ионеды*

$$\mathscr{C} \xrightarrow{A \mapsto h_A} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$$

перестановочно с копределами, и для любого перестановочного с копределами ковариантного функтора $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ в произвольную козамкнутую категорию $\mathscr{D}$ существует единственный с точностью до изоморфизма перестановочный с копределами функтор $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C}) \xrightarrow{E} \mathscr{D}$, такой что $E \circ h_* \simeq F$.

Доказательство. Поскольку всякий предпучок X на $\mathscr{C}$ является копределом диаграммы s_X из (6-3), требование перестановочности функтора E с копределами не оставляет иной возможности, как определить действие E на объекты формулой $E(X) = \operatorname{colim} F \circ \sigma_X$ (прямой предел диаграммы в категории $\mathscr{D}$, полученной применением функтора F к диаграмме σ_X из (6-3)). В силу функториальности копределов, действие E на стрелки при этом тоже однозначно фиксируется: всякое естественное преобразование предпучков $X \longrightarrow Y$ задаёт преобразование диаграмм $\sigma_X \longrightarrow \sigma_Y$, к которому применимо упр. 6.2. Чтобы проверить, что $X \longrightarrow E(X)$ действительно задаёт перестановочный с копределами функтор, мы воспользуемся упр. 5.20. С каждым $D \in \operatorname{Ob}\mathscr{D}$ связан предпучок $\Gamma_D : C \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(C), D)$ на $\mathscr{C}$.

Упражнение 6.25. Убедитесь, что это действительно предпучок, и что соответствие $D \longmapsto \Gamma_D$ задаёт ковариантный функтор $\mathscr{D} \xrightarrow{\Gamma} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$.

Функториальные по $D \in \mathscr{D}$ отождествления

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(X, \Gamma(D)) &= \operatorname{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}\big(\lim_{s_X} h_A, \Gamma_D\big) = \\
&= \lim_{s_X} \operatorname{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}\big(h_A, \Gamma_D\big) = \lim_{s_X} \Gamma_D(A) = \lim_{F \circ s_X} \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), D) = \\
&= \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}\big(\lim_{F \circ s_X} F(A), D\big) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(E(X), D)
\end{aligned}$$

показывают, что объект $E(X)$ копредставляет ковариантный функтор

$$\mathscr{D} \xrightarrow{D \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(X, \Gamma(D))} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$$

По упр. 5.20 $X \longmapsto E(X)$ тогда является функтором, сопряжённым слева к функтору $\mathscr{D} \xrightarrow{\Gamma} \mathscr{S}h(\mathscr{C})$, и автоматически перестановочен с копределами в виду упр. 6.3. □

6.4.4. Пример: геометрическая реализация симплициальных комплексов. Согласно только что доказанной теореме, функтор $\Delta \xrightarrow{n \mapsto \Delta^n} \mathscr{T}op$, рассмотренный нами в примере из n° 5.2.1, допускает каноническое «продолжение по непрерывности» до функтора

$$F \,:\, \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\Delta) \xrightarrow{X \mapsto |X|} \mathscr{T}op \,,$$

который называется *геометричекой реализацией* симплициальных множеств. Он функториально сопоставляет каждому предпучку X на Δ (который, как объяснялось в n° 5.2.2, можно воспринимать как «комбинаторное описание» симплициального комплекса) «материальное» топологическое пространство $|X|$ с симплициальным разбиением, закодированным в предпучке X, что даёт «универсальный ответ» на все вопросы типа упр. 5.4 и упр. 5.5.

Например, n-мерная сфера S^n, возникающая в результате стягивания всей границы n-мерного симплекса Δ^n в одну точку (см. рис. 5◇4 на стр. 40), является копределом диаграммы в $\mathscr{T}op$, состоящей из *всех*[17] стрелок $\Delta^m \longrightarrow \Delta^n$ с $m < n$, приходящих из категории Δ. Следовательно,

$$S^n = \operatorname{colim}_{\mathscr{T}op}\left(\Delta^m \longrightarrow \Delta^n\right) = \left|\operatorname{colim}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\Delta)}\left(h_{\underline{m}} \longrightarrow h_{\underline{n}}\right)\right|$$

те комбинаторное описание симплициального комплекса, отвечающего такой «вырожденной триангуляции» S^n, есть копредел X диаграммы из всех стрелок $h_{\underline{m}} \longrightarrow h_{\underline{n}}$ с $m < n$ в категории $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\Delta)$, а множество его k-симплексов X_k есть копредел (в категории множеств) диаграммы из стрелок

$$\left\{(h_{\underline{m}}(\underline{k}) \longrightarrow h_{\underline{n}}(\underline{k})\right\} = \left\{\operatorname{Hom}_\Delta(\underline{k},\underline{m}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Delta(\underline{k},\underline{n})\right\}$$

т. е. получается из множества всех неубывающих отображений $\underline{k} \longrightarrow \underline{n}$ склеиванием в одну точку всех отображений, которые на являются сюрьективными.

Упражнение 6.26. Найдите число элементов во всех X_k (в частности, убедитесь, что оно равно 1 при $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$, равно 2 при $k = n$, и *неограничесно растёт* с ростом k).

6.5. Предпучки на категории $\mathscr{U}(X)$. В действительности, термин «предпучок» впервые прозвучал применительно к категории $\mathscr{C} = \mathscr{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X (см. стр. 37), в которой $\operatorname{Hom}(U,V)$ состоит из вложения $U \hookrightarrow V$, если $U \subseteq V$, и пуст, если $U \not\subset V$. Геометрическая интуиция, связанная с такой «локально-топологической» точкой зрения, во многом дополнительна к интуиции, основанной на работе с триангулированными пространствами и симплициальными комплексами.

Пусть $\mathscr{U}(X)^{\text{opp}} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ является предпучком объектов категории $\mathscr{D}$ на топологическом пространстве X. В таком контексте объект $F(U) \in \operatorname{Ob}\mathscr{D}$ называется *сечениями предпучка над* U. В зависимости от категории $\mathscr{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, группу, топологическое пространство, категорию и т. п. Морфизмы $F(V) \longrightarrow F(U)$, отвечающие включениям $U \subset V$, называются *ограничениями сечений*[18] на подмножества. Действие морфизма ограничения с V на $U \subset V$ на сечение $s \in F(V)$ мы будем обозначать через $s|_U$.

Категорию предпучков множеств на топологическом пространстве X мы будем обозначать через $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(X)$. Простейшими примерами предпучков на X являются:

- предпучок Γ_E сечений произвольного непрерывного отображения $E \xrightarrow{p} X$, который имеет в качестве локальных сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $U \xrightarrow{s} E$, такие что $p \circ s = \operatorname{Id}_U$ (т. е. отображающие каждую точку $x \in U$ в слой $p^{-1}(x)$ над нею); отображения ограничения — это «обычные» ограничения сечений на подмножество;

- предпучок непрерывных отображений $\mathscr{C}^0(X,Y)$ в произвольное топологическое пространство Y имеет в качестве сечений над $U \subset X$ произвольные непрерывные отображения $U \longrightarrow Y$; это частный случай предыдущего примера, возникающий из проекции

$$X \times Y \xrightarrow{p} X \;;$$

- дальнейшими специализациями предыдущего примера являются так называемые *структурные предпучки* $\mathscr{O}_X$ — локальные гладкие вещественные функции на дифференцируемом многообразии, локальные комплексно аналитические функции на голоморфном многообразии, локальные рациональные функции со значениями в поле на алгебраическом многообразии над этим полем и т. п. (все эти предпучки суть предпучки колец);

[17] включая и все вырожденния — это аналогично представлению окружности коуравнителем диаграммы $\Delta^0 \underset{1}{\overset{0}{\rightrightarrows}} \Delta^1$, обсуждавимся на стр. 50

[18] на языке симплициальных комплексов аналогом локального сечения $s \in F(U)$ является симплекс $x \in X_n = X(\underline{n})$, а аналогом ограничения $s|_V$ сечения s на подмножество является взятие φ-той «обобщённой грани» $X(\varphi)x \in X_m$) отвечающей монотонному отображению $\underline{m} \xrightarrow{\varphi} \underline{m}$ (возможно, вырожденному)

- постоянный предпучок S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S;
- предпучок открытых множеств O имеет к качестве множества сечений $O(U)$ множество всех открытых подмножеств в U, а ограничение на $V \subset U$ переводит W в $W \cap V$;
- предпучок открытых покрытий J имеет в качестве $J(U)$ множество всех открытых покрытий множества U, а отображения ограничения задаются, как и выше, пересечением.

6.6. Ростки и слои. Для любого подмножества $Z \subset X$ рассмотрим диаграмму в $\mathscr{U}(X)$, образованную всеми открытыми окрестностями[19] $U \supset Z$. Множества сечений $F(U)$ произвольного предпучка F на X над этими окрестностями образуют в категории $\mathscr{S}et$ диаграмму, получающуюся из диаграммы окрестностей обращением стрелок[20]. Её копредел называется *слоем*[21] предпучка F над Z и обозначается

$$F_Z \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{colim}_{U \supset Z} F(U) .$$

Чтобы описать его более «явно», назовём *ростком сечения* предпучка F над Z класс эквивалентности пар (U, s_U), где $U \supset Z$ — открытая окрестность Z, $s_U \in F(U)$ — локальное сечение F над U, а эквивалентность $(U, s_U) \sim (W, s_W)$ означает что $s_U|_V = s_W|_V$ для некоторого открытого V такого, что $U \cap W \supset V \supset Z$.

Упражнение 6.27. Убедитесь, что слой F_z канонически изоморфен множеству ростков сечений предпучка F над подмножеством Z (ср. с упр. 6.16).

Упражнение 6.28. Опишите слой каждого предпучка из приведённого выше списка примеров над произвольной точкой $x \in X$.

6.7. Топологическое пространство предпучка. Категория $\mathscr{U}(X)$ является подкатегорией в категории $\mathscr{T}op(X)$ топологических пространств «над X», объектами которой являются непрерывные отображения $Z \xrightarrow{p} X$ (из всевозможных топологических пространств Z), а морфизмы из $Z_1 \xrightarrow{p_1} X$ в $Z_2 \xrightarrow{p_2} X$ служат непрерывные отображения $Z_1 \xrightarrow{\varphi} Z_2$, такие что $p_2 \circ \varphi = p_1$. Согласно теореме о «породолжении по непрерывности» (n° 6.4.3), тавтологическое вложение $\mathscr{U}(X) \hookrightarrow \mathscr{T}op(X)$ канонически продолжается до функтора $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(X) \xrightarrow{E} \mathscr{T}op(X)$, сопоставляющего каждому предпучку F топологическое пространство $E_F \xrightarrow{p_F} X$ над X, которое называется *этальным пространством* предпучка F.

Упражнение 6.29. Проверьте, что функтор $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(X) \xrightarrow{E} \mathscr{T}op(X)$ допускает следующее «более явное» описание. Точками пространства E_F служат пары (x, s_x) с $x \in X$ и $s_x \in F_x$. Проекция $E_F \xrightarrow{p_F} X$ отправляет (x, s_x) в x. Каждое $s \in F(U)$ задаёт локальное сечение $U \xrightarrow{s} E_F$ этой проекции, посылающее $x \in U$ в пару (x, s), в которой $s \in F_x$ рассматривается как росток в x, представленный парой (U, s). Топология на $E(F)$ — это слабейшая топология, в которой все эти сечения непрерывны, т. е. $V \subset E_F$ объявляется открытым , если и только если для любого открытого $U \subset X$ и любого $s \in F(U)$ множество тех x, для которых пара $(x$, класс ростка (U, s) в слое $F_x)$ попадает в V, открыто в X. Проверьте[22] корректность этой конструкции и выполнение всех необходимых «универсальных свойств».

Упражнение 6.30. Проверьте, что сопоставление непрерывному отображению $Z \xrightarrow{p} X$ предпучка Γ_Z его локальных сечений (описанное в первом примере из списка примеров на стр. 55) является ковариантным функтором $\mathscr{T}op(X) \xrightarrow{\Gamma} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(X)$, сопряжённым справа к функтору $F \longmapsto E_F$, т. е.

[19] как мы отмечали на стр. 52, эта диаграмма является *обратным спектром*

[20] и потому являющуюся *обратным спектром* (см. стр. 52)

[21] по-английски: *stalk*

[22] поучительно, хотя и не обязательно, шаг за шагом проследить на языке топологических пространств и сечений все задействованные здесь общекатегорные рассуждения — лемму Ионеды (n° 5.4.1 на стр. 44), реализацию произвольного предпучка F в виде предела представимых предпучков (диаграмма (6-3) на стр. (6-3)) и, наконец, конструкцию продолжения по непрерывности из n° 6.4.3

установите функториальную по $F \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{P}re\mathscr{S}h(X)$ и $\left(Z \xrightarrow{p} X\right) \in \mathscr{T}op(X)$ биекцию

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}op(X)}(E_F, Z) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(X)}(F, \Gamma_Z) \tag{6-4}$$

Указание. Это ровно тот же функтор Γ, что и в доказательстве теоремы о продолжении, однако поучительно дать и чисто топологическое доказательство.

Итак, мы имеем пару сопряжённых функторов

$$\mathscr{P}re\mathscr{S}h(X) \underset{\Gamma_Z \leftarrow Z}{\overset{F \to E_F}{\rightleftarrows}} \mathscr{T}op(X)\ , \tag{6-5}$$

что позволяет думать о предпучках в терминах их этальных пространств.

Упражнение 6.31. Непрерывное отображение топологических пространств $Z \xrightarrow{p} X$ называется *локальным гомеоморфизмом*, если у каждой точки $z \in Z$ имеется открытая окрестность, которая гомеоморфно отображается на некоторую открытую окрестность точки $p(z)$. Покажите, что сопряжённых функторы (6-5) задают взаимно обратные эквивалентности между категорией пучков на X и категорией локальных гомеоморфизмов $Z \xrightarrow{\text{loc. homeo}} X$.

6.7.1. Пример: прямой образ предпучка. Всякое непрерывное отображение $X \xrightarrow{f} Y$ индуцирует функтор *подъёма открытых множеств* $\mathscr{U}(Y) \xrightarrow{f^{-1}} \mathscr{U}(X)$, который можно воспринимать и как функтор $\mathscr{U}^{\mathrm{opp}}(Y) \xrightarrow{f^{-1}} \mathscr{U}^{\mathrm{opp}}(X)$. Правое умножение предпучка $\mathscr{U}^{\mathrm{opp}}(X) \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ на этот функтор называется *прямым образом* (или *спуском*) F с X на Y и обозначается

$$f_\bullet F \overset{\text{def}}{=} F \circ f^{-1}$$

Объект сечений $f_\bullet(U) \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ над открытым $U \subset Y$ равен $F\left(f^{-1}(U)\right)$. В ситуации, когда $U \xhookrightarrow{f} Y$ является *окрытым вложением* (соотв. *замкнутым вложением*), прямой образ $f_\bullet F$ обычно называется *продолжением нулём* предпучка F с X на Y (соотв. *пучком-небоскрёбом*), сосредоточенным на $X \subset Y$. В самом деле, над всеми открытыми $U \subset Y$, не пересекающимися с X, его сечения тривиальны, а над открытыми $U \subset Y$, задевающими X, сечения $f_\bullet F(U) = F(U \cap X)$.

6.7.2. Пример: обратный образ предпучка. Описанный в предыдущем примере функтор прямого образа, ассоциированный с непрерывным отображением $X \xrightarrow{f} Y$, допускает левый сопряжённый функтор

$$\mathscr{P}re\mathscr{S}h(Y) \xrightarrow{f^\bullet} \mathscr{P}re\mathscr{S}h(X)\ ,$$

который называется *подъёмом* или *обратным образом*. Для заданного предпучка F на Y сечение предпучка $f^\bullet F$ над открытым $U \subset X$ представляет собою, по определению, параметризованное точками $x \in U$ семейство ростков $w_x \in F_{f(x)}$, такое что $\forall\ y \in U$ существует открытое $W \ni f(y)$ в Y и сечение $s \in F(W)$, росток которого (представленный парой (W, s)) совпадает с w_x для всех x из некоторой открытой окрестности $V \subset f^{-1}(W) \cap U$, $V \ni y$.

Упражнение 6.32. Убедитесь, что это действительно предпучок и постройте для любых предпучков E на X и F на Y естественный изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(X)}(f^\bullet F, E) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(Y)}(F, f_\bullet E)$.

6.7.3. Пример: подъём и спуск этальных пространств. С непрерывное отображением $X \xrightarrow{f} Y$ также связаны функтор спуска на Y пространств над X $\mathscr{T}op(X) \xrightarrow{f_*} \mathscr{T}op(Y)$, переводящий $Z \xrightarrow{p} X$ в *левую* композицию $Z \xrightarrow{f \circ p} Y$, и функтор подъёма на X пространств над Y

$$f^* : \mathscr{T}op(Y) \xrightarrow{Z \mapsto X \underset{Y}{\times} Z} \mathscr{T}op(X)\,,$$

переводящий пространство $Z \xrightarrow{p} Y$ в *послоенное произведение* $X \underset{Y}{\times} Z$ над Y, определяемое универсальной диаграммой (6-1)

$$\begin{tikzcd} X \underset{Y}{\times} Z \arrow[r] \arrow[d, "f^*p"'] & Z \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y\,. \end{tikzcd}$$

Упражнение 6.33*. Как связаны между собой[23] предпучки $f^{\bullet}F$ и $\Gamma_{f^*E_F}$ на X для данного предпучка F на Y, и пучки $f_{\bullet}G$ и $\Gamma_{f_*E_G}$ на Y для данного предпучка G на X?

6.8. Пучки. Предпучок F на X называется *пучком*, если $\forall$ семейства открытых множеств $\{U_\alpha\}$ и набора сечений $s_\alpha \in F(U_\alpha)$, таких что $\forall\ \alpha,\beta\ s_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$, существует единственное сечение $s \in F(\bigcup\limits_\alpha U_\alpha)$ такое, что $s|_{U_\alpha} = s_\alpha\ \forall\ \alpha$. Отметим, что для пустого множества (представленного в виде объединения пустых множеств) это требование означает, что $F(\varnothing)$ состоит из одного элемента, а для любой пары открытых множеств U, V мы должны иметь

$$U\cap W=\varnothing \qquad \Rightarrow \qquad F(U\cup W) = F(U)\times F(W)\,. \tag{6-6}$$

Ясно, что пучки образуют полную подкатегорию $\mathscr{S}h(X)\subset \mathscr{P}re\mathscr{S}h(X)$.

6.8.1. Пример: постоянный пучок. Зафиксируем какое-нибудь множество K. Постоянный предпучок $\overline{K}$, имеющий одно и то же множество сечений $\overline{K}(U) = K$ над всеми открытыми U и тождественные отображения ограничения, практически никогда не является пучком, ввиду очевидного нарушения соотношения (6-6). По определению, *постоянный пучок* $\widetilde{K}$, ассоциированный с K, сопоставляет каждому открытому U множество *непрерывных* относительно дискретной топологии на K локальных функций $U \longrightarrow K$. Такая функция является константой только над *связными компонентами* множества U. Поэтому $\widetilde{K}(U) = K$ только над связными U, а в общем случае $\widetilde{K}(U) = K^{\pi_0(U)}$, где $\pi_0(U)$ есть число связных компонент U.

Упражнение 6.34. Вычислите первообразную действительной функции $1/x$.

Указание. Типичный ответ: «$\log|x| + C$, где C — произвольная константа» *неправилен*[24]; на самом деле C является сечением *постоянного пучка* $\widetilde{\mathbb{R}}$ над несвязным открытым множеством $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Упражнение 6.35. Какие из оставшихся предпучков, перечисленных в списке примеров на стр. 55, являются пучками?

Упражнение 6.36. Проверьте, что обратный образ любого предпучка всегда является пучком. В частности, убедитесь, что постоянный пучок $\widetilde{K}$ на X является подъёмом постоянного предпучка $\overline{K}$ над точкой вдоль отображения, стягивающего X в эту точку.

6.8.2. Пример: опучковывание. С каждым предпучком F на топологическом пространстве X канонически связан пучок $\widetilde{F} = \Gamma_{E_F}$ вместе с каноническим морфизмом предпучков $F \xrightarrow{\varrho_F} \widetilde{F}$ (действием естественного преобразования (5-14) над F), который «униерсален» в том смысле, что для любого морфизма $F \xrightarrow{\varphi} E$ в любой пучок E существует единственный морфизм $\widetilde{F} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} E$, такой что $\widetilde{\varphi}\circ\varrho_F = \varphi$. Переход от предпучка F к пучку $\widetilde{F}$ называется *опучковыванием*.

Упражнение 6.37. Убедитесь, что пучок $\widetilde{F}$ имеет следующее *явное* описание. Для каждого открытого $U\subset X$ рассмотрим прямое произведение всех слоев $F_U \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{x\in U} F_x$ и определим $\widetilde{F}(U)\subset F_U$ как множество таких семейств ростков $\{s_x\}_{x\in U}$, что для любого $y\in U$ существует открытая окрестность $W\ni y$ и локальное сечение $t\in F(W)$, росток которого (представленный парой (W,t)) равен $s_x\ \forall\ x\in W\cap U$. Проверьте (независимо от общекатегорной машинерии из (5-14)), что эта топологическая конструкция действительно определяет пучок, обладающий нужным универсальным свойством.

Упражнение 6.38. Покажите, что композиция $\Gamma\circ E$ сопряжённых функторов (6-5) является правым сопряжённым функтором к вложению $\mathscr{S}h(X) \hookrightarrow \mathscr{P}re\mathscr{S}h(X)$ и вернитесь к упр. 6.33.

6.8.3. Пример: локально точные дифференциальные 1-формы на окружности S^1 (вещественные, бесконечно гладкие, т. е. 1-кограницы в теории когомологий Де Рама) образуют предпучок B, сечения которого над открытым множеством $U\subset S^1$ суть дифференциалы df гладких функций $U \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Этот предпучок не является пучком. Действительно, зафиксируем на S^1 «натуральный параметр[25]» t. Поскольку t не является глобально определённой гладкой функцией $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ (почему?), дифференциальная форма dt не является глобально точной, т. е. не принадлежит множеству сечений $B(S^1)$. Однако её ограничение на каждое стягиваемое открытое подмножество $U\subset S^1$ является локально точной формой (т. е. сечением

[23] мы вернёмся к этой задаче в упр. 6.38

[24] и известны даже случаи, когда поступавшим на мех-мат абитуриентам ставили за такой ответ двойку на устном экзамене по математике

[25] т. е. ориентированную длину дуги

$dt|_U \in B(U)$), причём все такие локальные сечения согласованы на пересечениях. Покрывая S^1 односвязными интервалами, мы получаем согласованный набор локальных сечений предпучка B, который нельзя склеить в одно глобальное сечение.

Пучок $\widetilde{B}$ ассоциированный с предпучком B имеет в качестве локального сечения над $U \subset S^1$ следующий набор данных: покрытие $U = \cup W_\nu$ и формы $df_\nu \in B(W_\nu)$, такие что $df_\mu = df_\nu$ над непустыми $W_\mu \cap W_\nu$. Этот пучок правильно воспринимать как *образ* гомоморфизма пучка гладких функций в пучок гладких 1-форм $C^\infty(S^1) \xrightarrow{d} \Gamma(T^*S^1)$ в категории пучков абелевых групп пространств на S^1.

Упражнение 6.39. Проверьте, что прямой образ пучка всегда является пучком, а прямой образ предпучка, не являющегося пучком, может быть, а может и не быть пучком.