§5. Категории и функторы.

5.1. Категория $\mathscr{C}$ — это класс[1] объектов, обозначаемый $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ задано множество морфизмов $\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$. Морфизмы из X в Y удобно представлять себе в виде стрелок $X \xrightarrow{\varphi} Y$. Для разных пар объектов эти множества стрелок не пересекаются. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ имеется отображение композиции

$$\mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{(\varphi,\psi)\mapsto\varphi\circ\psi} \mathrm{Hom}(X,Z)\ , \tag{5-1}$$

которое ассоциативно в том смысле, что $(\chi\circ\varphi)\circ\psi = \chi\circ(\varphi\circ\psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, для каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ имеется *тождественный морфизм*[2] $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$, удовлетворяющей условиям $\varphi\circ\mathrm{Id}_X = \varphi$ и $\mathrm{Id}_X\circ\psi = \psi$ для любых морфизмов $X \xrightarrow{\varphi} Y$, $Y \xrightarrow{\psi} X$ с любым $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

Объекты $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ называются *изоморфными* (обозначение: $X \simeq Y$), если между ними имеются две стрелки $X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} Y$, такие что $\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}_Y$, $\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}_X$ (эти стрелки называются взаимно обратными *изоморфизмами*).

Подкатегория $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ — это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathscr{C}$. Подкатегория $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ называется *полной*, если $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$. Стандартными примерами «больших» категорий являются:

- категория $\mathscr{S}et$ всех множеств и всех отображений;
- категория $\mathscr{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений;
- категория $\mathscr{V}ect_{\mathbb{F}}$ векторных пространств над полем $\mathbb{F}$ и $\mathbb{F}$-линейных отображений;

а также группы, кольца, алгебры и т. п. с соответствующими гомоморфизмами в качестве стрелок. Категория называется *малой*, если её объекты составляют *множество* (а не больший класс). Например:

- любое частично упорядоченное множество X является малой категорией, объектами которой служат элементы x этого множества, а стрелки отвечают неравенствам:

$$\mathrm{Hom}_X(x,y) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } x \leqslant y, \\ \text{пустое множество, когда } x \text{ и } y \text{ несравнимы.} \end{cases}$$

- со всяким топологическим пространством X связана категория $\mathscr{U}(X)$ всех открытых подмножеств X, морфизмами в которой являются вложения $U \hookrightarrow V$, если $U \subseteq V$, а если $U \nsubseteq V$, то $\mathrm{Hom}(U,V) = \varnothing$ (это частный случай предыдущей ситуации).

5.1.1. Малые категории как ассоциативные алгебры. Всякую ассоциативную алгебру A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(e,e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathscr{C}$ можно связать *алгебру стрелок* C, состоящую из формальных

[1] нам бы не хотелось вдаваться в точную формализацию этого термина (столь же содержательную, как формализации арифметики и теории множеств, разбираемые в стандартном курсе математической логики); отметим лишь, что такая формализация возможна и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют

[2] обычная выкладка $\mathrm{Id}' = \mathrm{Id}'\circ\mathrm{Id}'' = \mathrm{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единственен

конечных линейных комбинаций всех стрелок категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в каком – нибудь поле[3] $\mathbb{F}$:

$$C = \bigoplus_{X,Y\in \operatorname{Ob}\mathscr{C}} \operatorname{Hom}(X,Y)\otimes\mathbb{F}\,.$$

Умножение в этой алгебре индуцируется композицией стрелок:

$$\varphi\psi = \begin{cases} \varphi\circ\psi & \text{, если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{, во всех прочих случаях}\,, \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на линейные комбинации стрелок. Алгебру C удобно представлять себе как алгебру квадратных матриц[4], клетки которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y,X) стоят элементы из своего пространства $\operatorname{Hom}(X,Y)\otimes\mathbb{F}$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f\in C$ существует идемпотент[5] e_f, такой что $e_f\circ f = f\circ e_f = f$ и $e_f^2 = e_f$.

5.1.2. Пример: категория конечных упорядоченных множеств. Мы будем обозначать через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — неубывающие[6] отображения $X \xrightarrow{\varphi} Y$. Для любого целого неотрицательного n обозначим через $\underline{n}\in\operatorname{Ob}\Delta_{\text{big}}$ множество целых чисел $\{0,\,1,\,\dots\,,\,n\}$ со стандартным порядком. Эти множества и все неубывающие отображения между ними образуют полную подкатегорию $\Delta\subset\Delta_{\text{big}}$, которая является малой и называется категорией *комбинаторных симплексов*.

Упражнение 5.1. Сколько всего стрелок в множестве $\operatorname{Hom}_{\Delta}(\underline{n},\underline{m})$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных?

Упражнение 5.2. Покажите, что алгебра стрелок[7] D категории Δ, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \operatorname{Id}_{\underline{n}} \qquad \text{(тождественное отображение)} \tag{5-2}$$

$$\underline{(n-1)} \xhookrightarrow{\partial_n^{(i)}} \underline{n} \qquad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{5-3}$$

$$\underline{n} \xrightarrow{s_n^{(i)}} \underline{(n-1)} \qquad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{5-4}$$

и попробуйте описать образующие идеала соотношений между этими стрелками.

Заметим, что категория Δ_{big} «всех» конечных множеств хоть и не является малой[8], однако для любого $X\in\operatorname{Ob}\Delta_{\text{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм

$$X \underset{\sim}{\xrightarrow{n_X}} \underline{n} \tag{5-5}$$

с *единственным* $\underline{n}\in\operatorname{Ob}\Delta$ (нумерация элементов X в порядке возрастания).

5.1.3. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathscr{C}$ связана *противоположная* категория $\mathscr{C}^{\text{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\operatorname{Ob}\mathscr{C}^{\text{opp}} = \operatorname{Ob}\mathscr{C}\,,\quad \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^{\text{opp}}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)\,,\quad \varphi^{\text{opp}}\circ\psi^{\text{opp}} = (\psi\circ\varphi)^{\text{opp}}\,.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход к противоположной алгебре C^{opp}, умножение в которой происходит в противоположном порядке: $f \underset{C^{\text{opp}}}{\circ} g = f \underset{C}{\circ} g$.

[3]через $M\otimes\mathbb{F}$, где M — множество, а $\mathbb{F}$ — поле, мы всегда будем обозначать векторное пространство над F, базисом которого являются элементы M, т.е. множество всех *конечных* формальных линейных комбинаций элементов множества M с коэффициентами из $\mathbb{F}$

[4]вообще говоря, бесконечного размера, но имеющих лишь конечное число ненулевых элементов

[5]т.е. элемент, квадрат которого совпадает с ним самим

[6]т.е. сохраняющие порядок: $x_1\leqslant x_2 \iff \varphi(x_1)\leqslant\varphi(x_2)$

[7]скажем, с коэффициентами в $\mathbb{Q}$

[8]по упомянутым выше формальным логическим причинам, см. сноску на стр. 37

5.2. Функтор $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$ — это отображение

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \xrightarrow{X \mapsto F(X)} \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}\,,$$

и набор отображений[9]

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \xrightarrow{\varphi \mapsto F(\varphi)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),F(Y))\,, \tag{5-6}$$

таких что $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)} \quad \forall\, X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр функторы являются *гомоморфизмами* из одной алгебры стрелок в другую. Часто вместо слова «функтор» говорят *ковариантный функтор*.

Если все отображения (5-6) сюрьективны, то функтор F называется *полным*[10]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (5-6) инъективны, то функтор F называется *строгим*[11]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иногда называют *вполне строгими*.

Функторы $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ называются *контравариантными функторами* из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$ или *предпучками* объектов категории $\mathscr{D}$ на категории $\mathscr{C}$ (мы чаще всего будем использовать именно это последнее название). Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

Тривиальными примерами функторов являются *тождественный функтор* $\mathscr{C} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}} \mathscr{C}$, тривиально действующий на объектах и морфизмах любой категории $\mathscr{C}$, а также *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с *дополнительной структурой*[12] (морфизмы в которой суть отображения множеств, сохраняющие рассматриваемую структуру) в категорию $\mathscr{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре и являются строгими и (как правило) не полными.

5.2.1. Пример: геометрическая реализация симплексов. Зададим функтор $\Delta \xrightarrow{\underline{n} \mapsto \Delta^n} \mathscr{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя объекту $\underline{n}$ стандартный n-мерный симплекс

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum x_\nu = 1\,,\; x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

(выпуклую оболочку концов базисных векторов $e_0, e_1, \ldots, e_n$), а стрелке $\underline{n} \xrightarrow{\varphi} \underline{m}$ — единственное аффинное отображение из одного такого симплекса в другой, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (5-3) и (5-4) алгебры стрелок категории Δ переводятся этим функтором, соответственно, в отображение вложения i-той грани $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$ и в отображение вырождения $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{(n-1)}$, задаваемого аффинной проекцией вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й.

5.2.2. Пример: триангулированные пространства и симплициальные комплексы. Обозначим через $\Delta_{\mathrm{tr}} \subset \Delta$ неполную подкатегорию с тем же множеством объектов $\mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{tr}} = \mathrm{Ob}\,\Delta$, но только со *строго возрастающими* отображениями в качестве морфизмов.

Упражнение 5.3. Убедитесь, что алгебра стрелок Δ_{tr} порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{\underline{n}}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$.

Предпучок $\Delta_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{X} \mathscr{S}et$ есть не что иное как комбинаторное представление для *триангулированного топологического пространства*. В самом деле, такой функтор задаётся набором множеств $X_n = X(\underline{n})$, каждое из которых следует воспринимать как дизъюнктный набор n-мерных симплексов, из которых будет склеено наше триангулированное пространство, и набором отображений

$$X_m \xrightarrow{X_\varphi} X_n\,,$$

[9] по одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$

[10] по-английски: *full*

[11] по-английски: *faithful*

[12] например, геометрической — такой как топология или структура гладкого многообразия — или алгебраической — такой как структура группы, кольца или модуля

которые представляют собой *правила склейки*: каждая стрелка $\underline{m} \xrightarrow{\varphi} \underline{n}$ в Δ фиксирует комбинаторный тип m-мерной грани абстрактного комбинаторного n-мерного симплекса $\underline{n}$, а соответствующая стрелка $X_n \xrightarrow{X(\varphi)} X_m$ указывает каждому конкретному n-симплексу $x \in X_n$ пространства X, какой именно m-симплекс $X(\varphi)x \in X_m$ следует к подклеить к x в качестве этой φ-той m-мерной грани.

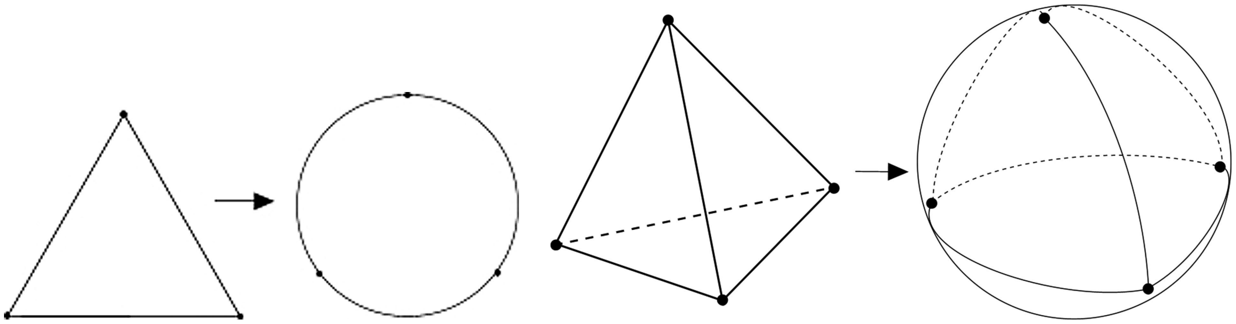

Рис. 5◇1. Стандартные триангуляции окружности и сферы

Упражнение 5.4. Опишите предпучки $\Delta_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{F} \mathscr{S}et$, отвечающие стандартным триангуляциям окружности, сферы и тора, представленным на рис. 5◇1, рис. 5◇2.

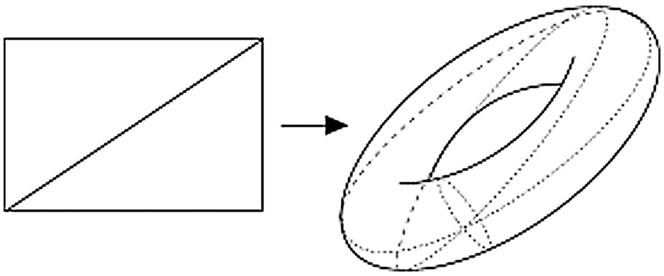

Рис. 5◇2. Стандартная триангуляция тора.

Более общим образом, предпучки $\Delta^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{X} \mathscr{S}et$ задают *симплициальные комплексы*, т. е. пространства, оснащённые «вырожденными» триангуляциями, в которых часть n-мерных симплексов вклеивается в виде m-мерных с $m < n$. В самом деле, неинъективному монотонному отображению — скажем, элементарному вырождению (5-4), стягивающему ребро $[i, (i+1)]$, — отвечает отображение

$$X_{n-1} \xrightarrow{X\left(s_n^{(i)}\right)} X_n \ ,$$

которое указывает каждому $(n-1)$-симплексу $x \in X_{n-1}$, какой именно n-симплекс из X_n следует приклеить к пространству X в виде $(n-1)$-симплекса x, предварительно выродив его при помощи проекции вдоль ребра $[i, (i+1)]$.

Упражнение 5.5*. Точно опишите предпучки $\Delta^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{F} \mathscr{S}et$, отвечающие «вырожденным триангуляциям» окружности и сферы, представленным на рис. 5◇3 и рис. 5◇4.

Указание. Будьте внимательны: на этот раз множества X_n с неизбежностью будут не пусты *при всех* $n \gg 0$!

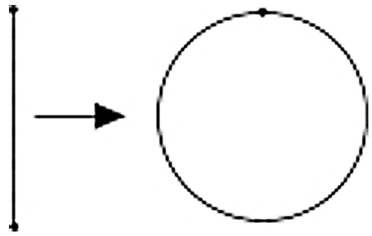

Рис. 5◇3.

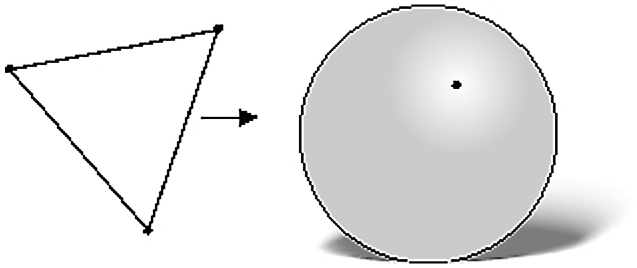

Рис. 5◇4.

5.2.3. Пример: двойственность между векторными пространствами. Функтор дуализации

$$\mathscr{V}ect_{\mathbb{F}}^{\text{opp}} \xrightarrow{V \mapsto V^*} \mathscr{V}ect_{\mathbb{F}}$$

переводит векторное пространство V в двойственное векторное пространство $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{F})$, а каждое линейное отображение $V \xrightarrow{\varphi} W$ в двойственное отображение $W^* \xrightarrow{\varphi^*} V^*$ действующее на $W \xrightarrow{\xi} \mathbb{F}$ правым умножением на φ.

5.2.4. Пример: двойственность между конечными упорядоченными множествами. Этот пример доставляет комбинаторную версию предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств, содержащих $\geqslant 2$ элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[13]. Тавтологическое включение $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \Delta_{\text{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Более интересны контравариантные *функторы дуализации*

$$\Delta_{\text{big}}^{\text{opp}} \xrightarrow{X \mapsto X^*} \nabla_{\text{big}}$$
$$\nabla_{\text{big}}^{\text{opp}} \xrightarrow{Y \mapsto Y^*} \Delta_{\text{big}}$$

задаваемые, как и в предыдущем примере, правилами

$$X \mapsto X^* \overset{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\Delta_{\text{big}}}(X, \underline{1}) \quad (\text{для } X \in \text{Ob}\,\Delta_{\text{big}})$$
$$Y \mapsto Y^* \overset{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, \underline{1}) \quad (\text{для } Y \in \text{Ob}\,\nabla_{\text{big}}),$$

где порядок на множестве $\text{Hom}(X, \underline{1})$ задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi \iff \varphi(x) \leqslant \psi(x) \quad \forall\, x \in X \ ,$$

а действие на стрелки заключается в том, что $Z_1 \xrightarrow{\varphi} Z_2$ переходит в морфизм

$$\text{Hom}(Z_2, \underline{1}) \xrightarrow{\xi \mapsto \xi \circ \varphi} \text{Hom}(Z_1, \underline{1})$$

правого умножения на стрелку φ.

Иначе можно сказать, что оба дуализирующих предпучка сопоставляют конечному упорядоченному множеству множество его «дедекиндовых сечений». А именно, для $X \in \text{Ob}\,\Delta_{\text{big}}$ множество X^* есть множество всех[14] разбиений $X = X_0 \sqcup X_1$ с $x_0 < x_1$ для всех $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$. Для $Y \in \text{Ob}\,\nabla_{\text{big}}$ множество Y^* есть множество всех собственных разбиений $Y = Y_0 \sqcup Y_1$, в которых оба $Y_i \neq \varnothing$. Ясно, что сечения ведут себя контравариантно по отношению к морфизмам: при наличии (нестрогого) монотонного отображения $Z_1 \longrightarrow Z_2$ разбиение на Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

5.2.5. Пример: аффинная алгебраическая геометрия. Этот пример является нелинейной версией n° 5.2.3. Фиксируем алгебраически замкнутое поле $\mathbb{F}$ и рассмотрим следующие две категории:

- категория $\mathscr{A}\!f\!f(\mathbb{F})$ *аффинных алгебраических многообразий*, объектами которой являются подмножества $X \subset \mathbb{F}^n$, задаваемые системами полиномиальных уравнений, а морфизмами из $X \subset \mathbb{F}^n$ в $Y \subset \mathbb{F}^m$ являются отображения $X \longrightarrow Y$ индуцированные полиномиальными заменами переменных[15] $\mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ в объемлющих аффинных пространствах.
- категория $\mathscr{A}\!lg(\mathbb{F})$ конечно порождённых приведённых[16] $\mathbb{F}$-алгебр с единицей с гомоморфизмами алгебр, переводящими единицу в единицу, в качестве стрелок.

Роль «дуализирующего объекта» снова будет играть поле $\mathbb{F}$, которое можно рассматривать и как аффинную прямую $\mathbb{F} = \mathbb{A}^1 \in \text{Ob}\,\mathscr{A}\!f\!f(\mathbb{F})$, и как алгебру над собой $\mathbb{F} \in \text{Ob}\,\mathscr{A}\!lg(\mathbb{F})$. Предпучки

$$\begin{aligned} X &\mapsto \mathbb{F}[X] \overset{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathscr{A}\!f\!f(\mathbb{F})}(X, \mathbb{F}) \in \text{Ob}\,\mathscr{A}\!lg(\mathbb{F}) && (\text{для } X \in \text{Ob}\,\mathscr{A}\!f\!f(\mathbb{F})) \\ A &\mapsto \text{Spec}_{\text{m}}(A) \overset{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathscr{A}\!lg(\mathbb{F})}(A, \mathbb{F}) \in \text{Ob}\,\mathscr{A}\!f\!f(\mathbb{F}) && (\text{для } A \in \text{Ob}\,\mathscr{A}\!lg(\mathbb{F})) \ , \end{aligned} \tag{5-7}$$

[13] отметим, что минимальный и максимальный элементы различны

[14] включая несобственные разбиения, в которых одно из подмножеств X_i пустое

[15] т.е. отображениями $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \dots, y_m) = (f_1(x),\ f_2(x),\ \dots\ ,\ f_m(x))$ где $f_i(x) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$

[16] напомним, что алгебра называется *приведённой*, если в ней нет нильпотентнх элементов, т.е. $a^m = 0 \Rightarrow a = 0$

сопоставляют аффинному алгебраическому многообразию $X \subset \mathbb{F}^n$ алгебру полиномиальных функций $\mathbb{F}[X] \simeq \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ на нём (где $I(X) \subset \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — идеал всех полиномов, зануляющихся вдоль многообразия X), а каждой алгебре A — множество $\mathrm{Spec_m}(A)$ гомоморфизмов вычисления[17] $A \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathbb{F}$. Структура аффинного многообразия на $\mathrm{Spec_m}(A)$ индуцируется выбором в A образующих, т. е. представлением $A = \mathbb{F}[a_1, a_2, \dots, a_m]/J$, где $a_1, a_2, \dots, a_m$ — образующие, а $J \subset \mathbb{F}[a_1, a_2, \dots, a_m]$ — идеал всех полиномиальных соотношений между ними; каждому максимальному идеалу $\mathfrak{m} = \ker(\mathrm{ev}_\mathfrak{m}) \in \mathrm{Spec_m}(A)$ при этом отвечает точка

$$p_\mathfrak{m} = (\, a_1 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})\, ,\, a_2 \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})\, ,\, \dots\, ,\, a_m \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})\,) \in \mathbb{F}^m$$

(это единственная точка пространства $\mathbb{F}^m$, в которой одновременно обращаются в нуль все элементы $f(a) \in \mathfrak{m}$, рассматриваемые как многочлены от образующих); в результате возникает взаимно однозначно соответствие между $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec_m}(A)$ и точками $p_\mathfrak{m} \in X(A)$ аффинного алгебраического многообразия $X(A) \subset \mathbb{F}^m$, задаваемого идеалом J в аффинном пространстве с координатами $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, и «абстрактные» гомоморфизмы вычисления $A \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathbb{F}$ переходят при этом соответствии в «обычные» гомоморфизмы вычисления значения

$$\mathrm{ev}_{p_\mathfrak{m}} : f(a) \longmapsto f(p_\mathfrak{m}) = f\,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m}) \in \mathbb{F}$$

полиномов $f \in \mathbb{F}[a_1, a_2, \dots, a_m]$ в точках $p_\mathfrak{m} \in X(A)$.

Упражнение 5.6. Убедитесь, что действие функторов (5-7) на морфизмы (переводящее, как и выше, стрелку φ в морфизм φ^* правого умножения на эту стрелку) геометрически соответствует *гомоморфизмам подъема*: отображение многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ индуцирует гомоморфизм подъёма $\mathbb{F}$-значных полиномиальных функций

$$\varphi^* : \mathbb{F}[Y] \xrightarrow{f \mapsto f\circ\varphi} \mathbb{F}[X]\,,$$

а гомоморфизм алгебр $A \xrightarrow{\varphi} B$ индуцирует подъём спектров

$$\varphi^* : \mathrm{Spec_m}(B) \xrightarrow{\mathrm{ev} \mapsto \mathrm{ev}\circ\varphi} \mathrm{Spec_m}(A)$$

(на языке максимальных идеалов $\mathfrak{m} = \ker \mathrm{ev} \subset B$ переходит в полный прообраз $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset A$).

5.2.6. Пример: функторы Hom. Этот пример обобщает все предыдущие. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ произвольной категории $\mathscr{C}$ связаны ковариантный функтор $\mathscr{C} \xrightarrow{h^X} \mathscr{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов $h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, Y)$, а стрелку $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$ в композицию

$$h^X(\varphi)\ :\ h^X(Y_1) = \mathrm{Hom}(X, Y_1) \xrightarrow{\psi \mapsto \varphi\circ\psi} \mathrm{Hom}(X, Y_2) = h^X(Y_2)\,,$$

и предпучок $\mathscr{C} \xrightarrow{h_X} \mathscr{S}et$, переводящий объект Y в $h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y, X)$, а стрелку $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$ в композицию

$$h_X(\varphi)\ :\ h_X(Y_2) = \mathrm{Hom}(Y_2, X) \xrightarrow{\psi \mapsto \psi\circ\varphi} \mathrm{Hom}(Y_1, X) = h_X(Y_1)\,.$$

5.3. Категория функторов.

Функторы $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ образуют категорию $\mathscr{F}un(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, морфизмами которой являются *естественные преобразования* $F \xrightarrow{f} G$, т. е. такие семейства стрелок $F(X) \xrightarrow{f_X} G(X)$ в категории $\mathscr{D}$ (по одной стрелке для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$), что любая стрелка $X \xrightarrow{\varphi} Y$ в $\mathscr{C}$ порождает *коммутативную диаграмму* морфизмов в $\mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(Y) \arrow[r, "G(\varphi)"] & G(Y) \end{tikzcd} \qquad (5\text{-}8)$$

[17] т. е. эпиморфизмов, переводящих единицу в единицу; такие эпиморфизмы взаимно однозначно соответствуют максимальным идеалам $\mathfrak{m} = \ker(\mathrm{ev})$; поэтому множество $\mathrm{Spec_m}(A)$ называется *максимальным спектром* алгебры A

Функторы $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ называются (*квазиобратными*) *эквивалентностями категорий*, если композиция GF изоморфна тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ в категории $\mathscr{F}un(\mathscr{C},\mathscr{C})$, а композиция FG изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ в категории $\mathscr{F}un(\mathscr{D},\mathscr{D})$.

5.3.1. Пример: выбор базиса. Пусть $\mathscr{V}ect$ временно означает категорию *конечномерных* векторных пространств над фиксированным полем $\mathbb{F}$, а $\mathscr{C} \subset \mathscr{V}ect$ — её малую полную подкатегорию, образованную счётным множеством *координатных пространств* $\mathbb{F}^n$. Зафиксируем для каждого конечномерного пространства V какой-нибудь изоморфизм[18]

$$V \xrightarrow[\sim]{f_V} \mathbb{F}^{\dim(V)} \tag{5-9}$$

так, чтобы $f_{\mathbb{F}^n} = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}\ \forall\, n$, и определим функтор $\mathscr{V}ect \xrightarrow{F} \mathscr{C}$, полагая $F(V) = \mathbb{F}^{\dim V}$ и

$$F\left(V \xrightarrow{\varphi} W\right) = \mathbb{F}^{\dim V} \xrightarrow{f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}} \mathbb{F}^{\dim W} \tag{5-10}$$

(что «на практике» означает представление линейного оператора φ матрицей в базисах f_V и f_W). Тогда F тавтологически является эквивалентностью категорий, квазиобратной к строго полному вложению $\mathscr{C} \xhookrightarrow{G} \mathscr{V}ect$. Действительно, по построению $FG = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ (это не изоморфизм, а *точное равенство*!), а функтор $\mathscr{V}ect \xrightarrow{GF} \mathscr{V}ect$ хоть и принимает значения в малой подкатегории $\mathscr{C} \subset \mathscr{V}ect$ (бесконечно далёкой от $\mathscr{V}ect$ по мощности), но, тем не менее, изоморфен $\mathrm{Id}_{\mathscr{V}ect}$ в категории $\mathscr{F}un(\mathscr{V}ect,\mathscr{V}ect)$. Изоморфизм задаётся преобразованием (5-9), которое является *естественным* в следствие нашего определения действия функтора F на стрелки: формула (5-10) есть ни что иное, как требование коммутативности всех диаграмм (5-8):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathscr{V}ect}(V) = V \arrow[r, "\varphi = \mathrm{Id}_{\mathscr{V}ect}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"', "\sim"] & W = \mathrm{Id}_{\mathscr{V}ect}(W) \arrow[d, "\sim"', "f_W"] \\
GF(V) = \mathbb{F}^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}"] & \mathbb{F}^{\dim W} = GF(W)
\end{tikzcd}$$

Упражнение 5.7. Покажите, что по аналогичным причинам категория Δ_{big} *канонически* эквивалентна своей малой полной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$.

Указание. Воспользуйтесь каноническими изоморфизмами (5-5).

Упражнение 5.8. Покажите, что функтор $\mathscr{C} \xrightarrow{G} \mathscr{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[19] и каждый объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ (где $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ может зависеть от Y).

Указание. Зафиксируйте для каждого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ какой-нибудь изоморфизм $Y \xrightarrow[\sim]{f_Y} G(X)$ так, чтобы $f_{F(X)} = \mathrm{Id}_{F(X)}$ и далее стройте $\mathscr{D} \xrightarrow{F} \mathscr{C}$ точно также, как в примере n° 5.3.1.

Упражнение 5.9. Покажите, что функтор дуализации из n° 5.2.3 индуцирует (квазиобратную самой себе) эквивалентность между категорией конечномерномерных векторных пространств и её противоположной категорией.

Упражнение 5.10. Покажите, что функторы дуализации из примера n° 5.2.4 тоже являются квазиобратными эквивалентностями категорий, т. е. категория $\Delta_{\mathrm{big}}^{\mathrm{opp}}$ эквивалентна категории ∇_{big}.

5.4. Представимые функторы. Категорию предпучков $\mathscr{F}un(\mathscr{C}^{\mathrm{opp}},\mathscr{D})$ (т. е. контравариантных функторов $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$) мы будем чаще обозначать $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C},\mathscr{D})$ и называть категорией *$\mathscr{D}$-предпучков* на $\mathscr{C}$. Опущенная буква $\mathscr{D}$ в этой записи по умолчантию означает, что $\mathscr{D} = \mathscr{S}et$, т. е.

$$\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C}) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathscr{F}un(\mathscr{C}^{\mathrm{opp}},\mathscr{S}et)\ .$$

Упражнение 5.11. Проверьте, что описанное в n° 5.2.6 сопоставление $X \mapsto h_X$ является функтором из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C}) = \mathscr{F}un(\mathscr{C}^{\mathrm{opp}},\mathscr{S}et)$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — $\mathscr{F}un(\mathscr{C},\mathscr{S}et)$-предпучком на $\mathscr{C}$ (т. е. функтором из $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}$ в $\mathscr{F}un(\mathscr{C},\mathscr{S}et)$).

[18] т. е. зафиксируем в каждом V базис

[19] т. е. все отображения $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \xrightarrow{\varphi \mapsto G(\varphi)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(G(X),G(Y))$ являются изоморфизмами

Всякий предпучок $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$, изоморфный функтору h_X в категории $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$, называется *представимым*. Двойственным образом, всякий ковариантный функтор $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}et$ изоморфный в категории $\mathscr{F}un(\mathscr{C}, \mathscr{S}et)$ функтору h^X называется *копредставимым*. Объект X называется при этом *(ко)представляющим* объектом такого (ко)представимого функтора.

Упражнение 5.12. Убедитесь, что представимый предпучок $h_{\underline{n}}$ на категории Δ_{tr} является триангулированным пространством, канонически изоморфным (в категории триангулированных пространств) стандартному симплексу Δ^n (со стандартной триангуляцией).

Следующая лемма является тавтологическим общекатегорным обобщением того тривиального факта, что множество $X_n = X(\underline{n})$ всех n-симплексов произвольного симплициального комплекса $\Delta^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{X} \mathscr{S}et$ канонически отождестляется с множеством симплициальных отображений из стандартного n-симплекса Δ^n в X, т. е. с $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}un(\Delta^{\mathrm{opp}},\mathscr{S}et)}(h_{\underline{n}}, X)$.

5.4.1. УТВЕРЖДЕНИЕ (ЛЕММА ИОНЕДЫ). *Для любого предпучка множеств $F \in \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$ на произвольной категории $\mathscr{C}$ имеется функториальная по F и по $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ биекция*

$$F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(h_A, F)\ ,$$

которая переводит элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$\left\{\mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{f_X} F(X)\right\}_{X\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}}\ , \tag{5-11}$$

посылающее стрелку $X \xrightarrow{\varphi} A$ в значение отображения $F(A) \xrightarrow{F(\varphi)} F(X)$ на элементе a. Обратное отображение сопоставляет каждому естественному преобразованию (5-11) значение

$$a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$$

отображения $h_A(A) \xrightarrow{f_A} F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h_A(A) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (5-11), любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и любой стрелки $X \xrightarrow{\varphi} A$ мы имеем коммутативную диаграмму (5-8):

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(X,A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X) \end{tikzcd} \tag{5-12}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)(f_A(\mathrm{Id}_A))$. Это означает, что всякое естественное преобразование $h_A \xrightarrow{f} F$ *однозначно* восстанавливается по элементу $a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$, и наоборот, задавшись произвольным элементом $a \in F(A)$, мы тавтологически *задаём* естественное преобразование f требованием коммутативности всех диаграмм (5-12), когда X пробегает $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Функториальность диаграммы (5-12) по A и F очевидна. $\square$

Упражнение 5.13. Сформулируйте и докажите двойственную версию леммы Ионеды, обслуживающую предпучок $A \longmapsto h^A$ копредставимых функторов на $\mathscr{C}$ и ковариантные функторы $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{S}et$.

5.4.2. СЛЕДСТВИЕ. *Функторы*

$$\mathscr{C} \xrightarrow{X\mapsto h_X} \mathscr{F}un(\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}, \mathscr{S}et)$$
$$\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{X\mapsto h^X} \mathscr{F}un(\mathscr{C}, \mathscr{S}et)$$

из упр. 5.11 являются вполне строгими вложениями категории $\mathscr{C}$ в категории предпучков и (ковариантных) функторов соответственно, т. е.

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(h_A, h_B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}un(\mathscr{C},\mathscr{S}et)}(h_A, h_B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$$

функториально по $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$.

Доказательство. Применяем лемму Ионеды к функторам $F = h_B$ и h^B соответственно. □

5.5. Описание объектов «универсальными» свойствами. Неформально говоря, предыдущее следствие означает, что если функтор F представим, то представляющий этот функтор объект единственен с точностью до «канонического» изоморфизма. Это позволяет, в частности, переносить теоретико множественные конструкции из категории $\mathscr{S}et$ в произвольные категории: результатом интересующей нас теоретико множественной операции над набором объектов $X_i \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ объявляется объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, который представляет функтор $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$, переводящий всякий $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ в множество, получающееся в результате применения нашей операции к множествам $\mathrm{Hom}(Y, X_i)$. Разумеется, такое «неявное» описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта — соответствующий функтор запросто может оказаться непредставимым. Но если удаётся доказать, что функтор представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически будет обладать некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, будет единственен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства.

5.5.1. Пример: произведение $A \times B$ объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ произвольной категории $\mathscr{C}$ определяется как объект, представляющий функтор $Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, A) \times \mathrm{Hom}(Y, B)$ из $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}$ в $\mathscr{S}et$. Если этот функтор представим, то для всех Y мы будем иметь функториальный (по отношению к стрелкам $Y_1 \longrightarrow Y_2$) изоморфизм

$$\beta_Y : \mathrm{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, A) \times \mathrm{Hom}(Y, B)\ .$$

Следуя доказательству из n° 5.4.1, мы можем положить в нём $Y = A \times B$ и записать элемент $\beta_{A\times B}(\mathrm{Id}_{A\times B}) \in \mathrm{Hom}(A \times B, A) \times \mathrm{Hom}(A \times B, B)$ парой стрелок: $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$.

Упражнение 5.14. Убедитесь, что:

а) диаграмма $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$ обладает следующим универсальным свойством: для любых двух стрелок $A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B$ существует единственная стрелка $Y \xrightarrow{\varphi\times\psi} A \times B$, такая что $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$;

б) для любой диаграммы $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$, также обладающей этим универсальным свойством, имеется единственный изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$, $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$.

5.5.2. Пример: копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ определяется двойственным образом, т. е. как объект, копредставляющий ковариантный функтор $Y \mapsto \mathrm{Hom}(A, Y) \times \mathrm{Hom}(B, Y)$ из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму $A \xrightarrow{i_A} A \otimes B \xleftarrow{i_B} B$, универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$ в $\mathscr{C}$ имеется единственный морфизм $A \otimes B \xrightarrow{\varphi\otimes\psi} Y$, такой что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ i_A$, $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ i_B$.

Упражнение 5.15. Убедитесь, что если такая тройка $A \xrightarrow{i_A} A \otimes B \xleftarrow{i_B} B$ существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с отображениями $i_{A,B}$.

Упражнение 5.16. Явно опишите строение произведений и копроизведений (в частности, покажите, что они существуют) в категориях:

а) множеств б) топологических пространств в) абелевых групп г) произвольных групп
д) модулей над коммутативным кольцом е) коммутативных колец с единицей

Упражнение 5.17. Убедитесь, что тензорное произведение $U \otimes V$ векторных пространств U и V копредставляет функтор $\mathscr{V}ect \longrightarrow \mathscr{S}et$, сопоставляющий каждому векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \longrightarrow W$.

Упражнение 5.18. Зафиксируем множество $E \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}et$ и рассмотрим функтор из категории (левых) модулей над фиксированным (возможно, не коммутативным) кольцом K в категорию множеств, сопоставляющий каждому модулю M множество $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}et}(E, M)$ всех теоретико-множественных отображений из E в M. Убедитесь, что этот функтор копредставим, и копредставляющий объект есть модуль $K \otimes E$ всех конечных формальных K-линейных комбинаций элементов множества E (он называется *свободным* K-модулем с *базисом* E).

5.6. Сопряжённые функторы. Функторы $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ между произвольными категориями $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ называются *сопряжёнными*, если они связаны функториальным по $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ и $Y \in \mathscr{D}$ изоморфизмом

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \tag{5-13}$$

(точнее говоря, F называется *левым сопряжённым* к G, а G — *правым сопряжённым* к F). С любой парой сопряжённых функторов канонически связана пара естественных преобразований:

$$F{\circ}G \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}\,, \quad \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \xrightarrow{\varrho} G{\circ}F\,. \tag{5-14}$$

Стрелка $FG(Y) \xrightarrow{\lambda_Y} Y$, задающая действие преобразования λ над $Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{D}$, является образом элемента $\mathrm{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (5-13), написанном для $X = G(Y)$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(FG(Y), Y) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \mathrm{Id}_{G(Y)}\,.$$

Двойственным образом, стрелка $X \xrightarrow{\varrho_X} GF(X)Y$, задающая действие преобразования ϱ над $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$, получается из $\mathrm{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (5-13), написанном для $Y = F(X)$:

$$\mathrm{Id}_{F(X)} \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(X)) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, GF(X))\,.$$

Упражнение 5.19. Убедитесь, что функтор $E \longmapsto E \otimes K$ из упр. 5.18, сопоставляющий множеству E свободный правый K-модуль с базисом E, является левым сопряжённым к забывающему функтору из категории правых K-модулей в категорию множеств. Что делают в этом случае естественные преобразования (5-14) ?

Упражнение 5.20. (Сопряжённость и (ко) представимость.) Докажите, что

а) для существования левого сопряжённого функтора F к данному функтору $\mathscr{C} \xleftarrow{G} \mathscr{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ ковариантный функтор

$$\mathscr{D} \xrightarrow{Y \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))} \mathscr{S}et \tag{5-15}$$

был копредставим, и буде это так, искомый левый сопряжённый функтор будет переводить X в копредставляющий объект функтора (5-15);

б) для существования правого сопряжённого функтора G к данному функтору $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{D}$ предпучок

$$\mathscr{C} \xrightarrow{X \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y)} \mathscr{S}et \tag{5-16}$$

был представим, и буде это так, искомый левый сопряжённый функтор будет переводить X в копредставляющий объект функтора (5-16).

5.6.1. Пример: индуцированные и коиндуцированные представления. Пусть задано расширение (возможно, не коммутативных) $\Bbbk$-алгебр с единицами $A \subset B$ над произвольным полем $\Bbbk$. Обозначим через $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ категории конечномерных левых A- и B-модулей (т. е. конечномерных представлений этих алгебр линейными операторами). Имеется естественный *функтор ограничения*

$$\operatorname{Res}_A^B : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}\,,$$

который тождественно действует на объектах и просто рассматривает всякий B-модуль W как модуль над подалгеброй $A \subset B$. Этот функтор имеет левый и правый сопряжённые функторы, которые называются, соответственно, *индуцированием* и *коиндуцированием* представлений с подалгебры A на алгебру B и строятся следующим образом. Для заданного A-модуля V обозначим через

$$\operatorname{Ind}_A^B(V) = B \underset{A}{\otimes} V = B \otimes V/(ba \otimes v - b \otimes av)$$

фактор тензорного произведения векторных пространств $B \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными соотношениями «A-эквивариантности» $ba \otimes v = b \otimes av$ (для всех $b \in B$, $a \in A$, $v \in V$). На этом пространстве имеется естественное действие алгебры B левым умножением:

$$b(b' \underset{A}{\otimes} v) = (bb') \underset{A}{\otimes} v$$

Упражнение 5.21. Постройте канонический (т. е. функториальный по $V \in \mathscr{A}$ и $W \in \mathscr{B}$) изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_B(B \underset{A}{\otimes} V, W) \simeq \mathrm{Hom}_A(V, W) \ .$$

Указание. Отображение слева направо сопоставляет B-линейной стрелке $B \underset{A}{\otimes} V \xrightarrow{\varphi} W$ стрелку

$$V \xrightarrow{v \mapsto \varphi(1 \otimes v)} W \, ;$$

обратное к нему отображение справа налево переводит A-линейную стрелку $V \xrightarrow{\psi} W$ в B-линейную стрелку $V \xrightarrow{b \otimes v \mapsto b\psi(v)} W$.

Двойственным образом, обозначим через

$$\mathrm{Coind}_A^B(V) = \mathrm{Hom}_A(B, V)$$

пространство всех A-линейных отображений из алгебры B, которая рассматривается как A-модуль с действием на нём алгебры A левыми умножениями, в A-модуль V. Заметим, что на этом пространстве имеется каноническая структура *левого* B-модуля, индуцированная *правым* умножением в алгебре B: действие $b \in B$ на стрелку $B \xrightarrow{\psi} V$ превращает её в стрелку

$$b\psi : B \xrightarrow{b' \mapsto \psi(b'b)} V \ .$$

Упражнение 5.22. Проверьте равенство $(b_1 b_2)\psi = b_1(b_2\psi)$ и постройте канонический (т. е. функториальный по $V \in \mathscr{A}$ и $W \in \mathscr{B}$) изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{Hom}_A(B, V)) \simeq \mathrm{Hom}_A(W, V) \ .$$

Указание. Отображение слева направо сопоставляет B-линейной стрелке $\varphi : W \xrightarrow{w \mapsto \varphi_w} \mathrm{Hom}_A(B, V)$ стрелку $W \xrightarrow{w \mapsto \varphi_w(1)} V$; обратное к нему отображение справа налево переводит A-линейную стрелку $V \xrightarrow{\psi} W$ в B-линейное отображение $w \mapsto \varphi_w : B \xrightarrow{b \mapsto \psi(bw)} V$.