§4. Теоремы о размерностях алгебраических многообразий.

4.1. Ещё раз о конечных морфизмах. Регулярный морфизм алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X, и ограничение $W \xrightarrow{\varphi_W} U$ является конечным морфизмом (аффинных многообразий). Из n° 2.5.1 следует, что каждый конечный морфизм замкнут и ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ также конечный морфизм. Более того, если X неприводимо, то собственное замкнутое подмножество $Z \subset X$ переходит в *собственное* замкнутое подмножество Y.

4.1.1. Пример: проекция любого проективного многообразия $X \subsetneq \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим аффинную карту $U \subset H$ и зафиксируем на $\mathbb{P}_n$ однородные координаты $(t_0 : t_1 : \ \ldots : t_n)$, в которых

$$\begin{aligned} p &= (1 : 0 : \ \ldots : 0) \\ H &= \{(0 : q_1 : \ \ldots : q_n)\} \\ U &= \{u = (0 : u_1 : \ \ldots : u_{n-1} : 1)\} \end{aligned}$$

(как в n° 3.10.4). Поскольку $p \notin X$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$ лежит внутри проколотого конуса над U (с выколотой вершиной p), который изоморфен (как алгебраическое многообразие) аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$. Изоморфизм задаётся ограничением на конус морфизма раздутия $\mathscr{B}_p \xrightarrow{\sigma_p} \mathbb{P}_n$ и в терминах координат представляет собою подстановку $t = \vartheta p + u$, где $\vartheta \in \mathbb{A}^1$, $u \in U$. Если X задаётся системой однородных уравнений $f_\nu(t) = 0$, то в аффинных координатах (u, ϑ) на $U \times \mathbb{A}^1$ прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U)$ будет описываться уравнениями

$$f_\nu(\vartheta p + u) = \alpha_0^{(\nu)}(u)\,\vartheta^m + \alpha_1^{(\nu)}(u)\,\vartheta^{m-1} + \cdots + \alpha_m^{(\nu)}(u) = 0 \,. \tag{4-1}$$

Тем самым, Y является аффинным алгебраическим многообразием. Чтобы убедиться в том, что алгебра $\Bbbk[Y] = \Bbbk[u][\vartheta]/(f_\nu(\vartheta p + u))$ конечно порождена как $\Bbbk[u]$-модуль, достаточно найти в идеале, порождённом уравнениями (4-1), хотя бы одно уравнение со старшим коэффициентом $\alpha_0(u) \equiv 1$ (ибо тогда после факторизации по одному только этому уравнению мы уже получим конечно порождённый $\Bbbk[u]$-модуль). Существование такого уравнения равносильно тому, что идеал, порождённый в $\Bbbk[u]$ старшими коэффициентами $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ всех уравнений (4-1), содержит единицу, что по теореме Гильберта равносильно отсутствию у многочленов $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ общих нулей в U. Но если бы такой общий нуль u_0 существовал, то однородные версии уравнений[1] (4-1):

$$f_\nu(\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u) = \alpha_0^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^m + \alpha_1^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^{m-1}\vartheta_1 + \cdots + \alpha_m^{(\nu)}(u_0)\vartheta_1^m = 0$$

имели бы общий корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$ над точкой $u_0 \in U$. Но эти однородные уравнения описывают $X \cap (pu_0)$ в терминах однородных координат $(\vartheta_0 : \vartheta_1)$ на прямой $(pu_0) = \{\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u_0\}$, и корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$ отвечает самой точке p, которая не лежит в X.

Упражнение 4.1. Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна и докажите, что каждое проективное многообразие допускает конечный сюрьективный морфизм на проективное пространство.

4.1.2. СЛЕДСТВИЕ. *Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюрьективный морфизм φ на аффинное пространство.*

Доказательство. Пусть $X \subsetneq \mathbb{A}^n$, где $\mathbb{A}^n$ вложено в $\mathbb{P}_n$ как стандартная карта U_0. Положим $H_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ и обозначим через $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n$ проективное замыкание аффинного многообразия X. Проекция $\overline{X}$ из любой точки $p \in H_\infty \smallsetminus \overline{X}$ на любую гиперплоскость $L \not\ni p$, видимую в аффинной карте U как $\mathbb{A}^{n-1} = L \smallsetminus H_\infty$, индуцирует конечный морфизм из $X = \overline{X} \smallsetminus H_\infty$ в это $\mathbb{A}^{n-1}$ (видимый в аффинной карте U

[1] они получаются подстановкой $t = \vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u$ в уравнения, описывающие X в $\mathbb{P}_n$, и связаны с уравнениями (4-1) подстановкой $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (\vartheta : 1)$

как параллельная проекция в направлении вектора p). Если он окажется не сюрьективным, повторим процедуру. $\square$

4.2. Размерность. Максимальное $n \in \mathbb{N}$, для которого существует цепочка неприводимых замкнутых подмножеств

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subset X \,, \tag{4-2}$$

называется *размерностью* алгебраического многообразия X в данной точке $x \in X$ и обозначается через $\dim_x X$. Разумеется, когда X неприводимо, во всякой такой максимальной цепочке мы будем иметь $X_n = X$. Если же X приводимо, то $\dim_x X$ равна максимуму из размерностей всех проходящих через x неприводимых компонент.

Упражнение 4.2. Покажите, что $\dim_p X = \dim_p U$ для каждой аффинной карты $U \ni p$.

Указание. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U$, $X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_1 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упражнение 4.3. Докажите, что $\dim_x X \geqslant \dim_{\varphi(x)} Y$ для любого сюрьективного морфизма неприводимых многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ в любой точке $x \in X$.

Указание. Для любой цепочки (4-2) в Y для каждого i найдётся неприводимая компонента $\varphi^{-1}(X_i)$, сюрьективно отображающаяся на X_i. Это дает цепочку (4-2) в X.

4.2.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — конечный морфизм неприводимых многообразий, и $x \in X$. Тогда $\dim_x X \leqslant \dim_{\varphi(x)} Y$ и равенство равносильно тому, что $\varphi(X) = Y$.*

Доказательство. Согласно упр. 4.2 достаточно считать X и Y аффинными. Утверждение из n° 2.5.1 показывает, что каждая цепочка (4-2) в X порождает цепочку $\cdots \subsetneq \varphi(X_i) \subsetneq \varphi(X_{i+1}) \subsetneq \cdots$ строго вложенных замкнутых неприводимых подмногобразий в Y, что даёт нужное нам неравенство. В случае $\varphi(X) = Y$ упр. 4.3 даёт противоположное неравенство. $\square$

4.2.2. СЛЕДСТВИЕ. $\dim_p \mathbb{A}^n = n$ *в любой точке* $p \in \mathbb{A}^n$.

Доказательство. Ясно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$ и $\dim_p \mathbb{A}^n \geqslant n$, поскольку имеется цепочка (4-2), образованная аффинными подпространствами, проходящими через p. Неравенство $\dim_p \mathbb{A}^n \leqslant n$ получается по индукции: последний отличный от $\mathbb{A}_n$ элемент цепочки (4-2) допускает сюрьективный конечный морфизм на собственное аффинное подпространство в $\mathbb{A}_n$, и поэтому его размерность (а значит, и его номер в цепочке) строго меньше n. $\square$

4.2.3. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть X — неприводимое аффинное многообразие и $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^m$ — сюрьективный конечный морфизм. Тогда $\dim_p X = m$ в каждой точке $p \in X$. В частности, m не зависит от выбора φ, а $\dim_p X$ одна и та же для всех $p \in X$.* $\square$

4.3. Размерность как степень трансцендентности. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие. Конечный эпиморфизм $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^m$ из следствия n° 4.1.2 соответствует целому расширению $\Bbbk[X] \supset \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m] = \Bbbk[\mathbb{A}^m]$. Таким образом, аффинные координатные функции $u_1, u_2, \dots, u_n$ образуют базис трансцендентности $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$ и $\dim X$ равна степени трансцендентности $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$.

Упражнение 4.4. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y.

Указание. Докажите, что произведение конечных сюрьекций $X \longrightarrow \mathbb{A}^n$, $Y \longrightarrow \mathbb{A}^m$ является конечной сюрьекцией $X \times Y \longrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упражнение 4.5. Пусть $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ неприводим. Покажите, что $\dim V(f) = (n-1)$ в $\mathbb{A}^n$.

Указание. Постройте конечную сюрьективную проекцию $V(f) \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ (ср. с упр. 4.1 и следствием из n° 4.1.2).

4.4. Регулярные системы уравнений. Если многообразие X приводимо, например, является объединением двух неприводимых компонент $X = X_1 \cup X_2$ одинаковой размерности, то непостоянная функция f, зануляющаяся сразу на целой компоненте, скажем, на X_1, задаёт в X гиперповерхность той же размерности, что и само X.

Обращение функции f в нуль на компоенте многообразия X равносильно тому, что f является делителем нуля в $\Bbbk[X]$. Последовательность необратимых функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$ называется *регулярной*, если ни при каком i функция

$$f_i \,(\mathrm{mod}\,(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})) \in \Bbbk[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) = \Bbbk[V(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})]$$

не делит нуль в этой фактор алгебре.

В регулярной последовательности уравнений никакое из уравнений f_i не зануляется тождественно ни на одной из неприводимых компонент многообразия

$$V(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) \subset X\ .$$

В этом случае добавление каждого нового уравнения уменьшает размерность такого подмногообразия в точности на единицу, как показывает

4.4.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если X неприводимо, то $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$ для любой непостоянной регулярной функции $f \in \mathscr{O}_X(X)$ и любой точки $p \in V(f)$.*

Доказательство. Мы можем предполагать X аффинным. Фиксируем некоторую конечную сюрьекцию $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^m$ и рассмотрим (как при доказательстве утверждения из n° 2.6.1) отображение

$$\varphi = \pi \times f \,:\, X \xrightarrow{x \mapsto (\pi(x), f(x))} \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1\ .$$

Оно конечно и сюрьективно отображает X на аффинную гиперповерхность $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$, заданную минимальным полиномом $\mu_f(u,t) = t^n + \alpha_1(u)\,t^{n-1} + \dots + \alpha_n(u) \in \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m][t]$ функции f над полем $\Bbbk(\mathbb{A}^m)$. Тогда $V(f) = \varphi^{-1}\,(H \cap V(\mu_f))$, где $H \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — гиперплоскость, заданная уравнением $t = 0$. Но $H \cap V(\mu_f)$ является в аффинном пространстве $H = \mathbb{A}^m$ гиперповерхностью, заданной уравнением $\alpha_n(u) = 0$, и согласно упр. 4.5, имеет размерность $m-1$. Остаётся применить утверждение из n° 4.2.1 к конечной сюрьекции $V(f) \xrightarrow{\varphi|_{V(f)}} V(a_n)$. □

4.4.2. СЛЕДСТВИЕ. *На произвольном многообразии X для любого $f \in \Bbbk[X]$ в каждой точке $p \in V(f)$ выполнено неравенство $\dim_p V(f) \geqslant \dim_p(X) - 1$.* □

4.4.3. СЛЕДСТВИЕ. *Для любых замкнутых аффинных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$ в каждой точке $x \in X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство*

$$\dim_x(X_1 \cap X_2) \geqslant \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n\ .$$

Доказательство. Если $X_1 \xhookrightarrow{\varphi_1} \mathbb{A}^n$, $X_2 \xhookrightarrow{\varphi_2} \mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения, то $X_1 \cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ при отображении $X_1 \times X_2 \xhookrightarrow{\varphi_1 \times \varphi_2} \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Внутри $X_1 \times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$, являющимися поднятиями линейных уравнений $x_i = y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Осталось применить следствие из n° 4.4.2. □

4.4.4. СЛЕДСТВИЕ. *Если замкнутые проективные многообразия $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n$ удовлетворяют неравенству $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geqslant n$, то $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ аффинные конусы X_1', X_2'' образованные одномерными векторными подпространствами в V, составляющими точки проективных многообразий X_1 и X_2 (эти конусы имеют те же самые уравнения, что и X_1, X_2, но только теперь эти уравнения рассматриваются как аффинные). По предыдущему утверждению

$$\dim_O(X_1' \cap X_2'') \geqslant \dim_O(X_1) + 1 + \dim_O(X_2) + 1 - n - 1 \geqslant 1\ .$$

Таким образом, $X_1' \cap X_2''$ не исчерпывается точкой O. □

4.5. Теоремы о размерностях слоёв. В алгебраической геометрии, в отличие от дифференциальной геометрии и топологии, размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

4.5.1. ТЕОРЕМА. *Для любого доминантного морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$$

и существует непустое открытое подмножество $U \subset Y$, над которым

$$\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$$

в каждой точке $x \in \varphi^{-1}(y)$ для всех $y \in U$.

Доказательство. Беря композицию нашего отображения с конечным сюрьективным морфизмом какой-нибудь аффинной окрестности точки $\varphi(x)$ на пространство $\mathbb{A}^m$, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю $Y = \mathbb{A}^m = \mathrm{Spec_m}\, \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m]$, $\varphi(x) = 0$. Но тогда $\varphi^{-1}(0)$ является пересечением m гиперповерхностей $V(\varphi^*(u_i)) \subset X$, и требуемое неравенство получается индуктивным применением n° 4.4.2.

В доказательстве второго утверждения мы, не ограничивая общности, можем считать оба многообразия аффинными: $X = \mathrm{Spec_m}\, A$, $Y = \mathrm{Spec_m}\, B$, а морфизм φ — ограничением проекции $Y \times \mathbb{A}^m \xrightarrow{\pi} Y$ на замкнутое подмногообразие $X \subset Y \times \mathbb{A}^m$ (см. разложение (2-8) из упр. 2.7). Мы собираемся применить к слоям этой проекции следствие n° 4.1.2.

Для этого рассмотрим проективное замыкание $\overline{X} \subset Y \times \mathbb{P}_m$, выберем гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_m$ и точку $p \in \mathbb{P}_m \smallsetminus H$ так, чтобы сечение $Y \times \{p\} \subset Y \times \mathbb{P}_m$ не содержалось в $\overline{X}$. Тогда послойная проекция из p на H будет удовлетворять условиям n° 4.1.1 во всех слоях, располагающихся над открытым подмножеством $U \subset Y$, дополнительным к $\pi\Big(\big(Y \times \{p\}\big) \cap \overline{X}\Big)$, где $Y \times \mathbb{P}_m \xrightarrow{\pi} Y$ — проекция вдоль $\mathbb{P}_m$. Таким образом, заменяя Y его открытым подмножеством U (которое можно выбрать главным, т. е. тоже аффинным), мы можем повторить рассуждения из n° 4.1.2 послойно (одновременно во всех слоях проекции π) и построить конечную сюрьекцию $X \xrightarrow{\psi} Y \times \mathbb{A}^n$, ограничение которой на каждый слой $\varphi^{-1}(y)$ конечно и эпиморфно отображает $\varphi^{-1}(y)$ на $\{y\} \times \mathbb{A}^n$. Конечность ψ влечёт равенство $n = \dim X - \dim Y$, а конечность его ограничений на слои — равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$. □

4.5.2. СЛЕДСТВИЕ (ТЕОРЕМА ШЕВАЛЛЕ О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ). *Для любого морфизма алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$, множества $X_k \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant k \,\}$ замкнуты в X при всех $k \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Мы можем предполагать X и Y неприводимыми. Если $\dim Y = 0$ (т. е. Y — точка) теорема тривиально верна для всех k. Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна при всех k. Покажем, что она верна для Y. Если $k \leqslant \dim(X) - \dim(Y)$, то $X_k = X$ по предыдущей теореме. Для $k > \dim(X) - \dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y \smallsetminus U$, где U взято из n° 4.5.1, а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $X_k \subset X'$, $\dim Y' < \dim Y$, и применимо индуктивное предположение. □

Упражнение 4.6. Покажите, что изолированные точки слоёв морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ образуют открытое подмножество в X.

4.5.3. СЛЕДСТВИЕ. *Для любого замкнутого морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ множество*

$$Y_k \overset{\text{def}}{=} \{\, y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant k \,\}$$

замкнуто в Y при всех $k \in \mathbb{Z}$. □

4.5.4. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — замкнутый морфизм с неприводимыми слоями одной и той же размерности. Если Y неприводимо, то X также неприводимо.*

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cup X_2$ приводимо. Каждый слой φ, будучи неприводимым, должен целиком содержаться либо в X_1, либо в X_2, т. е. $Y = Y_1 \cup Y_2$, где

$$Y_1 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_1\}\,, \quad Y_2 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_2\}\,.$$

Поскольку и X_1, и X_2 отличны от X, оба подмножества $Y_1, Y_2 \subset Y$ являются собственными. По предыдущему следствию, оба они замкнуты: Y_i можно описать как множество точек в Y, над которыми слои ограничения $X_i \longrightarrow Y$ имеют максимально возможную размерность. Значит, Y тоже приводимо. □

4.6. Рабочий пример: прямые на поверхностях. В качестве иллюстрации разобранных нами геометрических конструкций исследуем множество прямых, лежащих на двумерной поверхности S заданной степени d в трёхмерном пространстве $\mathbb{P}_3$.

4.6.1. Прямые на невырожденной квадрике. Невырожденная квадратичная форма от четырёх переменных линейной заменой координат приводится к виду

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0\,. \tag{4-3}$$

Эта детерминантная квадрика называется *квадрикой Сегре* и имеет простую геометрическую интерпретацию: если воспринимать пространство $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W)$ как проективизацию пространства линейных операторов

$$W = \mathrm{Hom}(U_-, U_+) = U_-^* \otimes U_+$$

между двумя двумерными пространствами $U_\pm$, то множество операторов ранга 1 и будет составлять в нём квадрику (4-3). С другой стороны, всякий оператор F ранга 1 является разложимым тензором, т. е. имеет вид

$$F = \xi\otimes u\,:\; v\longmapsto \xi(v)\cdot u\,,$$

где $\xi\in U_-^*$ и $u\in U_+$ однозначно с точностью до пропорциональности восстанавливаются по F как линейная форма, задающая ядро $\ker F\subset U_-$, и вектор, порождающий $\mathrm{im}\,F\subset U_+$. Таким образом, *вложение Сегре*

$$s:\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U_-^*)\times\mathbb{P}(U_+) \xhookrightarrow{(\xi,u)\mapsto\xi\otimes u} \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U_-,U_+)) = \mathbb{P}_3 \tag{4-4}$$

задаёт биекцию между $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$ и квадрикой Сегре.

Упражнение 4.7. Удостоверьтесь, что эта биекция является изоморфизмом алгебраических многообразий.

На языке координат оператор $\xi\otimes v$, отвечающий форме $\xi = (\xi_0:\xi_1)\in U_-^*$ и вектору $v = (t_0 : t_1)\in U_+$, имеет матрицу

$$\begin{pmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01}\\ \alpha_{10} & \alpha_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_0\\ t_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_0 & \xi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_0t_0 & \xi_1t_0\\ \xi_0t_1 & \xi_1t_1\end{pmatrix}\,. \tag{4-5}$$

В частности, «координатные прямые» $\mathbb{P}_1\times v$ и $\xi\times\mathbb{P}_1$, заметающие $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$ переводятся отображением (4-4) в матрицы ранга 1 с предписанными отношениями

$$([\text{строка }1]:[\text{строка }2]) = (t_0:t_1)\quad\text{или}\quad([\text{столбец }1]:[\text{столбец }2]) = (\xi_0:\xi_1)$$

Такие матрицы составляют 2-мерные векторные подпространства в пространстве матриц, а их проективизации задают на квадрике Сегре два семейства прямых, расположенных точно так же, как «координатная сетка» $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$: через каждую точку квадрики будет проходить ровно по одной прямой из каждого семейства, все прямые, принадлежащие к одному семейству, будут попарно скрещиваться, а любые две прямые из разных семейств будут пересекаться.

Упражнение 4.8. Убедитесь, что никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Указание. прямая, лежащая на квадрике Q и проходящая через точку $p\in Q$ содержится в конике, высекаемой Q в касательной плоскости T_pQ_S и уже содержащей пару прямых из наших семейств.

Упражнение 4.9. Опишите множества прямых на особых квадриках с матрицами Грама ранга 3, 2 и 1.

Упражнение 4.10. Покажите, что через любые 3 попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика, причём она заметается всеми прямыми, пересекающими каждую из трёх заданных.

Упражнение 4.11. Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах а) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ б) $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ в*) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ г*) $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ (найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых).

Указание. Примените «метод геометрических мест»: рассмотрите все прямые, пересекающие некоторые три из заданных четырёх, и выясните, какие из них пересекают оставшуюся четвёртую прямую.

4.6.2. Многообразие прямых в $\mathbb{P}_3$. Множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ или, что то же самое, множество двумерных векторных подпространств в 4-мерном векторном пространстве V обозначается $\mathrm{Gr}(2,4)$ и является специальным примером *многообразия Грассмана*

$$\mathrm{Gr}(k,n) = \mathrm{Gr}(k,V) = \{U \subset V \mid \dim U = k\}\,, \qquad \dim V = n\,,$$

точками которого являются, по определению, всевозможные k-мерные векторные подпространства в данном n-мерном векторном пространстве V. Проективное пространство $\mathbb{P}(V) = \mathrm{Gr}(1,V)$ и двойственное проективное пространство $\mathbb{P}(V^*) = \mathrm{Gr}(\dim V - 1, V)$ также являются специальными случаями грассманианов, и $\mathrm{Gr}(2,4)$ — это простейший грассманиан, не являющийся проективным пространством.

Множество k-мерных подпространств n-мерного векторного пространства V вкладывается в проективизацию $\varkappa$-той внешней степени пространства V при помощи *отображения Плюккера*

$$\mathrm{Gr}(k,V) \xhookrightarrow{\;p\;} \mathbb{P}(\Lambda^k V) \,:\, (U \subset V) \longmapsto (\Lambda^k U \subset \Lambda^k V)\,, \tag{4-6}$$

которое сопоставляет k-мерному подпространству $U \subset V$ его старшую внешнюю степень $\Lambda^k U$, являющуюся одномерным векторным подпространством в $\Lambda^k V$. Для $\mathrm{Gr}(2,4)$ это отображение переводит прямую $(a,b) \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ в разложимый бивектор $a \wedge b \in \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

Упражнение 4.12. Убедитесь, что различным прямым отвечают непропорциональные бивекторы.

Поскольку $a \wedge b \wedge a \wedge b = 0$ образ плюккерова отображения попадает на *квадрику Плюккера*

$$P = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\} \subset \mathbb{P}_5\,, \tag{4-7}$$

состоящую из бивекторами с квадратом нуль. Из курса линейной алгебры известно, что для любого бивектора $\omega \in \Lambda^2 V$ в пространстве V можно подобрать базис e_0, e_1, e_2, e_3, в котором он запишется либо как $\omega = e_0 \wedge e_1$, либо как $\omega = e_0 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_3$. В первом случае бивектор разложим и лежит на квадрике Плюккера. Во втором случае $\omega \wedge \omega = 2\,e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \neq 0$, и значит, такой бивектор не может быть разложимым. Следовательно квадрика Плюккера (4-7) состоит *только* из разложимых бивекторов.

Если зафиксировать в V базис e_0, e_1, e_2, e_3 и ассоциированный с ним базис

$$e_{ij} \overset{\text{def}}{=} e_i \wedge e_j\,, \quad 0 \leqslant i < j \leqslant 3$$

шестимерного пространства $\Lambda^2 V$, и организовать координаты векторов $a = \sum a_i e_i$ и $b = \sum b_i e_i$ в строки 2×4-матрицы

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\,, \tag{4-8}$$

то вложение Плюккера сопоставит такой матрице бивектор

$$a \wedge b = \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant 3} \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} \cdot e_{ij}\,,$$

координатами которого будут шесть старших миноров матрицы (4-8) (они называются *плюккеровыми координатами* прямой $(a,b) \subset \mathbb{P}_3$ в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$). Условие, что бивектор $\omega = \sum x_{ij} e_{ij}$ лежит на квадрике (4-7), запишется квадратным уравнением

$$x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0 \tag{4-9}$$

Упражнение 4.13. Существует ли комплексная 2×4-матрица, шесть 2×2-миноров которой образуют (неупорядоченное) множество: а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (если да, предъявите такую матрицу явно).

Итак, множество всех прямых в $\mathbb{P}_3$ представляет собою гладкую 4-мерную квадрику

$$P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \ .$$

4.6.3. Многообразие инцидентности. Обозначим через $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$ пространство поверхностей степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ и рассмотрим множество инцидентности между прямыми и поверхностями:

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{ (S, \ell) \in \mathbb{P}_N \times P \mid \ell \subset S \} \subset \mathbb{P}_N \times P \ .$$

4.6.4. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Γ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_N \times P$.*

Доказательство. Линейная оболочка векторов $a, b \in V$ является образом отображения свёртки $V^* \longrightarrow V$, переводящего $\xi \in V^*$ в $\xi \llcorner (a \otimes b - b \otimes a)$. Поэтому прямая (ab) лежит на поверхности $V(F)$, тогда и только тогда, когда $F(\xi \llcorner (a \otimes b - b \otimes a)) = 0$ тождественно по $\xi \in V^*$. Если, как и выше, $a = \sum a_i e_i$, $b = \sum b_i e_i$, а $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, то $\xi \llcorner (a \otimes b - b \otimes a) = \sum\limits_{\nu} \big(\sum\limits_{\mu \neq \nu} (u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu) \xi_\mu \big) \cdot e_\nu$. Обозначая через $p_{\mu\nu} = (u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu)$ плюккеровы координаты прямой (ab), подставляя $x_\nu = \sum\limits_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu} \xi_\mu$ в $F(x)$, раскладывая результат по степеням ξ и приравнивая все коэффициенты этого разложения к нулю, мы получаем явную систему полиномиальных уравнений на коэффициенты F и плюккеровы координаты p_{ij}, описывающую Γ как замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$. □

4.6.5. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Проекция $\Gamma \xrightarrow{\pi_2} P$ сюрьективна, а все её слои являются проективными пространствами размерности $\frac{1}{6} d(d+1)(d+5) - 1$; тем самым, Γ является неприводимым проективным многообразием размерности $\frac{1}{6} d(d+1)(d+5) + 3$.*

Доказательство. Пусть прямая $\ell \subset \mathbb{P}(V)$ задана уравнениями $x_0 = x_1 = 0$. Тогда $S \supset \ell$, если и только если S задаётся уравнением вида $x_2 \cdot F_2(x) + x_3 \cdot F_3(x) = 0$, в котором $F_2, F_3 \in S^{d-1} V^*$. Такие уравнения образуют векторное пространство W, являющееся образом линейного оператора

$$S^{d-1} V^* \oplus S^{d-1} V^* \xrightarrow{(f,g) \mapsto x_2 f + x_3 g} S^d V^* \ ,$$

ядро которого состоит из всех (f, g) таких, что $x_2 f = -x_3 g$, т.е. $f = x_3 h$, $g = -x_2 h$ для некоторого $h \in S^{d-2} V^*$. Таким образом, ядро изоморфно $S^{d-2} V^*$, и

$$\dim W = 2 \dim(S^{d-1} V^*) - \dim(S^{d-1} V^*) = \frac{1}{6} \Big(2\, d(d+1)(d+2) - (d-1) d(d+1) \Big) = \frac{1}{6} d(d+1)(d+5) \ .$$

Неприводимость Γ вытекает из n° 4.5.4, а $\dim \Gamma$ вычисляется по n° 4.5.1. □

4.6.6. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Общая[2] поверхность $S_d \subset \mathbb{P}_3$ степени $d \geqslant 4$ не содержит прямых.*

Доказательство. Множество всех поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую, совпадает с образом проекции $\Gamma \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}_N$. По следствию n° 3.11.3 этот образ является замкнутым неприводимым подмногообразием в $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$. По теореме n° 4.5.1, его размерность пучается вычитанием из $\dim \Gamma$ минимума размерностей непустых слоев проекции π_1. В частности, когда $\dim \Gamma < N$, образ заведомо является собственным подмногообразием. В развёрнутом виде последнее неравенство выглядит как

$$\frac{1}{6} d(d+1)(d+5) + 3 < \frac{1}{6} (d+1)(d+2)(d+3) \ , \tag{4-10}$$

и выполняется для всех $d \geqslant 4$. □

4.6.7. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каждая кубическая поверхность $S_3 \subset \mathbb{P}_3$ содержит хотя бы одну прямую, причём для общей кубики множество лежащих на ней прямых конечно.*

Доказательство. При $d = 3$ неравенство (4-10) превращается в равенство: в этом случае $\dim \Gamma = N = 19$. Чтобы доказать сюрьективность проекции π_1, достаточно указать хоть один её непустой нульмерный слой — тогда неприводимое замкнутое подмногообразие $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_{19}$ будет 19-мерным, а стало быть, совпадёт со всем $\mathbb{P}_{19}$.

[2] т.е. любая из некоторого плотного по Зарисскому открытого подмножества в пространстве всех гиперповерхностей

Выясним, например, какие прямые лежат на проективном замыкании кубики C с аффинным уравнением $xyz = 1$. В рассматриваемой аффинной части прямых вообще нет, поскольку прямая с параметрическим уравнением $x = x_0 + \alpha t\,,\; y = y_0 + \beta t\,,\; z = z_0 + \gamma t$ лежит на C , если и только если

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha\beta z_0 + \beta\gamma x_0 + \gamma\alpha y_0 = 0 \\ \alpha y_0 z_0 + \beta x_0 z_0 + \gamma x_0 y_0 = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases}$$

что невозможно[3]. На бесконечности C задаётся уравнением[4] $x_1 x_2 x_3 = 0$, т. е. является объединением трёх прямых $x_i = x_0 = 0$ $(i = 1,\,2,\,3)$. $\square$

Упражнение 4.14. Найдите все прямые на кубике Ферма C_F, заданной однородным уравнением $\sum x_i^3 = 0$.
Указание. C_F инвариантна относительно перестановок координат; с точностью до такой перестановки, пара линейных уравнений, задающих прямую $\ell \subset C_F$, приводится методом Гаусса к $x_0 = \alpha x_2 + \beta x_3$, $x_1 = \gamma x_2 + \delta x_3$; подставьте эти значения в уравнение кубики, покажите, что $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, а затем найдите их…

4.7. Прямые на гладкой кубике. В оставшейся части этого параграфа мы покажем, что каждая гладкая кубическая поверхность содержит ровно 27 прямых, и точно опишем конфигурацию их попарных пересечений. С этого момента мы фиксируем гладкую кубическую поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$, заданную уравнением $F(x) = 0$.

4.7.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Всякое приводимое плоское сечение S распадается либо в объединение прямой и гладкой коники, либо в объединение трёх различных прямых.*

Доказательство. Покажем, что плоское сечение $\pi \cap S$ не может содержать двойную прямую. Если такая двойная прямая $\ell \subset \pi \cap S$ имеется, возьмем координаты, в которых плоскость π задаётся уравнением $x_2 = 0$, а ℓ — уравнениями $x_2 = x_3 = 0$. Тогда $F(x) = x_2 Q(x) + x_3^2 L(x) = 0$ с линейным L и квадратичным Q. Прямая ℓ пересекается с квадрикой $Q(x) = 0$ в некоторой точке a. Тогда $x_2(a) = x_3(a) = Q(a) = 0$ и все частные производные $\partial F/\partial x_i$ равны нулю в точке a, т. е. S особа в a. $\square$

4.7.2. СЛЕДСТВИЕ. *В одной точке поверхности S может пересекаться не более трёх лежащих на S прямых, причём все они должны находиться в одной плоскости.*

Доказательство. Все проходящие через $p \in S$ прямые, лежащие на S, принадлежат $S \cap T_p S$. $\square$

4.7.3. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для данной прямой $\ell \subset S$ существуют ровно 5 различных плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$, содержащих ℓ и пересекающих S по тройке прямых. Более того, если $\pi_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell_i'$, то $\ell_i \cap \ell_j = \ell_i \cap \ell_j' = \ell_i' \cap \ell_j' = \varnothing\ \forall\ i \neq j$ (в частности, на S есть скрещивающиеся прямые) и любая лежащая на S прямая, скрещивающаяся с ℓ, при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ_i'.*

Доказательство. Фиксируем базис $\{e_0,\, e_1,\, e_2,\, e_3\}$ в V так, что прямая $\ell = (e_0 e_1)$ (заданная уравнениями $x_2 = x_3 = 0$) лежит на S. Тогда уравнение $F(x) = 0$, задающее S, имеет в этом базисе вид

$$\begin{aligned} L_{00}(x_2, x_3) \cdot x_0^2 + 2\,L_{01}(x_2, x_3) \cdot x_0 x_1 + L_{11}(x_2, x_3) \cdot x_1^2 + \\ + 2\,Q_0(x_2, x_3) \cdot x_0 + 2\,Q_1(x_2, x_3) \cdot x_1 + R(x_2, x_3) = 0\,, \end{aligned} \tag{4-11}$$

где $L_{ij}, Q_\nu, R \in k[x_2, x_3]$ являются однородными многочленами степени $1, 2, 3$ соответственно. Запараметризуем пучок плоскостей, проходящих через ℓ, точками $e_\vartheta = \vartheta_2 e_2 + \vartheta_3 e_3 \in (e_2 e_3)$ и рассмотрим в плоскости $\pi_\vartheta = (e_0 e_1 e_\vartheta)$ однородные координаты $(t_0 : t_1 : t_2)$ относительно этих трёх точек. Уравнение плоской коники $(\pi_\vartheta \cap S) \setminus \ell$ получается подстановкой $x = (t_0 : t_1 : \vartheta_2 t_2 : \vartheta_3 t_2)$ в уравнение (4-11) с последующим сокращением на общий множитель t_2. Матрица Грама этой коники в координатах $(t_0 : t_1 : t_2)$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} L_{00}(\vartheta) & L_{01}(\vartheta) & Q_0(\vartheta) \\ L_{01}(\vartheta) & L_{11}(\vartheta) & Q_1(\vartheta) \\ Q_0(\vartheta) & Q_1(\vartheta) & R(\vartheta) \end{pmatrix}$$

[3]скажем, $\alpha = 0 \Rightarrow (\beta = 0$ или $\gamma = 0) \Rightarrow \beta = \gamma = 0$

[4]мы подставили $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$, $z = x_3/x_0$, домножили на x_0^3 и положили $x_0 = 0$

а её определитель

$$D(\vartheta_2,\vartheta_3) = L_{00}(\vartheta)L_{11}(\vartheta)R(\vartheta) + 2\,L_{01}(\vartheta)Q_0(\vartheta)Q_1(\vartheta) - \\ - L_{11}(\vartheta)Q_0^2(\vartheta) - L_{00}(\vartheta)Q_1^2(\vartheta) - L_{01}(\vartheta)^2R(\vartheta) \in k[\vartheta_2,\vartheta_3] \quad (4\text{-}12)$$

является однородным многочленом от $\vartheta = (\vartheta_2 : \vartheta_3)$ степени 5, и стало быть, обращается в нуль в пяти точках, учтённых с кратностями. Мы должны показать, что все эти кратности равны единице.

Каждый нуль детерминанта (4-12) соответствует вырождению коники в пару прямых, точка пересечения которых лежит либо на ℓ, либо вне ℓ.

В первом случае мы выберем базис так, чтобы эти две прямые были $\ell' = (e_0e_2)$ и $\ell'' = \big(e_0\,(e_1+e_2)\big)$ с уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = (x_1 - x_2) = 0$. Такое вырождение отвечает корню $\vartheta = (1:0)$ уравнения $D(\vartheta_2,\vartheta_3) = 0$, и кратность этого корня равна наибольшей степени ϑ_3, на которую делится $D(\vartheta_2,\vartheta_3)$. Поскольку $\ell,\ell',\ell'' \subset S$, уравнение (4-11) принимает вид

$$x_1x_2(x_1-x_2) + x_3\cdot q(x) = 0$$

с квадратичным $q(x)$, и единственными элементами G, не делящимися на ϑ_3, могут быть лишь $L_{11} \equiv x_2 \pmod{\vartheta_3}$ и $Q_1 \equiv -x_2^2/2 \pmod{\vartheta_3}$. Таким образом, $D(\vartheta_2,\vartheta_3) \equiv -L_{00}Q_1^2 \pmod{\vartheta_3^2}$, и этот член имеет порядок 1 по ϑ_3 , если и только если мономы $x_1x_2^2$ и $x_0^2x_2$ входят в (4-11) с ненулевыми коэффициентами. Но это действительно так, поскольку первый из них — это единственный моном, который вносит ненулевой вклад в $\partial F/\partial x_1$ в точке $e_2 \in S$, а второй — это единственный моном, который вносит ненулевой вклад в $\partial F/\partial x_2$ в точке $e_0 \in S$.

Во втором случае мы выберем базис так, чтобы $\ell' = (e_0e_2)$, $\ell'' = (e_1e_2)$ задавались уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = x_0 = 0$. Этому вырождению отвечает тот же самый корень $\vartheta = (1:0)$. Теперь (4-11) имеет вид $x_0x_1x_2 + x_3\cdot q(x) = 0$ и ненулевым по модулю ϑ_3 элементом G является только $L_{01} \equiv x_2/2 \pmod{\vartheta_3}$. Таким образом, $D(\vartheta_2,\vartheta_3) \equiv -L_{01}^2R \pmod{\vartheta_3^2}$ имеет порядок 1 по ϑ_3 , если и только если мономы $x_2^2x_3$ и $x_0x_1x_2$ действительно присутствуют в (4-11). Но если бы второй моном не входил в F, то F делится бы на x_3 и кубика была бы приводима (а значит, особа). А первый моном — это единственный моном, дающий ненулевой вклад в $\partial F/\partial x_3$, вычисленную в точке $e_2 \in S$.

Остающиеся утверждения о пересечениях прямых сразу следуют из следствия n° 4.7.2, утверждения n° 4.7.1 и замечания, что каждая прямая в $\mathbb{P}_3$ пересекает любую плоскость. □

4.7.4. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Ни через какие четыре попарно скрещивающиеся лежащие на S прямые нельзя провести квадрику, но для любой такой четвёрки всегда найдётся одна или две (но не более!) прямые, лежащие на S и пересекающие каждую прямую из четвёрки.*

Доказательство. Если четыре попарно скрещивающиеся прямые на S лежат на квадрике, то это — гладкая квадрика Сегре из n° 4.6, заметаемая двумя семействами прямолинейных образующих, и наша четвёрка прямых находится в одном из этих семейств. Но тогда все прямые другого семейства (а стало быть, и сама квадрика) лежат на S, ибо всякая прямая, проходящая через 4 различных точки S, лежит на S целиком. Тем самым, поверхность S приводима, и значит, особа. □

4.7.5. Конфигурация 27 прямых. Зафиксируем на S пару скрещивающихся прямых a, $b \subset S$ и построим 5 пар прямых ℓ_i, ℓ_i' причём в каждой паре обозначим через ℓ_i ту прямую, которая пересекает b, а через ℓ_i' — ту, которая скрещивается с b. Далее, обозначим через ℓ_i'' ещё 5 прямых, образующих вместе с прямыми ℓ_i пять пар прямых, ассоциированных согласно утверждению из n° 4.7.3 с $\ell = b$. Таким образом, каждая из прямых ℓ_i'' пересекается с b, но скрещивается с a и со всеми ℓ_j с $j \neq i$, и стало быть, пересекает все ℓ_j' с $j \neq i$.

Любая прямая $c \subset S$, отличная от 17 только что названных, скрещивается и с a, и с b, но при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ_i'. Из утверждения n° 4.7.4 вытекает, что все лежащие на S прямые, пересекающие $\geqslant 4$ прямых ℓ_i, исчерпываются парой прямых a, b. С другой стороны, если лежащая на S прямая c пересекает $\leqslant 2$ прямых ℓ_i, то с точностью до перестановки индексов, мы можем считать, что она пересекает три прямые ℓ_1', ℓ_2', ℓ_3' и ещё либо прямую ℓ_4', либо ℓ_5. В обоих случаях из утверждения n° 4.7.4 вытекает, что c — это одна из двух прямых a, ℓ_5''.

Итак, всякая лежащая на S прямая c, отличная от 17 прямых a, b, ℓ_i, ℓ_i', ℓ_i'', пересекает в точности 3 прямые ℓ_i. Покажем, что на S имеется ровно 10 таких прямых, взаимно однозначно соответствующих $\binom{5}{3} = 10$ тройкам $\{i < j < k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Действительно, для каждой тройки прямых ℓ_i имеется самое большее одна прямая c, отличная от a, и пересекающая заданные три прямые ℓ_i и оставшиеся прямые ℓ'_j (поскольку все 5 попарно скрещиваются). С другой стороны, по утверждению n° 4.7.3, для каждого i на S лежит ровно 10 прямых, пересекающих ℓ_i — это 4 прямых a, b, ℓ'_i и ℓ''_i, а оставшиеся 6 должны, как мы знаем, пересекать ещё ровно две из оставшихся четырех прямых ℓ_j. Но таких пар и имеется ровно $\binom{4}{2} = 6$, что и приводит к требуемому взаимно однозначному соответствию между прямыми c и тройками (i, j, k).

4.7.6. ТЕОРЕМА. *Каждая гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ содержит ровно 27 прямых, причём комбинаторика их попарных пересечений на всех S одинакова.* $\square$

Упражнение 4.15. Найдите порядок подгруппы $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}_{27}$, состоящей из всех перестановок 27 прямых, сохраняющих все их попарные пересечения. (ответ: $|\mathfrak{G}| = 51\,840 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$)

Упражнение 4.16*. Рассмотрим поле из 4 элементов: $\mathbb{F}_4 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{F}_2[\omega]/(\omega^2 + \omega + 1)$, где $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Подобно расширению $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, расширение $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4$ обладает автоморфизмом сопряжения: $z \longmapsto \overline{z} \overset{\text{def}}{=} z^2$, который оставляет на месте подполе $\mathbb{F}_2$ и переставляет друг с другом пару корней многочлена $\omega^2 + \omega + 1$. Покажите, что проективная унитарная группа[5] $\mathbb{P}\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4)$ канонически вкладывается в группу $\mathfrak{G}$ из упр. 4.15 как (нормальная) подгруппа индекса 2.

УКАЗАНИЕ. Группа $\mathbb{P}\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4)$ сохраняет кубику Ферма C_F из упр. 4.14, поскольку кубическая форма Ферма над $\mathbb{F}_4$ превращается в эрмитову форму $\sum x_i \overline{x}_i$.

[5] т. е. фактор группы матриц $M \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{F}_4)$, таких что $\overline{M}M^t = E$, по подгруппе скалярных матриц