§3. Алгебраические многообразия.

На протяжении этого параграфа мы продолжаем предполагать, что основное поле $\Bbbk$ является алгебраически замкнутым.

3.1. Локальные регулярные функции. Рассмотрим непустое открытое подмножество U аффинного алгебраического многообразия X. Функция $U \xrightarrow{f} \Bbbk$ называется *регулярной* в точке $u \in U$, если существуют $p, q \in \Bbbk[X]$, такие что $q(u) \neq 0$ и $f(x) = p(x)/q(x)$ $\forall\, x \in \mathscr{D}(q) \cap U$. Функции $U \xrightarrow{f} \Bbbk$, регулярные в каждой точке $u \in U$, образуют коммутативное кольцо, обозначаемое $\mathscr{O}_X(U)$ или $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$. Оно называется *кольцом локальных регулярных функций* на $U \subset X$.

3.1.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если X неприводимо, то $\mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h)) = \Bbbk[X][h^{-1}]$ $\forall h \in \Bbbk[X]$. Иными словами, каждая регулярная функция $f \in \mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h))$ записывается в виде $f(x) = r(x)/h^d(x)$ с подходящими $r \in \Bbbk[X]$, $d \in \mathbb{N}$ (в частности, для $h \equiv 1$, мы получим $\mathscr{O}_X(X) = \Bbbk[X]$).*

Доказательство. Если $f \in \mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h))$, то $\forall\, u \in \mathscr{D}(h)$ $\exists\, p_u, q_u \in \Bbbk[X]$ такие, что $q_u(u) \neq 0$ и $f(x) = p_u(x)/q_u(x)$ $\forall\, x \in \mathscr{D}(q_u) \cap \mathscr{D}(h)$. Поскольку $\bigcap\limits_{u \in U} V(q_u) \subset V(h)$, по теореме Гильберта о нулях найдутся $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathscr{D}(h)$, такие что $h^d = \sum q_{u_\nu} g_\nu$ для подходящих $g_1, g_2, \dots, g_m \in \Bbbk[X]$ и $d \in \mathbb{N}$. В то же время, для каждого ν мы имеем равенство $f(x)\, q_{u_\nu}(x) = p_{u_\nu}(x)$, которое выполняется для всех $x \in \mathscr{D}(h)$, включая те, для которых $q_{u_\nu}(x) = 0$. Действительно, пусть $q_{u_\nu}(w) = 0$ для некоторого $w \in \mathscr{D}(h)$. Тогда, переписывая $f = p_{u_\nu}/q_{u_\nu}$ как p_w/q_w с $q_w(w) \neq 0$, мы получим $p_{u_\nu}(x)\, q_w(x) = q_{u_\nu}(x)\, p_w(x)$ для всех $x \in \mathscr{D}(h \cdot q_{u_\nu} \cdot q_w)$, а значит (см. упр. 2.6), вообще для всех $x \in X$. В частности $p_{u_\nu}(w) = q_{u_\nu}(w)\, p_w(w)/q_w(w) = 0 = f(w)\, q_{u_\nu}(w)$. Таким образом, $f\, h^d = \sum f\, q_{u_\nu}\, g_\nu = \sum p_{u_\nu}\, g_\nu \in \Bbbk[X]$. $\square$

3.1.2. СЛЕДСТВИЕ. *Каждое главное открытое подмножество $\mathscr{D}(f) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][f^{-1}]$ неприводимого аффинного многообразия X является аффинным алгебраическим многообразием, и включение $\mathscr{D}(f) \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом, отвечающим вложению алгебр $\Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][f^{-1}]$.* $\square$

3.2. Структурный пучок. Соответствие[1] $\mathscr{O}_X : U \longmapsto \mathscr{O}_X(U)$ называется *структурным пучком* аффинного алгебраического многообразия X. Отметим, что функция $U \xrightarrow{f} \Bbbk$ на объединении открытых множеств $U = \bigcup W_i$ регулярна тогда и только тогда, когда регулярно каждое ограничение $f\,|_{W_i}$, и наоборот, для любого набора локальных регулярных функций $W_i \xrightarrow{f_i} \Bbbk$, таких что $f_i \equiv f_j$ на $W_i \cap W_j$, существует единственная регулярная функция $f \in \mathscr{O}_X(\cup W_i)$, ограничение которой на каждое W_i совпадает с f_i — последнее условие, собственно, и означает что предпучок $U \longmapsto \mathscr{O}_X(U)$ является *пучком*.

Отметим, что хотя следствие n° 3.1.2 и утверждает, что открытые множества являются *локально* аффинными, произвольное открытое подмножество U аффинного алгебраического множества X обычно аффинным алгебраическим многообразием *не является*: во-первых, алгебра $\mathscr{O}_X(U)$ может оказаться не конечно порожденной, во-вторых, даже когда она конечно порождена, биекции между $\operatorname{Spec_m} \mathscr{O}_X(U)$ и точками U может и не быть.

Упражнение 3.1. Пусть $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат. Покажите, что $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}(U) = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ при $n \geqslant 2$.

Указание. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathscr{D}(x_i)$ и утверждение n° 3.1.1.

Упражнение 3.2. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия является аффинным , если и только если найдутся $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathscr{O}_X(U)$, такие что идеал $(f_1, f_2, \dots, f_m) = \mathscr{O}_X(U)$ и каждое из подмножеств $U_i = \{p \in U \mid f_i(p) \neq 0\}$ является аффинным многообразием.

3.3. Алгебраические многообразия. Открытое подмножество $U \subset X$ топологического пространства X называется *алгебраической аффинной картой*, если существует аффинное алгебраическое многообразие X_U (рассматриваемое как топологическое пространство с топологией

[1] понимаемое как контравариантный функтор из категории открытых подмножеств $U \subset X$ в категорию $\Bbbk$-алгебр

Зарисского) и *гомеоморфизм* $X_U \xrightarrow{\varphi_U} U$. Две алгебраических карты $X_U \xrightarrow{\varphi_U} U$ и $X_W \xrightarrow{\varphi_W} W$ на X называются *совместимыми*, если *гомеоморфизм склейки*

$$\varphi_{WU} = \varphi_W \circ \varphi_U^{-1} \,:\, X_U \supset \varphi_U^{-1}(U\cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U\cap W) \subset X_W$$

является *регулярным изоморфизмом* в том смысле, что его гомоморфизм поднятия

$$\Gamma\left(\varphi_W^{-1}(U\cap W)\,,\, \mathscr{O}_{X_W}\right) \xrightarrow{\varphi_{WU}^*} \Gamma\left(\varphi_U^{-1}(U\cap W)\,,\, \mathscr{O}_{X_U}\right)$$

является корректно определенным изоморфизмом $\Bbbk$-алгебр. Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X. Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство X, снабженное классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

3.4. Проективные пространства. Проективное пространство размерности n, получающееся проективизацией $(n+1)$-мерного векторного пространства V — это множество $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точками которого, по определению, являются одномерные подпространства в V, или, что то же самое, ненулевые векторы пространства V, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, или, что то же самое, проходящие через начало координат прямые в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$. Чтобы видеть такие прямые как «обычные» точки, внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость $U \subset \mathbb{A}(V)$ коразмерности 1, как на рис. 3◇1. Любой такой экран называется *аффинной картой* на $\mathbb{P}(V)$. Заметьте, что ни одна аффинная карта не покрывает $\mathbb{P}_n$ целиком: дополнение $U_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \setminus U$ состоит из всех прямых, лежащих в проходящей через начало координат плоскости, параллельной U, и естественно отождествляется с $\mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{P}(V)$. Оно называется *бесконечной гиперплоскостью* для карты U. Таким образом, $\mathbb{P}_n$ разбивается в объединение непересекающихся «аффинных клеток»:

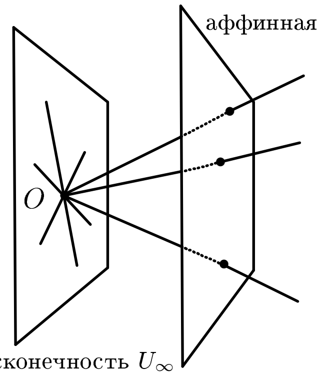

Рис. 3◇1. Проективный мир.

$$\mathbb{P}_n = U \sqcup U_\infty = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \;\cdots\; = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0\,.$$

Упражнение 3.3. Какое соотношение на число точек над конечным полем из q элементов получается из этого разбиения?

3.4.1. Проективные гиперповерхности. Зафиксируем в $(n+1)$-мерном пространстве V какой-нибудь базис $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Два вектора

$$v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)\,, \quad w = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$$

тогда и только тогда задают одну и ту же точку $p \in \mathbb{P}_n$, когда они пропорциональны: все $x_\nu = \lambda\, y_\nu$ для некоторого $\lambda \neq 0$. Поэтому точка $p \in \mathbb{P}_n$ задаётся не набором собственно координат, но набором их отношений $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$, которые называются *однородными координатами* точки p в базисе $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \subset V$. Поэтому многочлены $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *не являются функциями* на $\mathbb{P}_n$. Тем не менее, для *однородного* многочлена $f \in S^d(V^*)$ в $\mathbb{P}(V)$ корректно определенно множество его нулей

$$V(f) \overset{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid f(v) = 0 \,\}$$

(ибо $f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0$). Это множество называются *проективной гиперповерхностью степени* $\deg f$, а f называется *уравнением* этой гиперповерхности. Гиперповерхность называется *неприводимой*, если неприводимо её уравнение. Гиперповерхность называется *кратной*, если её уравнение имеет вид $g^m = 0$.

В общем случае проективная гиперповерхность S задаётся уравнением $f = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$, в котором многочлены p_i неприводимы и попарно различны. Гиперповерхности S_i называются *приведёнными неприводимыми компонентами* гиперповерхности S, а показатели m_i — их кратностями. Это принято записывать, как

$$S = m_1 S_1 + m_2 S_2 + \dots + m_r S_r \ . \tag{3-1}$$

Если однородный многочлен F зануляется на неприводимой гиперповерхности S с уравнением f, то по теореме Гильберта о нулях $F^m \in (f)$, а значит, в силу факториальности кольца многочленов, F делится на f. Следовательно, по разложению (3-1) (в котором $\sum m_i \deg S_i = d$) уравнение степени d, задающее гиперповерхность S восстанавливается однозначно с точностью до пропорциональности.

3.4.2. СЛЕДСТВИЕ. *Проективные гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ образуют проективное пространство*

$$\mathscr{S}_d = \mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$$

(проективизацию пространства однородных многочленов степени d на V). □

Упражнение 3.4. Выразите N через n и d

3.5. Локальные аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту

$$U_\xi = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\} \ ,$$

где $\xi \in V^*$. Любые n линейных форм $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in V^*$, ограничения которых на U_ξ линейно независимы[2], задают *локальные* аффинные координаты, действующие внутри карты U_ξ. Чтобы вычислить их значения в точке $p = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, следует сначала выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке p, вектор $v = p/\xi(p) \in U_\xi$, а затем вычислить значения n линейных форм ξ_ν на этом векторе. Получающиеся таким образом локальные аффинные координаты $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p)/\xi(p)$ (где $1 \leqslant i \leqslant n$) зависят как от выбора U_ξ, так и от выбора ξ_i и охватывают только те точки p, для которых $\xi(p) \neq 0$. Обратите внимание, что оба высказывания: «$\xi(p) \to 0$» и «$x_i(p) \to \infty$ для некоторого i» означают, что p убегает с U_ξ на бесконечность $U_{\xi,\infty} = \mathbb{P}_n \setminus U_\xi = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 0\}$.

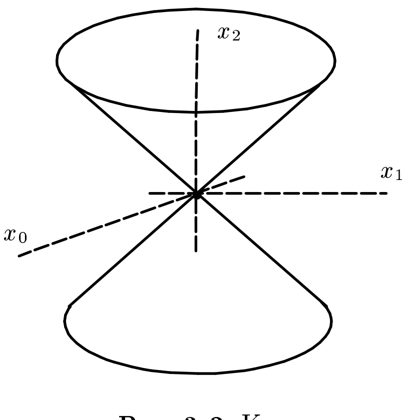

Рис. 3◇2. Конус.

3.5.1. Пример: аффинные коники. Уравнение

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \tag{3-2}$$

задает кривую $C \subset \mathbb{P}_2$, которая называется (при $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$) *невырожденной коникой*. Выясним, как она выглядит в некоторых аффинных картах (над полем $\Bbbk = \mathbb{R}$). В U_{x_0}, где $x_0 = 1$, в локальных координатах $t_1 = x_1|_{U_{x_0}} = x_1/x_0$ и $t_2 = x_2|_{U_{x_0}} = x_2/x_0$ уравнение (3-2) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_1^2 = 1$. В карте U_{x_2}, где $x_2 = 1$, с локальными аффинными координатами $t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$, $t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$ мы получим уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. Наконец, в карте $U_{x_2 - x_1}$, где $x_2 = 1 + x_1$, в локальных аффинных координатах $t = x_0|_{U_{x_2-x_1}} = x_0/(x_2 - x_1)$, $u = (x_2 + x_1)|_{U_{x_2-x_1}} = (x_2 + x_1)/(x_2 - x_1)$ мы получим уравнение параболы $u = t^2$ (надо перенести x_1^2 в (3-2) слева направо и поделить обе части на $(x_2 - x_1)^2$).

Упражнение 3.5. Аффинный конус $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ в $\mathbb{A}^3$ изображен на рис. 3◇2. Нарисуйте каждую из 3-х рассмотренных выше аффинных карт и её пересечение с конусом.

[2]это равносильно тому, что $n+1$ форм $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ образуют базис в V^*

3.5.2. Пример: стандартное аффинное покрытие $\mathbb{P}_n$ состоит из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в $\mathbb{A}^{n+1}$ уравнениями $\{x_\nu = 1\}$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на U_ν берутся n форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с} \quad 0 \leqslant i \leqslant n\,,\; i \neq \nu\,.$$

Пространство $\mathbb{P}_n$ можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий $U_0, U_1, \dots, U_n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ по их фактическим пересечениям внутри $\mathbb{P}_n$. В однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из всех таких x, у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на U_μ и U_ν это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$, если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$. Например, $\mathbb{P}_1$ может быть изготовлена из двух копий $\mathbb{A}^1$ путем отождествления при всех $t \neq 0$ точки t на одной из них с точкой $1/t$ на другой.

3.5.3. СЛЕДСТВИЕ. *Проективные пространства являются алгебраическими многообразиями.* □

Упражнение 3.6. Проверьте, что вещественные проективные пространства $\mathbb{RP}_1$, $\mathbb{RP}_2$ и $\mathbb{RP}_3$ являются гладкими многообразиями (в смысле дифференциальной топологии) и диффеоморфны, соответственно, окружности S^1, ленте Мёбиуса с заклеенной кругом границей[3], и группе Ли $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ вращений трёхмерного евклидова пространства вокруг начала координат.

Упражнение 3.7. Проверьте, что $\mathbb{CP}_1$, как комплексно-аналитическое многообразие, изоморфно римановой сфере S^2.

3.6. Проективные многообразия. Пересечения проективных гиперповерхностей называются *проективными алгебраическими многообразиями*. Как и в аффинном случае, произвольный набор однородных уравнений f_ν имеет то же множество нулей, что и порождённый этими уравнениями идеал, в котором всегда можно выбрать конечный набор образующих. Отметим, что всякий идеал $I \subset \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ порождённый однородными многочленами, является *однородным*, т. е. вместе с каждым многочленом содержит и все его однородные компоненты, и как векторное пространство над $\Bbbk$ распадается в прямую сумму однородных компонент

$$I = \oplus I_d\,, \quad \text{где } I_d = I \cap S^d V^* \text{ (в частности } I_m I_n \subset I_{m+n})$$

Упражнение 3.8. Проверьте, что проективные многообразия (понимаемые как пересечения проективных гиперповерхностей) являются алгебраическими многообразиями.

3.6.1. Пример: проективное замыкание аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ — это такое проективное алгебраическое многообразие $\widetilde{X} \subset \mathbb{P}_n$, пересечение которого со стандартной аффинной картой U_0 совпадает с X. Геометрически оно получается добавлением к X лежащих на бесконечности точек, отвечающих всем его *ассимптотическим направлениям*. Алгебраически, $\widetilde{X} \subset \mathbb{P}_n$ задаётся однородными уравнениями $\widetilde{f}_\nu(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, которые получаются из (неоднородных) уравнений

$$f_\nu(t_1, t_2, \dots, t_n) = 0\,,$$

задающих $X \subset \mathbb{A}^n$, заменой каждого монома $t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$ на моном[4] $x_0^{\deg f_\nu - \sum m_i} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ степени $\deg f_\nu$. Например проективным замыканием аффинной кривой $t_1 = t_2^3$ является проективная кривая

$$x_0^2 x_1 = x_2^3\,,$$

которая в другой аффинной карте U_1 превращается в полукубическую параболу $t_0^2 = t_2^3$, имеющую *каспидальную особенность*[5] в начале координат.

3.7. Гладкость и касательные. Прямая $\ell \subset \mathbb{P}_n$ называется *касательной* к проективному многообразию $X \subset \mathbb{P}_n$ в точке $p \in X$, если $p \in \ell$ и либо $\ell \subset X$ целиком лежит на X, либо точка p

[3] напомним, что границей ленты Мёбиуса, так же как и границей круга, является окружность

[4] это соответствует подстановке в ν-тое уравнение $t_i = x_i/x_0$ и умножению обеих частей на $x_0^{\deg f_\nu}$

[5] т. е. «остриё» или «точку возврата»

является *кратной точкой* пересечения $\ell \cap X$. Последнее означает, что точка p является кратным корнем для всех однородных форм от двух переменных, которые получаются ограничением на проективную прямую $\ell = \mathbb{P}_1$ уравнений, задающих X.

Если $X = V(f) \subset \mathbb{P}_n$ является гиперповерхностью степени d с уравнением $f(x) = 0$, $p \in X$, а $q \in \mathbb{P}_n$ — произвольная точка, то условие касания прямой $\ell = (pq)$ с X в точке p означает, что однородный многочлен $f(\vartheta_0 p + \vartheta_1 q) \in \Bbbk[\vartheta_0, \vartheta_1]$, который получается из f подстановкой $x = \vartheta_0 p + \vartheta_1 q$, делится на ϑ_0^2. Значение однородного многочлена на сумме двух векторов можно расписать по формуле Ньютона – Тейлора:

$$f(\vartheta_0 p + \vartheta_1 q) = \sum_{i+j=d} f_{i,j}(p,q) \cdot \vartheta_0^i \vartheta_1^j \,,$$

где коэффициент $f_{i,j}$ является биоднородным полиномом от (p,q) бистепени (i,j) :

$$f_{i,j}(p,q) = \binom{d}{i} \widetilde{f}(\underbrace{p,\dots,p}_{i}, \underbrace{q,\dots,q}_{j}) = \frac{1}{i!}\, \partial_p^i f(q) = \frac{1}{j!}\, \partial_q^j f(p) \,, \tag{3-3}$$

(здесь $\widetilde{f} \in \operatorname{Sym}^d V^* \subset V^{*\otimes d}$ обозначает *полную поляризацию* многочлена[6] $f \in S^d V^*$, а

$$\partial_p^i f = \partial_p \partial_p \cdots \partial_p f \qquad \text{и} \qquad \partial_q^j f = \partial_q \partial_q \cdots \partial_q f$$

суть результаты i-кратного дифференцирования f в направлении p и j-кратного дифференцирования f в направлении q соответственно).

Поскольку $f_{d,0}(p,q) = f(p) = 0$, $f(\vartheta_0 p + \vartheta_1 q)$ делится на ϑ_0^2 тогда и только тогда, когда $f_{d-1,1}(p,q) = 0$. В левой части этого равенства стоит линейная форма от q, имеющая в координатах вид

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot q_i = 0 \,.$$

Если эта форма нетривиальна, т. е. не все частные производные от f зануляются в точке p, поверхность $V(f)$ называется *гладкой*(или *неособой*) в точке p. В противном случае поверхность называется *особой* в точке p. Поверхность, все точки которой гладкие, называется *гладкой*.

Неособость геометрически означает, что множество точек q для которых прямая (pq) касается поверхности в точке p, является проективным подпространством коразмерности 1. Это пространство называется *геометрическим касательным пространством* к $X = V(f)$ в точке p и обозначается $T_p X$. Напротив, особость точки p означает, что *любая* проходящая через p прямая пересекает $V(f)$ в p с кратностью $\geqslant 2$, т. е. является касательной.

3.8. Прямые произведения. Прямое произведение $X \times Y$ алгебраических многообразий X, Y является алгебраическим многообразием. Его атлас состоит из всех попарных произведений $U \times W$, где $U \subset X$, $W \subset X$ суть аффинные алгебраические карты на X, Y.

Упражнение 3.9. Проверьте, что прямое произведение $\mathbb{P}_{n_1} \times \mathbb{P}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{P}_{n_m}$, а также любое его подмножество, задаваемое набором однородных по каждой группе переменных полиномиальных уравнений на m групп по $n_1, n_2, \dots, n_m$ переменных, является алгебраическими многообразиями.

3.8.1. Пример: системы результантов. Зафиксируем некоторый набор из $m \geqslant 2$ степеней $d_1, d_2, \dots, d_m$, и рассмотрим в прямом произведении пространств гиперповерхностей из n° 3.4.2 множество

$$\mathscr{R} \subset \mathscr{S}_{d_1} \times \mathscr{S}_{d_2} \times \cdots \times \mathscr{S}_{d_m} \,,$$

образованное всеми наборами из m гиперповерхностей $S_1, S_2, \dots, S_m \subset \mathbb{P}_n$, имеющих непустое пересечение $\bigcap S_\nu \neq \varnothing$. Покажем, что $\mathscr{R}$ является алгебраическим многообразием, т. е. описывается конечной системой мультиоднородных полиномиальных уравнений на коэффициенты форм $(f_1, f_2, \dots, f_m) \in S^{d_1}V^* \times S^{d_1}V^* \times \cdots \times S^{d_m}V^*$, задающих гиперповерхности $S_1, S_2, \dots, S_m$.

[6] т. е. единственную симметричную полилинейную форму от d аргументов из V, такую что $\widetilde{f}(x,\dots,x) = f(x)$

Пусть $I \subset \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ — идеал, порожденный формами f_ν. Условие $\bigcap S_\nu = \varnothing$ в $\mathbb{P}(V)$ означает, что аффинное многообразие $V(I) \subset \mathbb{A}(V)$ либо пусто, либо совпадает с началом координат. Как мы видели в n° 1.5.2, это равносильно тому, что $S^dV^* \subset I \; \forall\, d \gg 0$, что, в свою очередь, означает сюрьективность при всех $\forall\, d \gg 0$ $\Bbbk$-линейного отображения

$$\mu_d \;:\; S^{d-d_1}V^* \oplus S^{d-d_2}V^* \oplus \cdots \oplus S^{d-d_m}V^* \xrightarrow{(g_0, g_1, \dots, g_n) \mapsto \sum g_\nu f_\nu} S^d \tag{3-4}$$

В стандарных мономиальных базисах μ_d представляется матрицей, элементы которой суть линейные формы от коэффициентов многочленов f_ν. При $d \gg 0$ размерность левой части (3-4) (ведущая себя как $\sum\limits_{\nu=1}^{m} \binom{n+d-d_\nu}{n} \sim \frac{m}{n!}\, d^n$) становится больше, чем размерность правой (ведущей себя как $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!}\, d^n$). Поэтому несюрьективность отображения (3-4) равносильна тому, что ранг этой матрицы не максимален, т. е. все её старшие миноры зануляются. Итак, $\mathscr{R}$ задаётся бесконечной системой системой полиномиальных уравнений, в которой приравнены к нулю все максимальных миноры всех матриц μ_d с $d \gg 0$. Как мы знаем, эта бесконечная система уравнений должна быть эквивалентна некоторой конечной подсистеме. Такая конечная система соотношений на коэффициенты форм, выполнение которой равносильно непустоте задаваемого этими формами проективного многообразия, называется *системой результантов*. Она зависит от $m, n, d_1, d_2, \dots, d_m$ и её явное отыскание в общем случае является делом деликатным[7].

Пусть, например, $n = 1$ и $m = 2$, т. е. мы имеем пару бинарных форм от $t = (t_0 : t_1)$

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0\, t_1^r + a_1\, t_0\, t_1^{r-1} + a_2\, t_0^2\, t_1^{r-2} + \;\cdots\; + a_{r-1}\, t_0^{r-1}\, t_1 + a_r\, t_0^r \\ B(t) &= b_0\, t_1^s + b_1\, t_0\, t_1^{s-1} + b_2\, t_0^2\, t_1^{s-2} + \;\cdots\; + b_{s-1}\, t_0^{s-1}\, t_1 + b_s\, t_0^s \end{aligned} \tag{3-5}$$

(или, если угодно, пару многочленов от одной переменной $x/1 = t_0/t_1$). При $d = r + s - 1$ размерность левой части (3-4) оказывается равна размерности правой[8], отображение μ_d принимает вид

$$S^{r-1}U \oplus S^{s-1}V^* \xrightarrow{(h_1(t), h_2(t)) \mapsto A(t)h_1(t) + B(t)h_2(t)} S^{r+s-1}V^* \,, \tag{3-6}$$

и задаётся в стандартных мономиальных базисах квадратной матрицей, транспонированной к матрице

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_r & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_r & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_r \\ b_0 & b_1 & \dots & b_s & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_s & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_s \end{pmatrix}}_{s+r} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} s \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} r \end{array} \tag{3-7}$$

определитель которой называется *детерминантом Сильвестра*. Покажем, что он порождает результантный идеал. Для этого рассмотрим кольцо многочленов $k[\alpha', \alpha'', \beta', \beta'']$ от четырех наборов переменных

$$\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) \,,\; \alpha'' = (\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_n) \,, \quad \beta' = (\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_m) \,,\; \beta'' = (\beta''_1, \beta''_2, \dots, \beta''_m) \,,$$

таких что $A(t) = \prod\limits_{i=0}^{r} (\alpha'_i t_1 - \alpha''_i t_0) \,,\; B(t) = \prod\limits_{i=0}^{s} (\beta'_i t_1 - \beta''_i t_0)$. Произведение

$$R_{AB} \overset{\text{def}}{=} \prod_{i,j} \left(\alpha'_i \beta''_j - \alpha''_i \beta'_j\right) = \prod_{i=1}^{r} B(\alpha_i) = (-1)^{rs} \prod_{j=1}^{s} A(\beta_j) \,,$$

называется *результантом* пары бинарных форм (3-5). Результант биоднороден бистепени (rs, rs) по (α, β) и обращается в нуль тогда и только тогда, когда A и B имеют нетривиальный общий делитель,

[7] описанию различных подходов к решению этой задачи посвящена книга *I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A.V. Zelevinsky. Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.* [Springer, 1994], в которой среди прочего описаны все случаи, когда результантное множество можно задать одним уравнением

[8] и она меньше при меньших d и больше при бóльших

что равносильно наличию общего нуля на $\mathbb{P}_1$. Определитель Сильвестра совпадает с результантом[9] с точностью до постоянного множителя. В самом деле, если точка (α, β) лежит на квадрике $\alpha'_i\beta''_j - \alpha''_i\beta'_j = 0$, то $(\alpha'_i t_1 - \alpha''_i t_0) = (\beta'_i t_1 - \beta''_i t_0)$ с точностью до скалярного множителя, и эта линейная форма делит $A(t)$, $B(t)$, и любой многочлен вида $A(t)h_1(t) + B(t)h_2(t)$. Стало быть, отображение (3-6) не эпиморфно и имеет нулевой определитель. Таким образом, определитель Сильвестра тождественно зануляется на каждой квадрике $\alpha'_i\beta''_j - \alpha''_i\beta'_j = 0$, и значит, делится на $R_{A,B}$. Так как определитель Сильвестра имеет ту же бистепень (rs, rs) по (α, β), частное должно быть константой.

Упражнение 3.10. Найдите её (например, сравнивая коэффициенты при старших мономах).

3.8.2. Пример: отделимость. Стандартный атлас на $\mathbb{P}_1$ состоит из двух карт $\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1$, $i = 0, 1$, причём пересечение $\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}$ видно в каждой из карт как дополнение к началу координат. Карты $U_{0,1} = \mathbb{A}^1$ склеены друг с другом вдоль $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ посредством отображения $\varphi_{01} : t \mapsto 1/t$. Если мы заменим его на тождественное отображение $\widetilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t$, то мы получим другое многообразие — прямую с «раздвоенной точкой»: . Такая патология называется *неотделимостью*. Возникла она из-за того, что второе правило склейки не замкнуто: его можно «непрерывно продолжить» с $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \overline{\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}}$.

Формализуется это так. Включения $U_0 \hookleftarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$ задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$. Так, для $\mathbb{P}_1$ получится вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по правилу $t \mapsto (t\,,\, t^{-1})$, отождествляющее $U_0 \cap U_1$ с замкнутым подмножеством $V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2 = U_0 \times U_1$. Во втором примере, вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ задается правилом $t \mapsto (t\,,\, t)$, и его образ не замкнут — это открытое подмножество $\Delta \smallsetminus \{(0, 0)\}$ диагонали $\Delta = V(x - y) \subset \mathbb{A}^2$.

Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут. Поскольку этот образ есть не что иное, как пересечение диагонали $\Delta \subset X \times X$ с аффинной картой $U \times W$ на $X \times X$, многообразие X отделимо, если и только если диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}_n$ отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$.

3.9. Регулярные функции и морфизмы. Функция $X \xrightarrow{f} \Bbbk$ называется *регулярной* в точке x, если её ограничение на некоторую аффинную окрестность этой точки является там регулярной функцией в смысле n° 3.1 в какой-нибудь открытой окрестности U точки x. Функции $U \longrightarrow \Bbbk$ на открытом подмножестве $U \subset X$, регулярные в каждой точке этого подмножества, образуют коммутативное кольцо $\mathscr{O}_X(U)$, и соответствие $U \longmapsto \mathscr{O}_X(U)$ называется *структурным пучком* многообразия X. Отображение алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *регулярным*, если $\forall\, x \in X$ и любой локальной регулярной функции $f \in \mathscr{O}_Y(W)$, определённой в какой-либо окрестности W точки $\varphi(x)$, существует окрестность $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x, такая что $\varphi^*(f) \in \mathscr{O}_X(U)$. Иными словами, над каждым открытом $U \subset Y$ гомоморфизм поднятия должен быть корректно определенным гомоморфизмом колец локальных регулярных функций. В частности, множество регулярных морфизмов $X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ совпадает с $\mathscr{O}_X(X)$.

3.9.1. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $U \xrightarrow{\varphi} Y$, определенный на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X, называется *рациональным отображением* из X в Y. Формально говоря, рациональное отображение (в теоретико-множественном смысле) не является отображением «из X», ибо определено не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают в алгебраической геометрии.

3.9.2. Пример: проекция $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, переводящая точку $A \in \mathbb{A}^n$ в прямую[10] $(OA) \in \mathbb{P}_n$ является сюрьективным рациональным морфизмом, определенным на $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$. В стандартной аффинной карте $\mathbb{A}^n \xrightarrow{\varphi_i} U_i = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{P}_n \mid t_i = 1\}$, соответствующий гомоморфизм поднятия

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}_n}(U_i) = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \xrightarrow{\pi^*} \Bbbk[t_0, t_1, \dots, t_n]\left[t_i^{-1}\right] = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}(\mathscr{D}(t_i)) = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}(\pi^{-1}(U_i))$$

[9] в частности, доставляет «явное» разложение результанта в виде многочлена от «однородных» элементарных симметрических функций $a_i(\alpha)$, $b_j(\beta)$

[10] рассматриваемую как одномерное векторное подпространство в V

переводит $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ в $\widetilde{f}(t_0,t_1,\dots,t_n)=f(t_0/t_i\,,\;\dots\;,t_{i-1}/t_i\,,\,t_{i+1}/t_i\,,\;\dots\;,t_n/t_i)$.

3.10. Замкнутые подмногообразия. Каждое замкнутое подмножество $Z\subset X$ алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты U пересечение $Z\cap U$ есть замкнутое подмножество U, т. е. аффинное алгебраическое множество $\operatorname{Spec_m}\left(\mathscr{O}_X(U)/\mathscr{I}_Z(U)\right)$, где $\mathscr{I}_Z(U)=\{f\in\mathscr{O}_X(U)\mid f|_Z\equiv 0\}$ есть идеал $Z\cap U$ в U. Соответствие $U\longmapsto\mathscr{I}_Z(U)$ называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z\subset X$. Он является подпучком структурного пучка и состоит из всех локальных регулярных функций, тождественно обращающихся в нуль на Z. Регулярный морфизм $X\xrightarrow{\varphi}Y$ называется *замкнутым вложением*, если $\varphi(X)\subset Y$ является замкнутым подмногообразием и φ устанавливает изоморфизм между X и $\varphi(X)$. Будем называть многообразие X *аффинным* (соотв. *проективным*), если оно допускает замкнутое вложение $X\hookrightarrow\mathbb{A}^m$ (соотв. $X\hookrightarrow\mathbb{P}_m$) для некоторого m.

Упражнение 3.11. Убедитесь, что аффинные и проективные алгебраические многообразия, понимаемые как подмножества в аффинном (соотв. проективном) пространстве, заданные системой полиномиальных (соотв. однородных полиномиальных) уравнений являются аффинными (соотв. проективными) многообразиями в смысле предыдущего определения.

3.10.1. Пример: замкнутое подмногообразие $X\subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, поскольку диагональ в $X\times X$ является прообразом диагонали в $Y\times Y$ при вложении $X\times X\hookrightarrow Y\times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

3.10.2. Пример: график морфизма. Пусть $X\xrightarrow{\varphi}Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta\subset Y\times Y$ при индуцированном морфизме $X\times Y\xrightarrow{\varphi\times\mathrm{Id}_Y}Y\times Y$ называется *графиком* φ и обозначается через Γ_φ. Геометрически, $\Gamma_\varphi=\{(x,f(x))\}\subset X\times Y$. Если Y отделимо, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий $\operatorname{Spec_m}(A)\xrightarrow{\varphi}\operatorname{Spec_m}(B)$ задается в $A\otimes B$ системой уравнений $1\otimes f=\varphi^*(f)\otimes 1$, где f пробегает B.

3.10.3. Пример: семейства замкнутых подмногообразий. Каждый регулярный морфизм $X\xrightarrow{\pi}Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y=\pi^{-1}(y)\subset X$, параметризованное точками $y\in Y$. Если $X\xrightarrow{\pi}Y$, $X'\xrightarrow{\pi'}Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $X\xrightarrow{\varphi}X'$ называется *морфизмом семейств* (или морфизмом *над* Y), если он переводит X_y в X'_y для каждого $y\in Y$, т. е. если $\pi=\pi'\circ\varphi$. Семейство $X\xrightarrow{\pi}Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $X_0\times Y\xrightarrow{\pi_Y}Y$ для некоторого многообразия X_0.

3.10.4. Пример: раздутие точки $p\in\mathbb{P}_n$. Прямые, проходящие через заданную точку $p\in\mathbb{P}_n$, образуют проективное пространство $E\simeq\mathbb{P}_{n-1}$, которое можно отождествить с любой не содержащей p гиперплоскостью $H\subset\mathbb{P}_n$. График инцидентности $\mathscr{B}_p=\{(\ell,q)\in E\times\mathbb{P}_n\mid q\in\ell\}$ называется *раздутием* точки $p\in\mathbb{P}_n$. Проекция

$$\mathscr{B}_p\xrightarrow{\sigma_p}\mathbb{P}_n$$

биективна всюду над $\mathbb{P}_n\smallsetminus\{p\}$, однако прообраз самой точки p совпадает с E, и тем самым, имеет коразмерность 1 в $\mathscr{B}_p$. Он называется *исключительным дивизором*. Вторая проекция

$$\mathscr{B}_p\xrightarrow{\varrho_E}E$$

реализует $\mathscr{B}_p$ как *линейное расслоение* над E, слой которого над точкой $q\in E$ — это прямая $(pq)\subset\mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E.

Иными словами, раздутие точки p можно представлять себе как результат выкалывания этой точки с последующей вклейкой в образовавшееся точечное отверстие целого проективного пространства E, параметризующего все проходящие через p прямые, так чтобы при подходе к точке p вдоль любой прямой мы попадали в отвечающую этой прямой точку пространства E.

Если фиксировать однородные координаты $(t_0: t_1:\;\dots\;:t_n)$ на $\mathbb{P}_n$ так, чтобы $p=(1:0:\;\dots\;:0)$, и отождествить E с гиперплоскостью $H=\{(0:q_1:\;\dots\;:q_n)\}\subset\mathbb{P}_n$, то условие $(q,t)\in\mathscr{B}_p$ будет равносильно системе квадратичных уравнений

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&q_1&\cdots&q_n\\t_0&t_1&\cdots&t_n\end{pmatrix}=2\,,\quad\text{или}\quad q_it_j=q_jt_i\quad\forall\,1\leqslant i<j\leqslant n\,.$$

Таким образом, $\mathscr{B}_p$ есть замкнутое подмногообразие $H \times \mathbb{P}_n$.

3.11. Замкнутые морфизмы. Регулярный морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *замкнутым*, если $\varphi(Z) \subset Y$ замкнуто для любого замкнутого $Z \subset X$. Любое замкнутое вложение замкнуто. Из утверждения n° 2.5.1 вытекает, что всякий конечный морфизм аффинных многообразий замкнут.

3.11.1. ЛЕММА. *Проекция $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$ замкнута.*

Доказательство. Зафиксируем однородные координаты t на $\mathbb{P}_n$ и аффинные координаты x на $\mathbb{A}^n$. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся некоторой системой полиномиальных уравнений $f_\nu(t,x) = 0$ (однородных по t). Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p, при подстановке которых вместо x будет получаться система однородных уравнений $f_\nu(t,p) = 0$ на t, задающая непустое подмногообразие в $\mathbb{P}_n$. Как мы видели в n° 3.8.1, последнее условие равносильно тому, что коэффициенты форм $f_\nu(t,p)$, являющиеся полиномами от p, удовлетворяют системе результантных полиномиальных уравнений. □

3.11.2. СЛЕДСТВИЕ. *Если многообразие X проективно, то проекция $X \times Y \longrightarrow Y$ замкнута для любого многообразия Y.*

Доказательство. Ограничиваясь на аффинные карты в Y, мы можем считать Y аффинным. Тогда $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, и наша проекция получается ограничением замкнутого отображения $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$. □

3.11.3. СЛЕДСТВИЕ. *Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ замкнут.*

Доказательство. Для каждого замкнутого $Z \subset X$ произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Поскольку Y отделимо, график $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ тоже замкнут. Но $\varphi(Z)$ есть образ $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y)$ при проекции $X \times Y \longrightarrow Y$, которая замкнута. □

3.11.4. СЛЕДСТВИЕ. *Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия X в любое аффинное многообразие постоянно (т. е. стягивает X в одну точку). В частности, $\mathscr{O}_X(X) = \Bbbk$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть отображения $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^n$. Беря композицию такого отображения с координатными формами $\mathbb{A}^n \xrightarrow{x_i} \mathbb{A}^1$, мы сводим утверждение к случаю $n = 1$. Отождествляя $\mathbb{A}^1$ с аффинной картой на $\mathbb{P}_1$, получаем регулярное несюрьективное отображение $X \longrightarrow \mathbb{P}_1$, образ которого замкнут и связен, т. е. является одной точкой. □