Письменный экзамен по алгебре за 4-й семестр

Экзамен длится 4 часа, задачи можно решать в любом порядке. Правильное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Для получения оценки *3/4/5* достаточно набрать $\geqslant 20/\geqslant 40/\geqslant 60$ баллов.

Задача 1 (10 баллов). Целозамкнуто ли кольцо многочленов над целозамкнутым кольцом без делителей нуля?

Задача 2. Пусть конечная группа G действует регулярными автоморфизмами на аффинном алгебраическом многообразии X над алгебраичеки замкнутым полем.

а) (10 баллов) Покажите, что алгебра G-инвариантных функций на X конечно порождена.

б) (10 баллов) Постройте аффинное алгебраическое многообразие G/X и конечную регулярную сюрьекцию $X \xrightarrow{\pi} G/X$, слоями которой являются в точности G-орбиты и которая универсальна в следующем смысле: для любого регулярного морфизма аффинных алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$, такого что $\varphi(gx) = \varphi(x)$ для всех $g \in G$ и $x \in X$, существует единственный регулярный морфизм $G/X \xrightarrow{\psi} Y$, такой что $\psi\pi = \varphi$.

Задача 3. Зафиксируем $(n+1)$ натуральных степеней $d_0, d_1, \dots, d_n$, обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}\left(S^{d_i}V^*\right)$ пространство гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, и пусть

$$\Gamma = \{(S_0, S_1, \dots, S_n, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in \bigcap_{\nu=0}^{n} S_\nu\}\,.$$

а) (10 баллов) Покажите что Γ является неприводимым проективным многообразием и вычислите его размерность.

б) (10 баллов) Покажите, что существует единственный с точностью до пропорциональности неприводимый полином R от коэффициентов однородных форм $F_0, F_1, \dots, F_n$ заданных степеней от $(n+1)$ переменных, который обращается в нуль тогда и только тогда, когда система $(n+1)$ уравнений $F_\nu = 0$ имеет ненулевое решение[1].

Задача 4 (10 баллов). Пусть функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ на аффинном алгебраическом многообразии X таковы, что главные открытые множества $\mathscr{D}(f_\nu)$ покрывают X. Покажите, что последовательность $\Bbbk[X]$-модулей

$$0 \longrightarrow \Lambda^n \otimes \Bbbk[X] \longrightarrow \Lambda^{n-1} \otimes \Bbbk[X] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^1 \otimes \Bbbk[X] \longrightarrow \Lambda^0 \otimes \Bbbk[X] \longrightarrow 0\,,$$

в которой $\Lambda^\nu = \Lambda^\nu \Bbbk^n$ есть ν-тая компонента внешней алгебры n-мерного координатного пространства с базисом $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, а дифференциал действует по правилу

$$\omega \otimes g \mapsto \sum \frac{\partial \omega}{\partial \xi_i} \otimes f_i \cdot g\,,$$

точна.

Задача 5 (10 баллов). В категории $\Bbbk[x,y,z]$-модулей вычислите все $\mathrm{Ext}^\nu(\Bbbk, M)$, где $M = \Bbbk[x,y,z]/(x^2 - y^3)$, $\Bbbk = \Bbbk[x,y,z]/(x,y,z)$.

Задача 6. Пусть точная тройка модулей $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ отвечает классу $\xi \in \mathrm{Ext}^1(C, A)$. Покажите, что

а) (10 баллов) связывающий гомоморфизм δ в длинной точной последовательности когомологий, возникающей при применении к этой тройке функтора $\mathrm{Hom}(\,*\,, A)$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(C, A) \longrightarrow \cdots\,,$$

[1] кстати, как выглядит этот многочлен, когда все степени равны единице?

есть не что иное, как умножение Ионеды на класс ξ: $\varphi \mapsto \varphi \circ \xi$.

б) (10 баллов) диаграмма с точными строками и заданной стрелкой $C' \xrightarrow{\varphi} C$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & B' \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\psi"] & C' \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] & 0
\end{tikzcd}
$$

тогда и только тогда дополняется по коммутативности стрелкой $B' \xrightarrow{\psi} B$, когда произведение Ионеды $\varphi \circ \xi \in \mathrm{Ext}^1(C', A)$ совпадает с классом, отвечающим нижней точной тройке.

Задача 7 (10 баллов). Докажите, что на паракомпактном[2] топологическом пространстве всякий мягкий[3] пучок абелевых групп допускает «разбиение единицы» в следующем смысле: для любого глобального сечения и любого открытого покрытия можно построить набор сечений с носителями[4] внутри элементов покрытия, такой что в каждой точке отлично от нуля только конечное число из ростков этих локальных сечений, а их сумма равна ростку исходного глобального сечения.

Задача 8 (10 баллов). Комплекс $C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \; \cdots \; \longrightarrow C_n$ включается в коммутативную диаграмму (1) в которой точны все столбцы и все строки (кроме, быть может, самого комплекса), причём строки, стоящие достаточно высоко и достаточно низко, нулевые. Может ли такой комплекс иметь ненулевые гомологии H_i при $2 \leqslant i \leqslant (n-1)$?

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots \\
 & & & & & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \\
 & & & & & & \cdots & \cdots & & \\
 & & & & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast & \\
 & & & & & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast & & \\
 & & & & & \cdots & & & & \\
 & & & C_1 \arrow[r] \arrow[dd] & C_2 \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] & C_n \arrow[dd] & & & \\
 & & & & & \cdots & & & & \\
 & & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast & & & \\
 & & & \cdots & \cdots & & & & & \\
 & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] \arrow[dd] & \ast & & & & \\
 & & \cdots & \cdots & & & & & & \\
\ast \arrow[r] & \ast \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \ast \arrow[r] & \ast & & & & & \\
\iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & & & &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

---

[2]топологическое пространство называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие (такое, что у каждой точки есть окрестность пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия)

[3]пучок абелевых групп называется *мягким*, если его слой над любым замкнутым подмножеством порождается ростками глобальных сечений

[4]*носителем* глобального сечения s называется дополнение к объединению всех открытых множеств, на которые s ограничивается нулём