Теория Галуа

А6◇1. Разрешимо ли в радикалах общее квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ над полем $\mathbb{F}(p,q)$, если $\operatorname{char}\mathbb{F}=2$?

А6◇2. Покажите, что корень неприводимого над полем $\Bbbk$ характеристики $\neq 2$ многочлена тогда и только тогда выражается через квадратные радикалы, когда размерность поля разложения этого многочлена над $\Bbbk$ является степенью двойки.

А6◇3. Можно ли циркулем и линейкой построить на плоскости:

а) квадрат, площадь которого равна площади данного круга?

б) угол, втрое меньший произвольного заданного угла?

в) правильный 7-угольник? **г)** правильный 17-угольник?

А6◇4. Опишите поле разложения и найдите группу Галуа неприводимого кубического трёхчлена $x^3+px+q\in\mathbb{Q}[x]$ в зависимости от знака его дискриминанта $D=-4p^3-27q^2$.

А6◇5. Найдите[1] все вещественные корни многочленов

а) $x^3-3\,x+1$ **б)** $x^3+x^2-2\,x-1$ **в)** x^3-x+1 **г)** $x^3+2\,x^2+x+1$.

А6◇6. Покажите, что конечное поле характеристики p является расширением Галуа поля $\mathbb{Z}/(p)$ и имеет циклическую группу Галуа.

А6◇7. Пусть K — факториальное коммутативное кольцо, и $\mathfrak{p}\subset K$ — простой идеал. Обозначим через $\Bbbk=Q(K)$ и $\Bbbk_\mathfrak{p}=Q(K/\mathfrak{p})$ соответствующие поля частных. Покажите, что группа Галуа над $\Bbbk$ любого неприводимого многочлена $f\in K[x]$ содержит в качестве подгруппы группу Галуа над $\Bbbk_\mathfrak{p}$ его редукции $f_\mathfrak{p}=f \pmod{\mathfrak{p}}$.

Указание. Одно из решений этой задачи основано на следующей интерпретации группы Галуа заданного многочлена $f\in\Bbbk[x]$. Обозначим через $\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_n$ корни f в его поле разложения $\mathbb{F}$ и рассмотрим линейную форму $\psi=\vartheta_1t_1+\vartheta_2t_2+\dots+\vartheta_nt_n\in\mathbb{F}[t_1,t_2,\dots,t_n]$. Симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ действует на $\mathbb{F}[x,\,t_1,t_2,\dots,t_n]$ перестановками переменных $t_1,t_2,\dots,t_n$, и многочлен $F(x,\,t_1,t_2,\dots,t_n)=\prod\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma(x-\psi)$ лежит в $\Bbbk[x,\,t_1,t_2,\dots,t_n]$. Пусть F' — один из неприводимых множителей, на которые раскладывается F в $\Bbbk[x,\,t_1,t_2,\dots,t_n]$; тогда $\operatorname{Gal}_\Bbbk(f)\simeq\{\sigma\in\mathfrak{S}_n\mid\sigma(F')=F'\}$.

А6◇8. Пусть редукция $f_p=f \pmod{p}$ многочлена $f\in\mathbb{Z}[x]$ раскладывается в $\mathbb{F}_p[x]$ на неприводимые множители степеней $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$. Покажите, что группа Галуа f_p над $\mathbb{F}_p$ циклическая и порождается перестановкой циклового типа $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.

А6◇9. Найдите группу Галуа многочленов **а)** x^5-x-1 **б)** $x^4+2\,x^2+x+3$

А6◇10. Приведите пример многочлена шестой степени с целыми коэффициентами и симметрической группой Галуа над $\mathbb{Q}$.

[1] т. е. представьте в виде каких-нибудь (скажем, тригонометрических) элементарных функций от рациональных чисел