Расширения полей.

A5◇1 (алгебраическое замыкание). Покажите, что у любого поля $\Bbbk$ имеется алгебраически замкнутое алгебраическое расширение $\overline{\Bbbk} \supset \Bbbk$, единственное с точностью до автоморфизма, тождественного на $\Bbbk$.

A5◇2 (поле разложения). Покажите, что для любого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ степени $\deg f \geqslant 1$ существует единственное с точностью до тождественного на $\Bbbk$ автоморфизма алгебраическое расширение $\mathbb{F}_f \supset \Bbbk$, такое что $f(x) = c \cdot \prod\limits_{\nu=1}^{\deg f} (x - \vartheta_\nu)$ в $\mathbb{F}_f[x]$, где $\vartheta_\nu \in \mathbb{F}$ и порождают $\mathbb{F}_f$ над $\Bbbk$ в том смысле, что в $\mathbb{F}_f$ нет собственных подполей, содержащих $\Bbbk$ и $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{\deg f}$.

A5◇3°. Покажите, что всякое расширение любого поля характеристики нуль сепарабельно, т. е. минимальные многочлены всех его элементов не имеют кратных корней.

A5◇4. Пусть $\operatorname{ch} \Bbbk = p > 0$ и x, y алгебраически независимы над $\Bbbk$.

а) Вычислите степень расширения $\Bbbk[x, y] \supset \Bbbk[x^p, y^p]$.

б) Конечно ли множество промежуточных подполей $\Bbbk[x^p, y^p] \subset \mathbb{F} \subset \Bbbk[x, y]$?

A5◇5 (степень сепарабельности). Пусть $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ расширение конечной степени[1] m. Обозначим через $[\mathbb{F} : \Bbbk]_s$ и будем называть *степенью сепарабельности* число всех различных вложений $\mathbb{F} \longrightarrow \overline{\Bbbk}$, тождественных на $\Bbbk$. Покажите, что степень сепарабельности определена корректно (не зависит от выбора алгебраического замыкания поля $\Bbbk$) и нацело делит m.

A5◇6 (лемма о примитивном элементе). Пусть расширение $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ имеет конечную степень. Верно ли, что $\mathbb{F} = \Bbbk[\vartheta]$ для некоторого $\vartheta \in \mathbb{F}$,

а) если $\mathbb{F}$ сепарабельно над $\Bbbk$;

б) если и только если имеется лишь конечное число промежуточных подполей $\Bbbk \subset K \subset \mathbb{F}$.

A5◇7 (чисто несепарабельные расширения). Алгебраический над полем $\Bbbk$ характеристики p элемент ϑ называется *чисто несепарабельным*, если $\vartheta^{p^n} \in \Bbbk$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Расставьте все верные импликации между следующими ниже утверждениями про алгебраическое расширение $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ и приведите пример расширения, обладающего всеми этими свойствами:

а) $[\mathbb{F} : \Bbbk]_s = 1$

б) любой элемент $\vartheta \in \mathbb{F} \smallsetminus \Bbbk$ чисто несепарабелен над $\Bbbk$

в) минимальный многочлен любого $\vartheta \in \mathbb{F}$ имеет вид $x^{p^k} - a = 0$

г) $\mathbb{F}$ порождается над $\Bbbk$ некоторым семейством чисто несепарабельных элементов.

A5◇8. Пусть расширение $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ нормально. Покажите, что среди сепарабельных подрасширений $\Bbbk \supset K \supset \mathbb{F}$ имеется максимальное, причём оно автоматически нормально.

A5◇9. Пусть A — нётерово нормальное кольцо с полем частных K, $L \supset K$ — конечное сепарабельное расширение, и $B \supset A$ — целое замыкание A в L (желающие могут положить $A = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}[\vartheta] = \mathbb{Q}[x]/(f)$, где $f(\vartheta) = 0$). Верно ли, что B конечно порождено как A-модуль?

A5◇10* (теорема Дирехле о единицах). Пусть O — кольцо целых над $\mathbb{Z}$ элементов в конечном алгебраическом расширении $\mathbb{F} \supset \mathbb{Q}$, и $U \subset O$ — мультипликативная подгруппа обратимых элементов. Покажите, что:

а) имеется лишь конечное число вложений $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n : \mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{C}$;

б) отображение $U \xrightarrow{\vartheta \mapsto (\ln|\sigma_1(\vartheta)|, \dots, \ln|\sigma_n(\vartheta)|)} \mathbb{R}^n$ имеет в качестве ядра конечную подгруппу группы корней из единицы в $\mathbb{F}$, а в качестве образа — конечно порождённую абелеву группу;

в) выразите ранг этой абелевой группы через число вещественных и невещественных вложений $\mathbb{F}$ в $\mathbb{C}$.

[1] т. е. $\mathbb{F}$ как векторное пространство над $\Bbbk$ имеет $\dim_{\Bbbk} \mathbb{F} = m$