Применения теорем о размерности: 27 прямых и т. п.

А4◇1. Дано d-мерное проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Покажите, что множество $(n-d)$-мерных проективных подпространств $H \subset \mathbb{P}(V)$, пересекающих X по конечному множеству точек, составляют плотное открытое (по Зарисскому) подмножество грассманиана $\mathrm{Gr}(n+1-d, V)$ (параметризующего все $(n-d)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$).

Указание. Рассмотрите многообразие инцидентности $\Gamma = \{(x, H) \in X \times \mathrm{Gr}(n+1-d, V) \mid x \in H\}$ и с помощью проекции $\Gamma \longrightarrow X$ покажите, что оно проективно и неприводимо, а также вычислите его размерность; затем рассмотрите проекцию $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Gr}(n+1-d, V)$.

А4◇2. Покажите, что множество всех поверхностей 4-й степени $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, на которых имеется хоть одна прямая, образует алгебраическую гиперповерхность в пространстве $\mathbb{P}(S^4V^*)$ всех поверхностей 4-й степени.

А4◇3. Покажите, что в пучке плоскостей, проходящих через заданную прямую ℓ, лежащую на гладкой кубической поверхности $S \subset \mathbb{P}_3$ имеется ровно 5 различных плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$, пересекающих S по тройке прямых.

А4◇4. Может ли гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ иметь плоское сечение, распадающееся в объединение гладкой коники и ее касательной?

А4◇5. Покажите, что любая гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ может быть задана в подходящей координатной системе уравнением $\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \psi_1\psi_2\psi_3 = 0$, где φ_i и ψ_j суть линейные однородные формы.

Указание. Используйте прямую $\ell \subset S$ и 5 плоскостей, проходящих через нее и пересекающих S в тройке различных прямых

А4◇6. Зафиксируем на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ шестёрку точек $\{p_1, p_2, \dots, p_6\}$, так чтобы никакие три из них не были коллинеарны и ни одна не лежала бы на квадрике, проходящей через 5 других. Обозначим через $W = \{F \in S^3V^* \mid F(p_i) = 0\ \forall\, i = 1, 2, \dots, 6\}$ пространство кубических форм на V, задающих кривые, проходящие через наши 6 точек. Рассмотрим отображение

$$\mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\} \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}(W^*)\,, \tag{$*$}$$

которое отправляет точку $p \notin \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ в подпространство коразмерности 1 в W, образованное всеми кубическими формами из W, зануляющимися в точке p. Покажите, что

а) $\dim W = 4$. **б)** $S = \overline{\psi\left(\mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\}\right)}$ есть кубическая поверхность в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W^*)$.

в) Отображение $(*)$ продолжается до регулярного изоморфизма $\sigma^{-1}_{p_1,p_2,\dots,p_6}\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} S$ между S и раздутием $\mathbb{P}_2$ в заданных 6 точках.

г) Явно опишите 27 пучков плоских кубических кривых, проходящих через $p_1, p_2, \dots, p_6$, которые переводятся изоморфизмом $(*)$ в 27 прямых на S.

А4◇7 (двойная шестёрка Шлефли). Рассмотрим в $\mathbb{P}_3$ шесть прямых $[0], [1], \dots, [5]$, таких что прямые $[1], \dots, [5]$ попарно скрещиваются между собой и ни одна из них не касается и не лежит на квадрике, проведенной через любые 3 другие, а прямая $[0]$ пересекается со всеми пятью прямыми $[1], \dots, [5]$. Верно ли, что:

а) $\forall\, i = 1, \dots, 5$ существует единственная прямая $[i'] \neq [0]$ такая, что $[i'] \cap [j] \neq \varnothing\ \forall\, j \neq i$;

б) $[i'] \cap [i] = [i'] \cap [j'] = \varnothing$ для всех $i = 1, \dots, 5$ и для всех $j \neq i$;

в) ни одна из прямых $[1'], \dots, [5']$ не касается и не лежит на квадрике, проходящей через какие-нибудь 3 другие из этих прямых;

г) существует единственная прямая $[0']$, которая пересекает каждую из $[1'], \dots, [5']$

Указание. Пусть $[0'_1] \neq [1]$ и $[0'_2] \neq [2]$ – прямые, которые пересекают все $[1'], \dots, [5']$, кроме $[1']$ и $[2']$ соответственно; покажите, что они имеют одни и те же точки пересечения p_3, p_4, p_5 с $[3'], [4'], [5']$, которые могут быть восстановлены геометрически, используя только прямые $[3], [4], [5], [3'], [4'], [5']$, и $[0]$.

А4◇8. Покажите, что двойная шестёрка прямых из предыдущей задачи лежит на некоторой гладкой кубической поверхности и объясните, как получить ещё 15 прямых, лежащих на этой же кубике.