Целые расширения колец.

A2◇1°. Пусть $m_1, m_2, \dots, m_r$ порождают модуль M над коммутативным кольцом A, и эндоморфизм $M \xrightarrow{\varphi} M$ переводит m_i в $\sum\limits_j m_j \cdot \varphi_{ji}$, где $(\varphi_{ji}) \in \mathrm{Mat}_r(A)$. Верно ли, что

а) $\varphi(M) \supset \det(\varphi_{ji}) \cdot M$?

б) $\mathfrak{a} \cdot M \neq M$ ни для какого собственного идеала $\mathfrak{a} \subset A$ при условии, что M точен (т. е. $aM = 0 \Rightarrow a = 0$ для $a \in A$).

A2◇2. Покажите, что любое факториальное кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

A2◇3 (лемма Гаусса). Пусть $A \subset B$ — произвольное расширение коммутативных колец. Верно ли, что для целости над A всех коэффициентов произведения двух приведённых многочленов из $B[x]$ необходима и достаточна целость над A всех коэффициентов каждого из сомножителей?

A2◇4. Пусть $d \in \mathbb{Z}$ не делится на квадраты. Опишите целое замыкание $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2 - d)}$.

A2◇5. Снабдим координатную алгебру гиперболы $\Bbbk[\Gamma] = \Bbbk[x,y]/(xy-1)$ структурой алгебры над $\Bbbk[t] = \Bbbk[\mathbb{A}^1]$ при помощи гомоморфизма поднятия[1] $\Bbbk[\mathbb{A}^1] \xrightarrow{\pi_\alpha^*} \Bbbk[\Gamma]$, ассоциированного с параллельной проекцией гиперболы на x-ось $\Gamma \xrightarrow{\pi_\alpha} \mathbb{A}^1$ вдоль вектора $(1,\alpha)$. Выясните, при каких α алгебра $\Bbbk[\Gamma]$ цела над $\Bbbk[t]$.

A2◇6. Цело ли кольцо A над своим подкольцом $B \subset A$, если

а) $A = \Bbbk[x,y]$ (где $\Bbbk$ — поле), $B = \left\{ f \in A \;:\; \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{(0,0)} f = 0 \right\}$;

б) $A = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2)$ (кольцо непрерывных функций), $B = \{ f \in A \mid f(1,0) = f(0,1) \}$;

в) A — любое кольцо с действием конечной группы[2] $\mathfrak{G}$, $B = A^{\mathfrak{G}}$ — подкольцо инвариантов.

A2◇7. Пусть A — нормальное кольцо[3] с полем частных $\mathbb{F}$. Верно ли, что

а) произведение двух приведённых многочленов из $\mathbb{F}[x]$ лежит в $A[x]$ тогда и только тогда, когда оба множителя лежат в $A[x]$?

б) если элемент b какой-либо $\mathbb{F}$-алгебры B цел над A, то его минимальный многочлен над $\mathbb{F}$ лежит в $A[x]$ (т. е. является заодно и уравнением целой зависимости)?

A2◇8. Пусть $B \supset A$ — целое расширение колец. Верно ли, что любой гомоморфизм $A \longrightarrow \Bbbk$ в алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ продолжается до гомоморфизма $B \longrightarrow \Bbbk$?

A2◇9. Покажите, что любое конечно порожденное[4] поле конечно как множество.

[1] напомним, что *гомоморфизм поднятия* $\Bbbk^Y \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk^X$, ассоциированный с отображением множеств $X \xrightarrow{\varphi} Y$, переводит функцию $\left(Y \xrightarrow{f} \Bbbk\right) \in \Bbbk^Y$ в композицию $\left(X \xrightarrow{f\circ\varphi} \Bbbk\right) \in \Bbbk^X$

[2] кольцевыми автоморфизмами

[3] кольцо называется *нормальным*, если в нём нет делителей нуля и оно целозамкнуто в своём поле частных

[4] в абсолютном смысле, т. е. как $\mathbb{Z}$-алгебра с действием $m \cdot a \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m \text{ раз}}$