Коммутативные кольца, идеалы и аффинные многообразия.

Соглашения и обозначения. По умолчанию, слово «кольцо» в этом семестре означает коммутативное кольцо с единицей, а гомоморфизм колец предполагается переводящим единицу в единицу. Подмножество S кольца A называется *мультипликативным*, если $1 \in S$ и $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$. Кольцом частных (или *локализацией*) кольца A по мультипликативному подмножеству $S \subset A$ называется множество $S^{-1}A$ классов формальных дробей вида a/s с $a \in A$, $s \in S$ по отношению эквивалентности

$$a_1/s_1 = a_2/s_2 \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, s \in S : s(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0\ . \tag{1}$$

Радикалом идеала $\mathfrak{a} \subset A$ называется множество $\sqrt{\mathfrak{a}} \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid a^n \in \mathfrak{a}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}\}$. Для идеала $I \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ($\Bbbk$ — поле) через $V(I) = \{p \in \mathbb{A}^n(\Bbbk) \mid f(p) = 0\ \forall\, f \in I\ \}$ мы обозначаем множество его нулей в координатном аффинном пространстве $\mathbb{A}^n(\Bbbk)$, а для заданного подмножества $X \subset \mathbb{A}^n$ мы обозначаем через $I(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0\ \ \forall\, p \in X\ \}$ идеал всех полиномов, тождественно зануляющихся на X. Множества $X \subset \mathbb{A}^n$ вида $V(I)$ называются *аффинными алгебраическими многообразиями* над $\Bbbk$; в этой ситуации фактор алгебра $\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ называется *координатной алгеброй* аффинного многообразия X.

A1◇1°. Убедитесь, что радикал идеала является идеалом.

A1◇2°. Проверьте, что (1) действительно является отношением эквивалентности, а стандартные правила действий с дробями корректно наделяют $S^{-1}A$ структурой коммутативного кольца с единицей, для которой отображение $\lambda_S : A \xrightarrow{a \mapsto a/1} S^{-1}A$ является корректно заданным гомоморфизмом, однозначно определяемым из универсального свойства: для любого гомоморфизма $A \xrightarrow{\psi} B$, переводящего S в множество обратимых элементов кольца B, существует единственный гомоморфизм $A \xrightarrow{\psi_S} S^{-1}A$, такой что $\psi = \psi_S \circ \lambda_S$. Опишите $\ker \lambda_S$.

A1◇3. Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Нельзя ли ли задать то же самое многообразие двумя уравнениями?

A1◇4. Укажите для $J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \Bbbk[x, y]$ какой-нибудь $f \in I(V(J)) \setminus J$.

A1◇5. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$ для
а) $J = (xy, (x - y)z)$ **б)** $J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2)$

A1◇6. Для двух идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ кольца A обозначим через $\mathfrak{ab}$ идеал, порождённый произведениями ab с $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Верно ли что **а°)** произведения ab уже и сами по себе образуют идеал; **б)** $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ **в)** $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, когда $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$.

A1◇7. Из приводимых ниже утверждений про идеалы $I, J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ верные — докажите, неверные — опровергните контрпримерами: **а)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ **б)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$
в) $I = \sqrt{I}$ & $J = \sqrt{J}$ $\Rightarrow$ $IJ = \sqrt{IJ}$

A1◇8 (топология Зарисского). Для аффинного многообразия X и идеала $I \subset \Bbbk[X]$ обозначим через $V(I) \subset X$ множество нулей идеала I на X. Покажите, что
а) множества $V(I)$ образуют систему замкнутых множеств некоторой топологии на X;
б) в этой топологии объединение любого семейства открытых множеств покрывается конечным числом множеств этого семейства (в частности, X *квазикомпактно*).

A1◇9. Какие из перечисленных ниже колец нётеровы? **а)** $A[[t]]$, где A нётерово;
б) $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, сходящиеся всюду в $\mathbb{C}$; **в)** $\{p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z) \mid q(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1\}$;
г) $\{f \in \mathbb{C}[x, y] \mid \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f = 0$ при $0 \leqslant i + j \leqslant n\}$ ($n \in \mathbb{N}$ фиксировано).
д*) произвольная подалгебра $A \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ конечной коразмерности[1].

[1]как векторное пространство над полем $\Bbbk$