§4. Прямые на поверхностях.

4.1. Многообразие прямых, лежащих на поверхностях заданной степени. Мы хотим изучить множество прямых, лежащих на данной поверхности $S \subset \mathbb{P}_3$ заданной степени d.

Упражнение 4.1. Опишите это множество для $d = 2$, т. е. когда S — квадрика (рассмотрите все возможные значения для $\operatorname{rk} S$).

Для произвольного заданного d множество всех поверхностей степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ представляет собою проективное пространство $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$. Множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ представляет собою грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4) = \mathrm{Gr}(2,V)$, который можно отождествить с квадрикой Плюккера $Q_P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Обозначим через

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{\, (S,\ell) \in \mathbb{P}_N \times Q_P \mid \ell \subset S \,\} \subset \mathbb{P}_N \times Q_P$$

множество инцидентности между прямыми и поверхностями.

4.1.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Γ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_N \times Q_P$.*

Доказательство. Линейная оболочка векторов $u, w \in V$ является образом (удвоенного) отображения свёртки $V^* \longrightarrow V$, переводящего $\xi \in V^*$ в $\partial_\xi(u \wedge w) = \langle\, \xi,\ u \otimes w - w \otimes u \,\rangle$. Поэтому прямая $\ell = (uw)$ лежит на поверхности S, заданной уравнением $F = 0$, тогда и только тогда, когда $F\,(\partial_\xi(u \wedge w)) = 0$ тождественно по $\xi \in V^*$. Пусть векторы e_ν образуют базис в V. Обозначим через ξ_ν координаты ковектора ξ в двойственном базисе пространства V^*, и пусть $u = \sum u_i e_i$, $v = \sum v_i e_i$. Тогда $u \wedge w = \sum\limits_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu}\, e_\mu \wedge e_\nu$, где $p_{\mu\nu} = -p_{\nu\mu} = (u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu)$ суть плюккеровы координаты на $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, и

$$\partial_\xi(u \wedge w) = \sum_\eta \sum_{\mu \neq \nu} \xi_\eta p_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial e_\eta}\,(e_\mu \wedge e_\nu) = \sum_\nu \Big(\sum_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu}\xi_\mu\Big) \cdot e_\nu\ .$$

Подставим $x_\nu = \sum\limits_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu}\xi_\mu$ в $F(x)$ и разложим результат по степеням ξ. Условие $F\,(\partial_\xi(u \wedge w)) \equiv 0$ означает, что все коэффициенты этого разложения равны нулю, что и даёт явную систему полиномиальных уравнений на коэффициенты F и плюккеровы координаты p_{ij}, описывающую $\Gamma \subset Q_P$ как замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$. □

4.1.2. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Проекция $\Gamma \xrightarrow{\pi_2} Q_P$ сюръективна, все её слои являются проективными пространствами размерности $\frac{1}{6}\,d(d+1)(d+5) - 1$, и, тем самым, Γ является неприводимым проективным многообразием размерности $\frac{1}{6}\,d(d+1)(d+5) + 3$.*

Доказательство. Пусть прямая $\ell \subset \mathbb{P}(V)$ задана уравнениями $x_0 = x_1 = 0$. Тогда $S \supset \ell$, если и только если S задаётся уравнением вида $x_2 \cdot F_2(x) + x_3 \cdot F_3(x) = 0$, в котором $F_2, F_3 \in S^{d-1}V^*$. Такие уравнения образуют векторное пространство W, являющееся образом линейного оператора

$$S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \xrightarrow{\ (f,g) \mapsto x_2 f + x_3 g\ } S^d V^*\ ,$$

ядро которого состоит из всех (f,g) таких, что $x_2 f = -x_3 g$, т. е. $f = x_3 h$, $g = -x_2 h$ для некоторого $h \in S^{d-2}V^*$. Таким образом, ядро изоморфно $S^{d-2}V^*$, и

$$\dim W = 2\,\dim(S^{d-1}V^*) - \dim(S^{d-1}V^*) = \frac{1}{6}\Big(\,2\,d(d+1)(d+2) - (d-1)d(d+1)\,\Big) = \frac{1}{6}\,d(d+1)(d+5)\ .$$

Неприводимость Γ вытекает из n° 3.6.13, а $\dim \Gamma$ вычисляется по n° 3.6.10. □

4.1.3. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Общая[1] поверхность $S_d \subset \mathbb{P}_3$ степени $d \geqslant 4$ не содержит прямых.*

Доказательство. Множество всех поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую, совпадает с образом проекции $\Gamma \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}_N$. По следствию n° 3.5.3 этот образ является замкнутым неприводимым подмногообразием в $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$. По теореме n° 3.6.10, его размерность пучается вычитанием из $\dim \Gamma$ минимума

[1] т. е. любая из некоторого плотного по Зарисскому открытого подмножества в пространстве всех гиперповерхностей

размерностей непустых слоев проекции π_1. В частности, когда $\dim\Gamma < N$, образ заведомо является собственным подмногообразием. В развёрнутом виде последнее неравенство выглядит как

$$\frac{1}{6}\,d(d+1)(d+5)+3 < \frac{1}{6}\,(d+1)(d+2)(d+3)\,, \tag{4-1}$$

и выполняется для всех $d \geqslant 4$. □

4.1.4. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каждая кубическая поверхность $S_3 \subset \mathbb{P}_3$ содержит хотя бы одну прямую, причём для общей кубики множество лежащих на ней прямых конечно.*

Доказательство. При $d = 3$ неравенство (4-1) превращается в равенство: в этом случае $\dim\Gamma = N = 19$. Чтобы доказать сюръективность проекции π_1, достаточно указать хоть один её непустой нульмерный слой — тогда неприводимое замкнутое подмногообразие $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_{19}$ будет 19-мерным, а стало быть, совпадёт со всем $\mathbb{P}_{19}$.

Выясним, например, какие прямые лежат на проективном замыкании кубики C с аффинным уравнением $xyz = 1$. В рассматриваемой аффинной части прямых вообще нет, поскольку прямая с параметрическим уравнением $x = x_0 + \alpha\,t$, $y = y_0 + \beta\,t$, $z = z_0 + \gamma\,t$ лежит на C , если и только если

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha\beta z_0 + \beta\gamma x_0 + \gamma\alpha y_0 = 0 \\ \alpha y_0 z_0 + \beta x_0 z_0 + \gamma x_0 y_0 = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases}$$

что невозможно[2]. На бесконечности C задаётся уравнением[3] $x_1x_2x_3 = 0$, т. е. является объединением трёх прямых $x_i = x_0 = 0$ $(i = 1,\,2,\,3)$. □

Упражнение 4.2. Найдите все прямые на кубике Ферма C_F, заданной однородным уравнением $\sum x_i^3 = 0$.

Указание. C_F инвариантна относительно перестановок координат; с точностью до такой перестановки, пара линейных уравнений, задающих прямую $\ell \subset C_F$, приводится методом Гаусса к $x_0 = \alpha x_2 + \beta x_3$, $x_1 = \gamma x_2 + \delta x_3$; подставьте эти значения в уравнение кубики, покажите, что $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, а затем найдите их...

4.2. Условие гладкости. Прямая $\ell \subset \mathbb{P}_n$ называется *касательной* к проективному многообразию $X \subset \mathbb{P}_n$ в точке $p \in X$, если $p \in \ell$ и либо $\ell \subset X$ целиком лежит на X, либо точка p является *кратной точкой* пересечения $\ell \cap X$. Последнее означает, что точка p является кратным корнем для всех однородных форм от двух переменных, которые получаются ограничением на проективную прямую $\ell = \mathbb{P}_1$ уравнений, задающих X.

В частности, если $X = V(f) \subset \mathbb{P}_n$ является гиперповерхностью степени d с уравнением $f(x) = 0$, $p \in X$, а $q \in \mathbb{P}_n$ — произвольная точка, то условие касания прямой $\ell = (pq)$ с X в точке p означает, что однородный многочлен[4] $f(\vartheta_0 p + \vartheta_1 q) \in \Bbbk[\vartheta_0, \vartheta_1]$ делится на ϑ_0^2. По формуле Ньютона – Тейлора[5] $f(\vartheta_0 p + \vartheta_1 q) = \sum\limits_{i+j=d} f_{i,j}(p,q)\cdot \vartheta_0^i \vartheta_1^j$, где коэффициент[6]

$$f_{i,j}(p,q) = \binom{d}{i}\,\widetilde{f}(\underbrace{p,\ldots,p}_{i},\underbrace{q,\ldots,q}_{j}) = \frac{1}{i!}\,\partial_p^i f(q) = \frac{1}{j!}\,\partial_q^j f(p) \tag{4-2}$$

является биоднородным полиномом от (p,q) степени i по p и степени j по q. Поскольку $f_{d,0}(p,q) = f(p) = 0$, $f(\vartheta_0 p + \vartheta_1 q)$ делится на ϑ_0^2 тогда и только тогда, когда $f_{d-1,1}(p,q) = 0$. В левой части этого равенства стоит линейная форма от q, имеющая в координатах вид

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\cdot q_i = 0\,.$$

[2] скажем, $\alpha = 0 \Rightarrow (\beta = 0$ или $\gamma = 0) \Rightarrow \beta = \gamma = 0$

[3] мы подставили $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$, $z = x_3/x_0$, домножили на x_0^3 и положили $x_0 = 0$

[4] он получается из f подстановкой $x = \vartheta_0 p + \vartheta_1 q$

[5] см. лекцию про тензоры и полную поляризацию многочленов из курса линейной алгебры («Алгебра-2»); напомню, что через $\widetilde{f} \in \mathrm{Sym}^d V^* \subset V^{*\otimes d}$ мы обозначили *полную поляризацию* многочлена $f \in S^d V^*$, т. е. единственную симметричную полилинейную форму от d аргументов из V, такую что $\widetilde{f}(x,\ldots,x) = f(x)$

[6] в формуле (4-2) $\partial_p^i f = \partial_p\partial_p\cdots\partial_p f$ есть результат i-кратного дифференцирования f в направлении p, и аналогично для $\partial_q^j f$

Если эта форма нетривиальна, т. е. не все частные производные от f зануляются в точке p, поверхность $V(f)$ называется *гладкой* в точке p. В противном случае поверхность называется *особой* в точке p. Неособость геометрически означает, что множество точек q для которых прямая (pq) касается поверхности в точке p, является проективным подпространством коразмерности 1. Это пространство называется *геометрическим касательным пространством* к $X = V(f)$ в точке p и обозначается T_pX. Напротив, особость точки p означает, что *любая* проходящая через p прямая пересекает $V(f)$ в p с кратностью $\geqslant 2$, т. е. является касательной. Поверхность, все точки которой гладкие, называется *гладкой*.

4.3. Прямые на гладкой кубике. Рассмотрим гладкую кубическую поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$, заданную уравнением $F(x) = 0$.

4.3.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Всякое приводимое плоское сечение S распадается либо в объединение прямой и гладкой коники, либо в объединение трёх различных прямых.*

Доказательство. Покажем, что плоское сечение $\pi \cap S$ не может содержать двойную прямую. Если такая двойная прямая $\ell \subset \pi \cap S$ имеется, возьмем координаты, в которых плоскость π задаётся уравнением $x_2 = 0$, а ℓ — уравнениями $x_2 = x_3 = 0$. Тогда $F(x) = x_2Q(x) + x_3^2L(x) = 0$ с линейным L и квадратичным Q. Прямая ℓ пересекается с квадрикой $Q(x) = 0$ в некоторой точке a. Тогда $x_2(a) = x_3(a) = Q(a) = 0$ и все частные производные $\partial F/\partial x_i$ равны нулю в точке a, т. е. S особа в a. □

4.3.2. СЛЕДСТВИЕ. *В одной точке поверхности S может пересекаться не более трёх лежащих на S прямых, причём все они должны находиться в одной плоскости.*

Доказательство. Все проходящие через $p \in S$ прямые, лежащие на S, принадлежат $S \cap T_pS$. □

4.3.3. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для данной прямой $\ell \subset S$ существуют ровно 5 различных плоскостей $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_5$, содержащих ℓ и пересекающих S по тройке прямых. Более того, если $\pi_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell'_i$, то $\ell_i \cap \ell_j = \ell_i \cap \ell'_j = \ell'_i \cap \ell'_j = \varnothing \ \forall\ i \neq j$ (в частности, на S есть скрещивающиеся прямые) и любая лежащая на S прямая, скрещивающаяся с ℓ, при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ'_i.*

Доказательство. Фиксируем базис $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ в V так, что прямая $\ell = (e_0e_1)$ (заданная уравнениями $x_2 = x_3 = 0$) лежит на S. Тогда уравнение $F(x) = 0$, задающее S, имеет в этом базисе вид

$$L_{00}(x_2, x_3) \cdot x_0^2 + 2\,L_{01}(x_2, x_3) \cdot x_0x_1 + L_{11}(x_2, x_3) \cdot x_1^2 + \\ + 2\,Q_0(x_2, x_3) \cdot x_0 + 2\,Q_1(x_2, x_3) \cdot x_1 + R(x_2, x_3) = 0\,, \quad (4\text{-}3)$$

где $L_{ij}, Q_\nu, R \in k[x_2, x_3]$ являются однородными многочленами степени $1, 2, 3$ соответственно. Запараметризуем пучок плоскостей, проходящих через ℓ, точками $e_\vartheta = \vartheta_2e_2 + \vartheta_3e_3 \in (e_2e_3)$ и рассмотрим в плоскости $\pi_\vartheta = (e_0e_1e_\vartheta)$ однородные координаты $(t_0 : t_1 : t_2)$ относительно этих трёх точек. Уравнение плоской коники $(\pi_\vartheta \cap S) \setminus \ell$ получается подстановкой $x = (t_0 : t_1 : \vartheta_2t_2 : \vartheta_3t_2)$ в уравнение (4-3) с последующим сокращением на общий множитель t_2. Матрица Грама этой коники в координатах $(t_0 : t_1 : t_2)$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} L_{00}(\vartheta) & L_{01}(\vartheta) & Q_0(\vartheta) \\ L_{01}(\vartheta) & L_{11}(\vartheta) & Q_1(\vartheta) \\ Q_0(\vartheta) & Q_1(\vartheta) & R(\vartheta) \end{pmatrix}$$

а её определитель

$$D(\vartheta_2, \vartheta_3) = L_{00}(\vartheta)L_{11}(\vartheta)R(\vartheta) + 2\,L_{01}(\vartheta)Q_0(\vartheta)Q_1(\vartheta) - \\ - L_{11}(\vartheta)Q_0^2(\vartheta) - L_{00}(\vartheta)Q_1^2(\vartheta) - L_{01}(\vartheta)^2R(\vartheta) \in k[\vartheta_2, \vartheta_3] \quad (4\text{-}4)$$

является однородным многочленом от $\vartheta = (\vartheta_2 : \vartheta_3)$ степени 5, и стало быть, обращается в нуль в пяти точках, учтённых с кратностями. Мы должны показать, что все эти кратности равны единице.

Каждый нуль детерминанта (4-4) соответствует вырождению коники в пару прямых, точка пересечения которых лежит либо на ℓ, либо вне ℓ.

В первом случае мы выберем базис так, чтобы эти две прямые были $\ell' = (e_0e_2)$ и $\ell'' = \big(e_0\,(e_1 + e_2)\big)$ с уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = (x_1 - x_2) = 0$. Такое вырождение отвечает корню $\vartheta = (1 : 0)$ уравнения

$D(\vartheta_2, \vartheta_3) = 0$, и кратность этого корня равна наибольшей степени ϑ_3, на которую делится $D(\vartheta_2, \vartheta_3)$. Поскольку $\ell, \ell', \ell'' \subset S$, уравнение (4-3) принимает вид

$$x_1 x_2 (x_1 - x_2) + x_3 \cdot q(x) = 0$$

с квадратичным $q(x)$, и единственными элементами G, не делящимися на ϑ_3, могут быть лишь $L_{11} \equiv x_2 \pmod{\vartheta_3}$ и $Q_1 \equiv -x_2^2/2 \pmod{\vartheta_3}$. Таким образом, $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{00} Q_1^2 \pmod{\vartheta_3^2}$, и этот член имеет порядок 1 по ϑ_3, если и только если мономы $x_1 x_2^2$ и $x_0^2 x_2$ входят в (4-3) с ненулевыми коэффициентами. Но это действительно так, поскольку первый из них — это единственный моном, который вносит ненулевой вклад в $\partial F/\partial x_1$ в точке $e_2 \in S$, а второй — это единственный моном, который вносит ненулевой вклад в $\partial F/\partial x_2$ в точке $e_0 \in S$.

Во втором случае мы выберем базис так, чтобы $\ell' = (e_0 e_2)$, $\ell'' = (e_1 e_2)$ задавались уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = x_0 = 0$. Этому вырождению отвечает тот же самый корень $\vartheta = (1 : 0)$. Теперь (4-3) имеет вид $x_0 x_1 x_2 + x_3 \cdot q(x) = 0$ и ненулевым по модулю ϑ_3 элементом G является только $L_{01} \equiv x_2/2 \pmod{\vartheta_3}$. Таким образом, $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{01}^2 R \pmod{\vartheta_3^2}$ имеет порядок 1 по ϑ_3, если и только если мономы $x_2^2 x_3$ и $x_0 x_1 x_2$ действительно присутствуют в (4-3). Но если бы второй моном не входил в F, то F делится бы на x_3 и кубика была бы приводима (а значит, особа). А первый моном — это единственный моном, дающий ненулевой вклад в $\partial F/\partial x_3$, вычисленную в точке $e_2 \in S$.

Остающиеся утверждения о пересечениях прямых сразу следуют из следствия n° 4.3.2, утверждения n° 4.3.1 и замечания, что каждая прямая в $\mathbb{P}_3$ пересекает любую плоскость. □

4.3.4. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Ни через какие четыре попарно скрещивающиеся лежащие на S прямые нельзя провести квадрику, но для любой такой четвёрки всегда найдётся одна или две (но не более!) прямые, лежащие на S и пересекающие каждую прямую из четвёрки.*

Доказательство. Если четыре попарно скрещивающиеся прямые на S лежат на квадрике, то это — гладкая квадрика Сегре, заметаемая двумя семействами прямолинейных образующих, и наша четвёрка прямых находится в одном из этих семейств[7]. Но тогда все прямые другого семейства (а стало быть, и сама квадрика) лежат на S, ибо всякая прямая, проходящая через 4 различных точки S, лежит на S целиком. Тем самым, поверхность S приводима, и значит, особа. □

4.4. Конфигурация 27 прямых. Зафиксируем на S пару скрещивающихся прямых $a, b \subset S$ и построим 5 пар прямых ℓ_i, ℓ_i' причём в каждой паре обозначим через ℓ_i ту прямую, которая пересекает b, а через ℓ_i' — ту, которая скрещивается с b. Далее, обозначим через ℓ_i'' ещё 5 прямых, образующих вместе с прямыми ℓ_i пять пар прямых, ассоциированных согласно утверждению из n° 4.3.3 с $\ell = b$. Таким образом, каждая из прямых ℓ_i'' пересекается с b, но скрещивается с a и со всеми ℓ_j с $j \neq i$, и стало быть, пересекает все ℓ_j' с $j \neq i$.

Любая прямая $c \subset S$, отличная от 17 только что названных, скрещивается и с a, и с b, но при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ_i'. Из утверждения n° 4.3.4 вытекает, что все лежащие на S прямые, пересекающие $\geqslant 4$ прямых ℓ_i, исчерпываются парой прямых a, b. С другой стороны, если лежащая на S прямая c пересекает $\leqslant 2$ прямых ℓ_i, то с точностью до перестановки индексов, мы можем считать, что она пересекает три прямые ℓ_1', ℓ_2', ℓ_3' и ещё либо прямую ℓ_4', либо ℓ_5. В обоих случаях из утверждения n° 4.3.4 вытекает, что c — это одна из двух прямых a, ℓ_5''.

Итак, всякая лежащая на S прямая c, отличная от 17 прямых a, b, ℓ_i, ℓ_i', ℓ_i'', пересекает в точности 3 прямые ℓ_i. Покажем, что на S имеется ровно 10 таких прямых, взаимно однозначно соответствующих $\binom{5}{3} = 10$ тройкам $\{i < j < k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Действительно, для каждой тройки прямых ℓ_i имеется самое большее одна прямая c, отличная от a, и пересекающая заданные три прямые ℓ_i и оставшиеся прямые ℓ_j' (поскольку все 5 попарно скрещиваются). С другой стороны, по утверждению n° 4.3.3, для каждого i на S лежит ровно 10 прямых, пересекающих ℓ_i — это 4 прямых a, b, ℓ_i' и ℓ_i'', а оставшиеся 6 должны, как мы знаем, пересекать ещё ровно две из оставшихся четырех прямых ℓ_j. Но таких пар и имеется ровно $\binom{4}{2} = 6$, что и приводит к требуемому взаимно однозначному соответствию между прямыми c и тройками (i, j, k).

[7] см. лекцию о проективных квадриках из курса линейной алгебры («Алгебра – 2»)

4.4.1. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каждая гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ содержит ровно 27 прямых, причём комбинаторика их попарных пересечений на всех S одинакова.* □

Упражнение 4.3. Найдите порядок подгруппы $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}_{27}$, состоящей из всех перестановок 27 прямых, сохраняющих все их попарные пересечения. (ответ: $|\mathfrak{G}| = 51\,840 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$)

Упражнение 4.4*. Рассмотрим поле из 4 элементов: $\mathbb{F}_4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_2[\omega]/(\omega^2+\omega+1)$, где $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Подобно расширению $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, расширение $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4$ обладает автоморфизмом сопряжения: $z \longmapsto \overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} z^2$, который оставляет на месте подполе $\mathbb{F}_2$ и переставляет друг с другом пару корней многочлена $\omega^2+\omega+1$. Покажите, что проективная унитарная группа[8] $\mathbb{P}\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4)$ канонически вкладывается в группу $\mathfrak{G}$ из упр. 4.3 как (нормальная) подгруппа индекса 2.

Указание. Группа $\mathbb{P}\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4)$ сохраняет кубику Ферма C_F из упр. 4.2, поскольку кубическая форма Ферма над $\mathbb{F}_4$ превращается в эрмитову форму $\sum x_i\overline{x}_i$.

[8] т. е. фактор группы матриц $M \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{F}_4)$, таких что $\overline{M}M^t = E$, по подгруппе скалярных матриц