§2. Аффинный алгебро-геометрический словарик.

На протяжении этого параграфа мы предполагаем, что основное поле $\Bbbk$ *является алгебраически замкнутым.*

2.1. Аффинные алгебраические многообразия. Как мы уже упоминали в n° 1.5, *аффинным алгебраическим многообразием* называется подмножество $X \subset \mathbb{A}^n$, которое задаётся системой полиномиальных уравнений $f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. При этом без ограничения общности можно считать, что система уравнений образует конечно порождённый идеал $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, и в этом случае мы пишем $X = V(J)$. Аффинные алгебраические многообразия образуют категорию $\mathscr{A}\!\!f\!f(\Bbbk)$, морфизмами в которой являются теоретико множественные отображения

$$\mathbb{A}^n \supset X \xrightarrow{\varphi} Y \subset \mathbb{A}^m , \tag{2-1}$$

задаваемые полиномиальными функциями, т. е. переводящие точку $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ в точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y$, координаты которой $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ суть некоторые многочлены $\varphi_i \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Такие отображения называются *регулярными*. Мы собираемся показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ категория $\mathscr{A}\!\!f\!f(\Bbbk)$ антивалентна категории $\mathscr{A}\!lg(\Bbbk)$ конечно порождённых приведённых[1] $\Bbbk$-алгебр с единицей (и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу). Квазиобратные друг другу антиэквивалентности между $\mathscr{A}\!\!f\!f(\Bbbk)$ и $\mathscr{A}\!lg(\Bbbk)$ задаются представимыми контравариантными функторами

$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\!\!f\!f(\Bbbk)}(X, \mathbb{A}^1) , \tag{2-2}$$

$$A \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\!lg(\Bbbk)}(A, \Bbbk) , \tag{2-3}$$

где объект $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$ в первом случае рассматривается как многообразие (аффинная прямая), а во втором — как $\Bbbk$-алгебра. То обстоятельство, что объект $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$ несёт на себе сразу обе структуры — и алгебраического многообразия над $\Bbbk$, и $\Bbbk$-алгебры — позволяет наделить множество $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\!\!f\!f(\Bbbk)}(X, \mathbb{A}^1)$ из (2-2) (канонической) структурой $\Bbbk$-алгебры, а множество $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\!lg(\Bbbk)}(A, \Bbbk)$ из (2-3) — (неканонической) структурой алгебраического многообразия.

2.1.1. Координатная алгебра. Регулярные отображения из данного аффинного многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинную прямую $\mathbb{A}^1 \simeq \Bbbk$ или, что то же самое, полиномиальные функции на $X \xrightarrow{f} \Bbbk$ образуют конечно порождённую коммутативную приведённую $\Bbbk$-подалгебру

$$\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}\!\!f\!f(\Bbbk)}(X, \Bbbk) \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) ,$$

(где $I(X) \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ есть идеал всех полиномов, тождественно зануляющихся на X) в алгебре $\Bbbk^X$ всех $\Bbbk$-значных функций на X. Эта подалгебра называется *координатной алгеброй* (или *алгеброй регулярных функций*) аффинного алгебраического многообразия X.

2.1.2. ЛЕММА. *Всякая конечно порожденная приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ является координатной алгеброй $A = \Bbbk[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X.*

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактор алгебры $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры A означает, что (для любого $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$) $f^n \in I \Rightarrow f \in I$. Иными словами, идеал соотношений I радикален: $I = \sqrt{I}$ и, по сильной теореме о нулях, $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$. □

2.1.3. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан *гомоморфизм вычисления*

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \xrightarrow{f \mapsto f(p)} \Bbbk .$$

[1] коммутативное кольцо A называется *приведенным*, если в нём нет нильпотентов, т. е. $a^n = 0 \Rightarrow a = 0$

Он эпиморфен (поскольку он переводит единицу в единицу) и, стало быть, представляет собой факторицацию

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \xrightarrow{f \mapsto f \pmod{\mathfrak{m}_p}} \frac{\Bbbk[X]}{\mathfrak{m}_p} = \Bbbk$$

по своему ядру $\mathfrak{m}_p \overset{\text{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\}) = \{f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0\}$, которое является максимальным идеалом в $\Bbbk[X]$ и называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$. Множество всех максимальных идеалов данной $\Bbbk$-алгебры A называется *максимальным спектром* и обозначается $\mathrm{Spec_m}\,(A)$. Каждой точке спектра $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec_m}\, A$ отвечает гомоморфизм вычисления

$$\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}} : A \xrightarrow{a \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}} A/\mathfrak{m} ,$$

принимающий значения в поле $A/\mathfrak{m} \supset \Bbbk$, которое конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ это влечёт за собой равенство $A/\mathfrak{m} = \Bbbk$ (см. n° 1.3.1 – n° 1.3.2), что позволяет интерпретировать элементы алгебры A как функции на $\mathrm{Spec_m}\, A$ со значениями в поле $\Bbbk$.

2.1.4. ЛЕММА. *Для любого аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ соответствия $p \longleftrightarrow \mathrm{ev}_p \longleftrightarrow \mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия X, гомоморфизмами $\Bbbk[X] \longrightarrow \Bbbk$, тождественными на $\Bbbk$, и максимальными идеалами алгебры $\Bbbk[X]$.*

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше[2]. Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\})$ вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$ всегда (в том числе, над не замкнутым полем) можно указать аффинно линейную функция $\mathbb{A}^n \xrightarrow{f} \Bbbk$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q. Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, рассмотрим полный прообраз $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеала $\mathfrak{m}$. Поскольку $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{m}} = \Bbbk[X]/\mathfrak{m} = \Bbbk$, идеал $\widetilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях $V(\widetilde{\mathfrak{m}}) \neq \varnothing$, т. е. $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_p$ для некоторой точки $p \in \mathbb{A}^n$, причём $p \in X$ (поскольку $I(X) \subset \widetilde{\mathfrak{m}}$), а значит $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$ (поскольку $\mathfrak{m}$ максимален). □

2.1.5. Гомоморфизмы поднятия. Предыдущие две леммы показывают, что любая приведённая $\Bbbk$-алгебра A имеет вид $\mathrm{Hom}_{\mathscr{Aff}(\Bbbk)}(X, \Bbbk)$ для некоторого аффинного алгебраического многообразия X, причём при применении к такой алгебре функтора $\mathrm{Hom}_{\mathscr{Alg}(\Bbbk)}(\,*\,, \Bbbk)$ мы получаем в точности множество точек многообразия X.

Согласно упр. 6.8 из n° 6.3.1 записок курса «Алгебра – 3», для доказательства того, что функтор (2-2) задаёт антиэквивалентность категорий, нам остаётся убедиться в том, что он является вполне строгим, т. е. проверить, что он биективно отображает регулярные морфизмы алгебраических многообразий в гомоморфизмы их координатных алгебр.

Напомним, что со всяким отображением множеств $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$ связан *гомоморфизм поднятия* из алгебры всех $\Bbbk$-значных функций на M_2 в алгебру всех $\Bbbk$-значных функций на M_1

$$\varphi^* : \Bbbk^{M_2} \xrightarrow{f \mapsto f \circ \varphi} \Bbbk^{M_1} , \tag{2-4}$$

переводящий функцию $M_2 \xrightarrow{f} \Bbbk$ в композицию $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{f} \Bbbk$. Гомоморфизм поднятия, отвечающий регулярному морфизму алгебраических многообразий

$$\mathbb{A}^n \supset X \xrightarrow{\varphi} Y \subset \mathbb{A}^m ,$$

[2]отметим, что сопоставление $\varphi \mapsto \ker\varphi$ и над *произвольным* (не обязательно алгебраически замкнутым) полем $\Bbbk$ вкладывает множество гомоморфизмов $A \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$, тождественных на $\Bbbk$, в множество максимальных идеалов алгебры A; однако, над незамкнутым полем *не все* максимальные идеалы в A являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в поле $\Bbbk$; например, ядро гомоморфизма вычисления $\mathrm{ev}_{\sqrt{-1}} : \mathbb{R}[x] \xrightarrow{f \mapsto f(\sqrt{-1})} \mathbb{C}$ является максимальным идеалом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, поскольку $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \ker \mathrm{ev}_{\sqrt{-1}} = 2$

переводит регулярные функции на Y в регулярные функции на X, т. е. корректно определяет гомоморфизм алгебр $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk[X]$. В самом деле, если точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ переходит в точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y$, координаты которой $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ суть многочлены $\varphi_i \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, то $\varphi^*(y_i) = \varphi_i \pmod{I(X)} \in \Bbbk[X]$.

Упражнение 2.1. Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических пространств (соотв. гладких многообразий) $X \longrightarrow Y$ является непрерывным (соотв. гладким) тогда и только тогда, когда его гомоморфизм поднятия переводит алгебру непрерывных функций $C^0(Y)$ в алгебру непрерывных функций $C^0(X)$ (соотв. алгебру гладких функций $C^\infty(Y)$ в алгебру гладких функций $C^\infty(X)$).

Наоборот, всякому гомоморфизму алгебр $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\psi} \Bbbk[X]$ отвечает морфизм поднятия

$$X = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X] \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Spec_m} \Bbbk[Y] = Y\,,$$

который сопоставляет гомоморфизму вычисления $\Bbbk[X] \xrightarrow{\text{ev}} \Bbbk$ с ядром $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X]$ гомоморфизм вычисления $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\psi} \Bbbk[X] \xrightarrow{\text{ev}} \Bbbk$ с ядром $\psi^*\mathfrak{m} == \psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X]$.

Упражнение 2.2. Убедитесь, что соответствия $\operatorname{Hom}_{\mathscr{Aff}(\Bbbk)}(X, Y) \overset{\varphi \leftrightarrow \varphi^*}{\rightleftarrows} \operatorname{Hom}_{\mathscr{Alg}(\Bbbk)}(\Bbbk[Y], \Bbbk[X])$ являются взаимно обратными биекциями (т. е. что $\varphi^{**} = \varphi$).

Итак, функтор (2-2), сопоставляющий аффинному алгебраическому многообразию его координатную алгебру является вполне строгим, и задаёт эквивалентность категорий. Отметим, что при этой эквивалентности само поле $\Bbbk$, рассматриваемое как алгебра, отвечает одноточечному многообразию $* = \operatorname{Spec_m} \Bbbk$, т. е. $\Bbbk = \Bbbk[*]$. Таким образом, каждый гомоморфизм вычисления $\Bbbk[X] \xrightarrow{\text{ev}_p} \Bbbk$ можно воспринимать как гомоморфизм поднятия, отвечающий регулярному отображению $* \xrightarrow{\text{ev}_p^*} X$, образом которого является точка p, и из упр. 2.2 мы ещё раз получаем равенство $\operatorname{Spec_m} X = \operatorname{Hom}_{\mathscr{Aff}(\Bbbk)}(\,*\,, X) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{Alg}(\Bbbk)}(\Bbbk[X], \Bbbk)$.

Отметим, что на множестве $\operatorname{Spec_m}(A)$ имеется много структур аффинного алгебраического многообразия, понимаемых как вложение $\operatorname{Spec_m}(A) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^n$ образом которого является аффинное многообразие X, а гомоморфизм поднятия $\Bbbk[X] \underset{\sim}{\xrightarrow{A}}$ отождествляет координатную алгебру $\Bbbk[X]$ с алгеброй A. Выбор такой структуры равносилен выбору конкретного способа задания алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. В частности, для того чтобы превратить (2-3) в функтор, принимающий значения в категории аффинных алгебраических многообразий, а не в категории множеств, мы должны (как в n° 6.3.1 записок курса «Алгебра – 3») произвольным образом зафиксировать для каждой алгебры A такое представление и наделить $\operatorname{Spec_m} A$ структурой многообразия, индуцированной биекцией $\operatorname{Spec_m} A \simeq V(I) \subset \mathbb{A}^n$.

Упражнение 2.3. Следуя упр. 6.8 из n° 6.3.1 записок курса «Алгебра – 3», сделайте формальную проверку того, что доопределённый только что описанным способом функтор (2-3) будет квазиобратен к (2-2).

2.1.6. Пример: прямая и гипербола. Точки спектра $\operatorname{Spec_m} \Bbbk[t]$ биективно соответствуют точкам аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$, поскольку всякий гомоморфизм вычисления $\Bbbk[t] \xrightarrow{\text{ev}} \Bbbk$ однозначно определяется заданием образа $\text{ev}(t) = \lambda \in \Bbbk$ (а всякий максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[t]$ — это главный идеал вида $((t - \lambda)))$. Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана $\operatorname{Spec_m} \Bbbk[t, t^{-1}]$ отождествляется с дополнением до нуля $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \Bbbk^*$, поскольку $\lambda = \text{ev}(t) = 1/(\text{ev}(t^{-1})$ теперь должно быть обратимым элементом поля $\Bbbk$. С другой стороны, задавая алгебру полиномов Лорана образующими и соотношениями посредством изоморфизма

$$\varphi : \frac{\Bbbk[x, y]}{(xy - 1)} \underset{\sim}{\xrightarrow{(x,y) \mapsto (t, t^{-1})}} \Bbbk[t, t^{-1}]$$

мы реализуем это же многообразие в виде гиперболы $xy = 1$ в $\mathbb{A}^2$.

2.1.7. Отступление: геометрические схемы. Максимальный спектр $\operatorname{Spec_m} A$ определён для любой, в том числе не обязательно приведённой $\Bbbk$-алгебры A. При этом каждый элемент $a \in A$ можно интерпретировать как функцию на $\operatorname{Spec_m} A$, значение которой в точке $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec_m} A$

равно $a\,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}) \in A/\mathfrak{m} = \Bbbk$ (над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$), что задаёт гомоморфизм $A \longrightarrow \Bbbk^{\mathrm{Spec_m}\,A}$ из алгебры A в алгебру $\Bbbk$-значных функций на спектре. Поскольку в $\Bbbk$ нет нильпотентов, все нильпотентны алгебры A при этом гомоморфизме переходят в тождественно нулевые функции.

Так как равенства $a^n = b^m = 0$ влекут равенство $(a-b)^{m+n-1} = 0$, множество нильпотентных элементов алгебры A образует идеал

$$\mathfrak{n}(A) \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}\ , \tag{2-5}$$

который называется *нильрадикалом* алгебры A. Предыдущее рассуждение показывает, что нильрадикал содержится в пересечении всех максимальных идеалов этой алгебры A и $\mathrm{Spec}_m A = \mathrm{Spec_{m\,red}}$, где алгебра

$$A_{\text{red}} \overset{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)\ .$$

является редуцированной. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то пересечение всех максимальных идеалов в A_{red} нулевое, ибо оно состоит из функций, тождественно обращающихся в нуль на аффинном алгебраическом многообразии $X = \mathrm{Spec_m}\,A_{\text{red}}$. Таким образом, пересечение всех максимальных идеалов в A совпадает в этом случае с $\mathfrak{n}(A)$.

Упражнение 2.4*. Покажите, что нильрадикал произвольного коммутативного кольца совпадает с пересечением всех простых идеалов этого кольца.

Пара $(A, \mathrm{Spec_m}\,A)$, где A — произвольная (не обязательно приведённая) конечно порожденная алгебра над алгебраически замкнутым полем, называется *аффинной геометрической схемой*. Интуитивно, геометрическая схема — это аффинное алгебраическое множество $X = \mathrm{Spec_m}\,A_{\text{red}}$, кольцо регулярных функций которого расширено при помощи идеала нильпотентов, которые кодируют те или иные «инфинитезимальные» геометрические характеристики X.

2.1.8. Пример: пересечение аффинных алгебраических множеств $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ определяется как

$$X \cap Y \overset{\text{def}}{=} V(I(X) + J(X))\ ,$$

т. е. как многообразие, заданное объединением всех уравнений, задающих X и Y. Если пересечение не трансверсально, фактор алгебра $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(I(X) + J(X))$ не является приведённой. Например, если $X, Y \subset \mathbb{A}^2$ заданы уравнениями $y - x^2 = 0$ и $y = 0$, то $A = \Bbbk[x, y]/(y - x^2, y) \simeq \Bbbk[x]/(x^2)$ не приведена, а само пересечение в этом случае естественно считать *двойной* точкой $x = y = 0$ (теоретико множественно совпадающей со $\mathrm{Spec_m}\,A_{\text{red}}$). В общем случае, пересечение $X \cap Y$ как множество тоже исчерпывается точками аффинного алгебраического многообразия $\mathrm{Spec_m}\,A_{\text{red}}$, но заменяя пару $(A, \mathrm{Spec_m}\,A)$ на $\mathrm{Spec_m}\,A$ мы можем потерять важную информацию о характере пересечения. В частности, если мы хотим развить, скажем, теорию *кратностей пересечений*, мы должны рассматривать пересечения именно как *схемы*, а не только как алгебраические многообразия.

2.2. Прямые произведения. Напомним, что в категории $\mathscr{A}\!\ell g(\Bbbk)$ имеется *копроизведение*, т. е. для любых двух $\Bbbk$-алгебр A, B существует $\Bbbk$-алгебра $A \otimes B$ с парой гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\ \alpha\ } A \otimes B \xleftarrow{\ \beta\ } B\ , \tag{2-6}$$

которые универсальны[3] в том смысле, что для любой пары гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\ \varphi\ } C \xleftarrow{\ \psi\ } B$$

существует единственный гомоморфизм $A \otimes B \xrightarrow{\ \varphi\otimes\psi\ } C$ со свойствами

$$\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \alpha \quad , \qquad \psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \beta\ .$$

[3]и однозначно определяются этой универсальностью

Как векторное пространство над $\Bbbk$, алгебра $A\otimes B$ является тензорным произведением векторных пространств[4] A и B (например, $\Bbbk[x]\otimes\Bbbk[y]\simeq\Bbbk[x,y]$), умножение задаётся формулой

$$(a_1\otimes b_1)\cdot(a_2\otimes b_2)=(a_1a_2)\otimes(b_1b_2)\ ,$$

а универсальные гомоморфизмы (2-6) действуют по правилам

$$A\xrightarrow{\alpha\,:\,a\mapsto a\otimes 1}A\otimes B\xleftarrow{\beta\,:\,b\mapsto 1\otimes b}B$$

Упражнение 2.5. Пользуясь универсальностью тензорного произведения векторных пространств, проверьте выполнение в $A\otimes B$ всех аксиом коммутативной $\Bbbk$-алгебры и универсального свойства копроизведения алгебр.

При антиэквивалентности (2-2) копроизведение алгебр переходит в прямое произведение аффинных алгебраических многообразий, согласованное с их теоретико-множественным прямым произведением.

2.2.1. ЛЕММА. *Тензорное произведение $A\otimes B$ любых двух конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй, максимальный спектр которой является теоретико множественным прямым произведением максимальных спектров сомножителей:* $\operatorname{Spec_m}(A\otimes B)=\operatorname{Spec_m}(A)\times\operatorname{Spec_m}(B)$.

Доказательство. Биекция множеств $\operatorname{Spec_m}(A)\times\operatorname{Spec_m}(B)\simeq\operatorname{Spec_m}(A\otimes B)$ переводит любую точку (p,q), представленную парой эпиморфизмов вычисления $A\xrightarrow{\mathrm{ev}_p}k$, $B\xrightarrow{\mathrm{ev}_q}k$, в эпиморфизм вычисления $A\otimes B\longrightarrow k$, предписываемый универсальным свойством тензорного произведения. Алгебра $A\otimes B$ порождается над $\Bbbk$ всевозможными попарными тензорными произведениями образующих алгебр A и B, коих имеется конечное число. Чтобы показать, что $A\otimes B$ приведена, достаточно убедиться в том, что всякий элемент $h\in A\otimes B$, задающий нулевую функцию на $\operatorname{Spec_m}(A\otimes B)$, равен нулю. Для этого запишем такой элемент h в виде $\sum f_\nu\otimes g_\nu$ с линейно независимыми над $\Bbbk$ элементами $g_\nu\in B$. Из равенства $(\mathrm{ev}_p\otimes\mathrm{ev}_q)h=0$, справедливого для всех $(p,q)\in\operatorname{Spec_m}(A\otimes B)$, вытекает, что при произвольно зафиксированном $p\in\operatorname{Spec_m}A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p)\cdot g_\nu\in B$ является тождественно нулевой функцией на $\operatorname{Spec_m}B$ и, стало быть, равна нулю, т. к. алгебра B приведена. Это означает, что все константы $f_\nu(p)$ нулевые для всех p, т. е. $f_\nu\in A$ задают нулевые функции на $\operatorname{Spec_m}A$. Поскольку A приведена, $f_\nu=0$, а значит, и $h=0$. $\square$

2.3. Топология Зарисского. На множестве $X=\operatorname{Spec_m}A$ имеется каноническая топология, внутренним образом отражающая алгебраические свойства алгебры A. Эта топология называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в X, т. е. множества вида

$$V(I)=\{x\in X\mid f(x)=0\ \ \forall f\in I\ \}=\{\mathfrak{m}\in\operatorname{Spec_m}A\mid I\subset\mathfrak{m}\}\ ,$$

для всевозможных идеалов $I\subset A$.

Упражнение 2.6. Проверьте, что $V(I)$ удовлетворяют аксиоматике замкнутых множеств топологии, а именно: $\varnothing=V(1)$; $X=V(0)$; $\bigcap V(I_\nu)=V\big(\sum I_\nu\big)$, где $\sum I_\nu$ состоит из всех конечных сумм $\sum f_\nu$ с $f_\nu\in I_\nu$; $V(I)\cup V(J)=V(IJ)$, где IJ есть идеал, натянутый на все произведения ab с $a\in I$, $b\in J$.

Поскольку всякий идеал $I\subset\Bbbk[X]$ конечно порождён, каждое замкнутое множество является пересечением конечного набора гиперповерхностей:

$$V(I)=V(f_1,f_2,\dots,f_m)=\bigcap_\nu V(f_\nu)\ .$$

[4] хотя конечно порожденные $\Bbbk$-алгебры могут быть *бесконечномерны* как векторные пространства, они всегда обладают не более чем счётным базисом (т. е. образованы всевозможными *конечными* линейными комбинациями $\sum\lambda_\nu e_\nu$ каких-то элементов из не более чем счётного набора базисных векторов e_i); большинство конструкций мультилинейной алгебры второго семестра дословно переносится на такие пространства; так, $A\otimes B$ состоит из всевозможных *конечных* сумм $\sum a_\nu\otimes b_\nu$ с $a_\nu\in A$, $b_\nu\in B$ и однозначно (с точностью до канонического изоморфизма) определяется стандартным универсальным свойством тензорного произведения векторных пространств

Тем самым, любое открытое множество является конечным объединением *главных* открытых множеств

$$\mathscr{D}(f) \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}\,.$$

В частности, X является *квазикомпактным* пространством — любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Важно отметить, что топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу, и её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости».

2.3.1. Пример: неприводимые замкнутые множества. Топологическое пространство X называется *приводимым*, если оно представляется в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ своих непустых собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$. В обычной метрической топологии это понятие бессодержательно — почти все пространства будут приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия X равносильна наличию делителей нуля в алгебре $\Bbbk[X]$. В самом деле, разложение $X = X_1 \cup X_2$, в котором оба $X_i \neq X, \varnothing$, означает существование ненулевых $f_1, f_2 \in \Bbbk[X]$ таких, что f_1 обращается в нуль на X_1, а f_2 обращается в нуль на X_2, и поскольку произведение $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X, оно равно нулю $\Bbbk[X]$.

В частности, аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена.

Таким образом, неприводимые алгебраические многообразия являются аналогами (степеней) простых чисел в арифметике.

2.3.2. ТЕОРЕМА. *Каждое аффинное алгебраическое множество имеет единственное разложение $X = \bigcup X_i$ в конечное объединение собственных замкнутых неприводимых подмножеств*[5] *$X_i \subset X$, таких что $X_i \not\subset X_j$ ни при каких $i \neq j$.*

Доказательство. Разложение строится индуктивно: если X приводимо, мы в качестве первого шага представим его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ — собственные замкнутые подмножества. Если после нескольких шагов мы получим разложение $X = \bigcup Z_\nu$ в котором все Z_ν неприводимы, процесс заканчивается, и, выкидывая неприводимые компоненты, содержащиеся в других неприводимых компонентах, мы получим требуемое разложение. В противном случае мы делаем следующий шаг, заменяя приводимые Z_ν объединениями их собственных замкнутых подмножеств. Если эта процедура не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \ldots$, идеалы которых составят бесконечную строго возрастающую цепочку $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \ldots$, что противоречит нётеровости $\Bbbk[X]$.

Единственность следует из того, что включение $Y \subset Z_1 \cup Z_2$ для неприводимого замкнутого Y и произвольных замкнутых Z_i влечёт за собой включение $Y \subset Z_1$ или включение $Y \subset Z_2$, поскольку иначе мы бы имели нетривиальное разложение $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$. Тем самым, равенство двух разложений в объединение неприводимых компонент $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_m$ означает, что $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β, откуда $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$. Выкидываем X_1 и Y_α и применяем индукцию. □

2.3.3. Пример: «большие» открытые множества. Топология Зарисского довольно груба и, как следствие, нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, поскольку в противном случае $X = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$. Таким образом, всякое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно.

Упражнение 2.7. Пусть X неприводимо и $f, g \in \Bbbk[X]$. Докажите, что если $f|_U = g|_U$ для некоторого непустого открытого $U \subset X$, то $f = g$ в $\Bbbk[X]$.
Указание. Иначе $X = (X \smallsetminus U) \cup V(f - g)$.

2.3.4. Пример: топология Зарисского на $X \times Y$ тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y, поскольку замкнутые $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в X, Y. Например, если $X = Y = \mathbb{A}^1$, то любая кривая, скажем, гипербола $V(xy - 1)$, замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$, в то время как произведения замкнутых множеств на $\mathbb{A}^1$ исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и координатными прямыми.

2.3.5. ЛЕММА. *Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ непрерывен в топологии Зарисского.*

[5] они называются *неприводимыми компонентами* многообразия X

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}(Z)$ замкнутого $Z = V(I) \subset Y$ состоит из всех $x \in X$, для которых $0 = f(\varphi(x)) = \varphi^* f(x) \quad \forall\, f \in I$, т.е. является множеством нулей идеала, порожденного в $\Bbbk[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk[X]$. □

2.4. Разложение морфизма. Всякий гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk[X]$ канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \mathrm{im}\,(\varphi^*) \hookrightarrow \Bbbk[X]\,. \tag{2-7}$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\Bbbk[X]$ приведена, алгебра $\Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \mathrm{im}\,(\varphi^*)$ тоже является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй, отвечающей аффинному многообразию $Z = \mathrm{Spec_m}\,(\mathrm{im}\,(\varphi^*)) \simeq V(\ker(\varphi^*)) \subset Y$. Инъективность гомоморфизма $\Bbbk[Z]\varphi_1^*\Bbbk[X]$ означает отсутствие ненулевых функций $f \in \Bbbk[Z]$, зануляющихся на $\varphi_1(X) \subset Z$, т.е.*плотность* $\varphi_1(X)$ в Z. Таким образом, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$, и алгебраическому разложению (2-7) на геометрическом языке отвечает разложение регулярного морфизма многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ в композицию

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Z = \overline{\varphi(X)} \xhookrightarrow{\varphi_2} Y\,.$$

2.4.1. Доминантные морфизмы. Если X неприводимо и гомоморфизм алгебр $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} k[X]$ инъективен, то соответствующий морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *доминантным*. Как мы видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Если X приводимо, то морфизм φ называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на *каждую* неприводимую компоненту многообразия X.

2.4.2. Замкнутые вложения. Морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} k[X]$ сюрьективен. Геометрически это значит, что φ является изоморфизмом X с замкнутым подмногообразием $V(\ker\varphi^*) \subset Y$.

Упражнение 2.8. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ раскладывается в композицию

$$X \xhookrightarrow{\psi} Y \times \mathbb{A}^m \xrightarrow{\pi} Y\,, \tag{2-8}$$

где ψ — замкнутое вложение, а π — естественная проекция вдоль $\mathbb{A}^m$.

Указание. Пусть $A = \Bbbk[X]$, $B = \Bbbk[Y]$. Вложение $B \xhookrightarrow{\varphi^*} A$ задаёт на A структуру конечно порожденной B-алгебры, т.е. $A \simeq B[x_1, x_2, \dots, x_m]/J$.

2.5. Конечные морфизмы. При наличии регулярного морфизма $X \xrightarrow{\varphi} Y$ алгебра $\Bbbk[X]$ может рассматриваться как алгебра над $\varphi^*(\Bbbk[Y]) = \Bbbk[\overline{\varphi(X)}] \subset \Bbbk[X]$. Морфизм φ называется *конечным*, если алгебра $\Bbbk[X]$ является целой над подалгеброй $\varphi^*(k[Y])$ или, что то же самое, если $\Bbbk[X]$ является конечно порождённым $\varphi^*(k[Y])$-модулем (т.е. существуют $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$, такие что любой $h \in \Bbbk[X]$ может быть записан как $h = \sum \varphi^*(g_i)\, f_i$ с подходящими $g_i \in \Bbbk[Y]$).

2.5.1. Лемма. *Любой конечный морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ аффинных алгебраических многообразий переводит всякое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, и индуцированный морфизм $Z \xrightarrow{\varphi|_Z} \varphi(Z)$ также будет конечен. Кроме того, если X неприводимо, то $\varphi(Z) \neq Y$ ни для какого замкнутого $Z \neq X$.*

Доказательство. Пусть $I = I(Z) \subset \Bbbk[X]$ — идеал замкнутого подмножества $Z \subset X$. Ограничение $Z \xrightarrow{\varphi|_Z} Y$ отвечает сквозному гомоморфизму алгебр $\varphi_Z^* : k[Y] \xrightarrow{\varphi^*} k[X] \longrightarrow \Bbbk[X]/I$. Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порождена как $\varphi^*(k[Y])$-модуль, алгебра $\Bbbk[Z] = \Bbbk[X]/I$ также конечно порождена как модуль над $\Bbbk[\,\overline{\varphi(Z)}\,] = \varphi|_Z^*(k[Y]) = \varphi^*(k[Y])/(I \cap \varphi^*(k[Y]))$. Тем самым, $Z \longrightarrow \overline{\varphi(Z)}$ — конечный морфизм.

Равенство $\varphi(Z) = \overline{\varphi(Z)}$ достаточно доказывать отдельно для каждой неприводимой компоненты Z, причём ввиду предыдущего можно заменить X на Z, а Y на $\overline{Z}$. Итак, мы должны показать, что всякий конечный доминантный морфизм $Z \xrightarrow{\varphi} Y$ неприводимого аффинного многообразия Z сюрьективен.

На алгебраическом языке это означает, что для любого расширения алгебр $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[Z]$, такого что $\Bbbk[Z]$ не имеет делителей нуля и является конечно порождённым $\Bbbk[Y]$ модулем, всякий максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$ имеет вид $\widetilde{\mathfrak{m}} \cap \Bbbk[Y]$ для некоторого собственного максимального идеала $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[Z]$. Если идеал $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z]$, порождённый $\mathfrak{m}$ в $\Bbbk[Z]$, является собственным в $\Bbbk[Z]$, то в качестве $\widetilde{\mathfrak{m}}$ можно взять любой максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z]$. Таким образом, мы должны показать, что $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z] \neq \Bbbk[Z]$ ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$.

Пусть это не так, и $\mathfrak{m} \cdot \Bbbk[Z] \neq \Bbbk[Z]$ для некоторого собственного идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$. Выберем какую-нибудь систему функций $f_1, f_2, \dots, f_m$, порождающих $\Bbbk[Z]$ как $\Bbbk[Y]$-модуль. Согласно нашему предположению, каждую из них можно записать в виде $f_i = \sum \beta_{i\nu} f_\nu$ с $\beta_{i\nu} \in \mathfrak{m}$. Это означает, что нулевой $\Bbbk[Y]$-линейный эндоморфизм модуля $\Bbbk[Z]$ представляется в образующих $\{f_\nu\}$ матрицей $E - (\beta_{\nu i})$. Но тогда умножение на $\det(E - (\beta_{ij}))$ аннулирует $\Bbbk[Z]$. Поскольку в $\Bbbk[Z]$ нет делителей нуля, мы получаем равенство $\det(E - (\beta_{ij})) = 0$, из которого вытекает, что $1 \in \mathfrak{m}$, т. е. $\mathfrak{m} = \Bbbk[Y]$ не является собственным.

Для доказательства неравенства $\varphi(Z) \neq Y$ при $Z \subsetneq X$ рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию $f \in \Bbbk[X]$, тождественно зануляющуюся вдоль Z, и запишем для неё целое уравнение над $\varphi^*(k[Y])$ минимальной возможной степени: $f^m + \varphi^*(g_1)\, f^{m-1} + \dots + \varphi^*(g_{m-1})\, f + \varphi^*(g_m) = 0$. Вычисляя его левую часть в любой точке $z \in Z$, получим $\varphi^*(g_m)(z) = 0$, т. е. $g_m(\varphi(z)) = 0 \quad \forall z \in Z$. Тем самым, если $\varphi(Z) = Y$, то $g_m \equiv 0$ на Y, а значит, $\varphi^*(g_m) = 0$ в $\Bbbk[X]$. Поскольку $\Bbbk[X]$ не имеет делителей нуля, мы можем сократить предыдущее уравнение на f, что противоречит его минимальности. □

2.6. Нормальные многообразия. Если аффинное многообразие Y неприводимо, алгебра $\Bbbk[Y]$ не имеет делителей нуля. Её поле частных обозначается в этом случае $\Bbbk(Y)$ и называется *полем рациональных функций* на Y. Неприводимое аффинное алгебраическое множество Y называется *нормальным*, если алгебра $\Bbbk[Y]$ нормальна, т. е. все рациональные функции $f \in \Bbbk(Y)$, целые над $\Bbbk[Y]$, лежат в $\Bbbk[Y]$. Например, аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ нормально (как и любое другое многообразие с факториальной координатной алгеброй).

2.6.1. ЛЕММА. *Всякий сюрьективный конечный морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ в нормальное многообразие Y открыт (т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U \subset X$) и сюрьективно отображает на Y каждую неприводимую компоненту многообразия X.*

Доказательство. Отождествим $\Bbbk[Y]$ с подалгеброй в $\Bbbk[X]$ при помощи φ^*. Для проверки первого утверждения достаточно доказать, что образ каждого главного открытого множества $\mathscr{D}(f) \subset X$ целиком содержит некоторую главную открытую окрестность каждой своей точки. Иначе говоря, для любой функции $f \in \Bbbk[X]$ и любой точки $p \in X$, где $f(p) \neq 0$, мы должны подобрать функцию $a \in \Bbbk[Y]$, такую что $\varphi(p) \in \mathscr{D}(a_i) \subset \varphi(\mathscr{D}(f))$ на Y. Для этого рассмотрим отображение $\psi = \varphi \times f \,:\, X \xrightarrow{p \mapsto (\varphi(p), f(p))} Y \times \mathbb{A}^1$. Оно регулярно и конечно, поскольку гомоморфизм поднятия

$$\psi^* \,:\, \Bbbk[Y \times \mathbb{A}^1] = \Bbbk[Y][t] \xrightarrow{t \mapsto f} k[X]$$

есть ни что иное, как вычисление полиномов от t с коэффициентами в $\Bbbk[Y]$ на элементе $f \in \Bbbk[X]$, и конечно порождённый $\Bbbk[Y]$-модуль $\Bbbk[X]$ будет тем более конечно порождён как модуль над $\Bbbk[Y][t]$. Согласно следствию из n° 1.2.2, минимальный многочлен μ_f элемента f над полем частных $\Bbbk(Y)$ алгебры $\Bbbk[Y]$ лежит в координатной алгебре $\Bbbk[Y]$. Поэтому $\ker \psi^* = (\mu_f)$ является главным идеалом в $\Bbbk[Y][t]$. Иными словами, образ морфизма ψ является в $Y \times \mathbb{A}^1$ гиперповерхностью, заданной уравнением $\mu_f = 0$. Пусть

$$\mu_f = \mu_f(y; t) = t^m + a_1(y)\, t^{m-1} + \dots + a_m(y)\,.$$

Принадлежность точки $q \in Y$ образу множества $\mathscr{D}(f)$ означает наличие у многочлена $\mu_f(q; t)$ ненулевого корня t, что равносильно не обращению в нуль в этой точке хотя бы одного из коэффициентов a_i. В частности, $a_i(\varphi(p)) \neq 0$ для для какого-то i. Но тогда $\varphi(p) \in \mathscr{D}(a_i) \subset \varphi(\mathscr{D}(f))$, что и требовалось.

Что касается ограничения φ на компоненты неприводимого разложения $X = \cup X_\nu$, то для каждого i множество $U_i = X \setminus \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu = X_i \setminus \bigcup\limits_{\nu \neq i} (X_i \cap X_\nu)$ открыто в X и плотно в X_i. Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y, т. е. $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. □