

Примеры неприводимых представлений

- АС3♦1.** Существует ли линейное представление $\rho : S_3 \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, сопоставляющее транспозициям σ_{12} и σ_{23} матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ соответственно? Если нет, объясните, почему. Если да, то как в нём выглядят а) матрица поворота б) S_3 -инвариантное евклидово скалярное произведение?
- АС3♦2.** Как может выглядеть матрица поворота в таком базисе двумерного вещественного неприводимого представления группы D_3 , где матрица отражения имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?
- АС3♦3.** Некая конечная группа имеет ровно три попарно не изоморфных одномерных комплексных представления. Может ли характер хоть одного из них принимать значение а) $(1 - \sqrt{3})/2$ б) $(1 - i\sqrt{3})/2$ в) $(i\sqrt{3} - 1)/2$? Если да, приведите пример, если нет, объясните, почему.
- АС3♦4.** Опишите все комплексные одномерные представления групп а) S_n б) A_n в) D_n (если общий случай вызывает затруднения, начните с $n = 3, 4, 5$).
- АС3♦5.** Опишите все а) комплексные б) вещественные неприводимые представления группы D_n (если общий случай вызывает затруднения, начните с $n = 3, 4, 5$).
- АС3♦6.** Перечислите все вещественные двумерные представления группы D_4 с точностью до изоморфизма.
- АС3♦7.** Докажите, что $(n - 1)$ -мерное *симплициальное представление* группы S_n перестановками классов стандартных базисных векторов $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$ в факторе пространства $\mathbb{K}^n$ по одномерному подпространству, порождённому вектором $e_1 + \dots + e_n$, неприводимо.
- АС3♦8.** Докажите, что четырёхмерное вещественное представление группы Q_8 левыми умножениями в алгебре кватернионов $\mathbb{H}$ неприводимо над $\mathbb{R}$. Приводимо ли оно над $\mathbb{C}$?
- АС3♦9.** Докажите, что тензорное произведение любого неприводимого представления на одномерное неприводимо.
- АС3♦10.** Докажите, что комплексификация вещественного нечётномерного неприводимого представления неприводима. В частности, неприводимы комплексификации трёхмерных представлений группы S_4 собственной группой куба и полной группой тетраэдра, а также представления группы A_5 собственной группой додекаэдра.
- АС3♦11.** Изоморфны ли трёхмерные представления группы S_4 собственной группой куба и полной группой тетраэдра?
- АС3♦12.** Покажите, что группа A_5 имеет два не изоморфных трёхмерных неприводимых представления собственной группой додекаэдра, получающиеся друг из друга композицией с автоморфизмом $\mathrm{Ad}_\sigma : A_5 \xrightarrow{\sim} A_5, g \mapsto \sigma g \sigma^{-1}$, сопряжения какой-нибудь нечётной перестановкой $\sigma \in S_5 \setminus A_5$.
- АС3♦13.** Докажите, что вещественные неприводимые представления любой абелевой группы одномерны или двумерны.
- АС3♦14.** Пусть $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(U)$ — неприводимое представление группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Покажите, что операторы ρ_g с $g \in G$ линейно порождают пространство $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(U)$ над полем $\mathbb{K}$.