

Представления групп

АЛ2♦1. Пусть образ d -мерного вещественного линейного представления $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ конечной группы G лежит в $\mathrm{SL}(V)$. Докажите, что представления $\Lambda^k \varrho$ и $\Lambda^{d-k} \varrho$ изоморфны для всех $0 \leq k \leq d$.

АЛ2♦2 (формула Молина). Для любого представления $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ конечной группы G над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль обозначим через

$$S_G^m \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in S^m V^* \mid \forall g \in G \forall v \in V \ f(gv) = f(v) \}$$

пространство G -инвариантных однородных полиномов степени m на пространстве V . Докажите, что производящая функция для размерностей $d_m = \dim S_G^m(V)$ имеет вид

$$\sum_{m \geq 0} d_m t^m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - t \varrho_g)}.$$

АЛ2♦3. Обозначим через U двумерное неприводимое представление группы S_3 самосовмещениями правильного треугольника.

- а) Покажите, что $S^{n+6}U \simeq S^n U \oplus \mathbb{k}S_3$, где $\mathbb{k}S_3$ — левое регулярное представление в групповой алгебре.
- б) Вычислите характеры представлений $S^n U$ и разложите их на неприводимые.
- в) Вычислите характеры представлений $V^{\otimes n}$ и разложите их на неприводимые.
- г*) Опишите подалгебру S_3 -инвариантов в симметрической алгебре SU .
- д*) (взаимность Шура) Покажите, что $S^k S^m U \simeq S^m S^k U$ как S_3 -модули при всех k, m .

АЛ2♦4. Пусть двумерные неприводимые компоненты представления бесконечной диэдральной группы¹ D_∞ , заданного ортогональными отражениями σ_U, σ_W относительно подпространств U, W евклидова пространства V таковы, что $\sigma_U \sigma_W$ действует на них поворотами на углы² $2\varphi_1, \dots, 2\varphi_m$ (каждый угол присутствует в этом наборе столько раз, какова кратность соответствующей неприводимой компоненты). Покажите, что

- а) m чисел $\cos \varphi_i$ и ещё $\dim(U \cap W)$ единиц составляют набор всех ненулевых сингулярных чисел оператора ортогонального проектирования $W \rightarrow U$ вдоль $U^\perp$
- б) квадраты этих сингулярных чисел суть ненулевые собственные значения симметричной матрицы $G \cdot G^t$, где $G = ((u_i, w_j))$ — взаимная матрица Грама каких-нибудь ортонормальных базисов $u_1, \dots, u_k \in U$ и $w_1, \dots, w_\ell \in W$
- в) две пары подпространств евклидова пространства тогда и только тогда переводятся одна в другую ортогональным преобразованием, когда у них совпадают размерность суммы, размерность пересечения и набор стационарных углов (с учётом кратностей).

АЛ2♦5. Докажите, что G -инвариантная эрмитова структура на пространстве неприводимого комплексного представления группы G единственна с точностью до скалярного множителя.

АЛ2♦6. Зафиксируем в каждом комплексном неприводимом представлении конечной группы G какую-нибудь G -инвариантную эрмитову структуру и ортонормальный базис. Операторы $g \in G$ запишутся в этих базисах унитарными матрицами. Рассмотрим матричные элементы всех этих матриц как векторы из пространства $\mathbb{C}^G$ функций $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Вычислите матрицу Грама этой системы векторов относительно стандартного эрмитова скалярного произведения $(f_1, f_2) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$ на пространстве $\mathbb{C}^G$.

¹Т. е. группы, порождённой двумя образующими σ, ϑ , связанными соотношениями $\sigma^2 = \tau^2 = e$.

²Напомним, что они называются *инвариантными* (или *стационарными*) углами между U и W .