

А. Л. Городенцев*

АЛГЕБРА

2-й курс

Это последняя, третья часть обязательного трёхсеместрового курса алгебры для бакалавриата матфака ВШЭ. Она продолжает [прошлогодний годовой курс](#) для студентов первого года обучения, на записки лекций которого мы будем ссылаться как [\[Алг1\]](#). От слушателей также предполагается владение линейной алгеброй и геометрией в объёме стандартного курса для первого года бакалавриата, к примеру, [моим курсом 2021/22 уч. года](#), на записки которого мы ссылаемся как [\[Гео1\]](#)

Факультет математики НИУ ВШЭ,
Москва, осень 2026 г

* ВШЭ, ИТЭФ, НМУ, [e-mail:gorod@itep.ru](mailto:gorod@itep.ru), <http://gorod.bogomolov-lab.ru/>

Оглавление

Оглавление	2
§1 Основные понятия теории представлений	3
1.1 Представления множеств и ассоциативных алгебр	3
1.2 Полупростые представления	4
1.3 Гомоморфизмы представлений	6
1.4 Матричный формализм	8
1.5 Теорема о двойном централизаторе	9
1.6 Изотипные компоненты	10
§2 Представления групп	13
2.1 Конструкции представлений	13
2.2 проектор на инварианты конечной группы	15
2.3 Комплексные и вещественные представления	17
2.4 представления конечных абелевых групп	20
§3 Групповая алгебра конечной группы	23
3.1 Определение и простейшие свойства	23
3.2 Изотипное разложение регулярного представления	24
3.3 Каноническое скалярное произведение	27
3.4 Характеры	29
3.5 Преобразование Фурье и алгебра функций на группе	31
Ответы и указания к некоторым упражнениям	34

§1. Основные понятия теории представлений.

1.1. Представления множеств и ассоциативных алгебр. Для произвольного множества R условимся обозначать через $\mathbb{k}R$ векторное пространство с базисом R над полем $\mathbb{k}$, состоящее из конечных формальных линейных комбинаций элементов из R с коэффициентами в $\mathbb{k}$, а через $A_R \stackrel{\text{def}}{=} T(\mathbb{k}R)$ — тензорную алгебру¹ этого векторного пространства, т. е. свободную ассоциативную $\mathbb{k}$ -алгебру, порождённую множеством R .

Например, если множество $R = \{t\}$ состоит из одного элемента t , то векторное пространство $\mathbb{k}t \simeq \mathbb{k}$ одномерно с базисом t , а ассоциативная алгебра $A_t = T(\mathbb{k}t) \simeq \mathbb{k}[t]$ изоморфна алгебре многочленов от одной переменной: изоморфизм сопоставляет базисному тензору $t \otimes \dots \otimes t \in (\mathbb{k}t)^{\otimes n}$ моном t^n .

Отображение $\varrho : R \rightarrow \text{End}(W), t \mapsto \varrho_t : W \rightarrow W$, множества R в алгебру линейных эндоморфизмов какого-либо векторного пространства W над полем $\mathbb{k}$ называется *линейным представлением* множества R эндоморфизмами пространства W . Иначе говоря, линейное представление ϱ сопоставляет каждому элементу $t \in R$ линейный оператор $\varrho_t = \varrho(t) : W \rightarrow W$. В этой ситуации пространство W называется R -модулем.

По универсальному свойству свободной алгебры A_R , линейные представления

$$\varrho : R \rightarrow \text{End}(W)$$

биективно соответствуют гомоморфизмам ассоциативных алгебр

$$\tilde{\varrho} : A_R \rightarrow \text{End}(W).$$

Каждый тензор $t = \sum_{t_1, \dots, t_m \in R} x_{t_1, \dots, t_m} t_1 \otimes \dots \otimes t_m \in A_R$ с $t_v \in R, x_{t_1, \dots, t_m} \in \mathbb{k}$ переводится гомоморфизмом $\tilde{\varrho}$ в линейную комбинацию композиций

$$\tilde{\varrho}_t = \sum x_{t_1, \dots, t_m} \varrho_{t_1} \circ \dots \circ \varrho_{t_m} : W \rightarrow W,$$

а единичный элемент тензорной алгебры — в тождественный оператор Id_W . Обратите внимание, что $\tilde{\varrho}_{f+g} = \tilde{\varrho}_f + \tilde{\varrho}_g$ и $\tilde{\varrho}_{f \otimes g} = \tilde{\varrho}_f \circ \tilde{\varrho}_g$, т. е. $\tilde{\varrho} : A_R \rightarrow \text{End}(W)$ является гомоморфизмом алгебр. Образ этого гомоморфизма совпадает с *ассоциативной оболочкой* множества операторов $\varrho(R) \subset \text{End}(W)$ и тождественного оператора Id_W , т. е. является наименьшей ассоциативной подалгеброй с единицей, содержащей $\varrho(R)$, и получается из операторов ϱ_t исходного представления $\varrho : R \rightarrow \text{End}(W)$ множества R при помощи композиций и взятия их конечных линейных комбинаций с тождественным оператором. Он обозначается

$$\text{Ass}(\varrho(R)) \stackrel{\text{def}}{=} \text{im } \tilde{\varrho}.$$

Пример 1.1 (пространство с одним оператором, см. раздел 9.1.1 на с. 143 лекций [\[Алг 1\]](#))

Если множество R состоит из одного элемента t , то алгебра $A_R \simeq \mathbb{k}[t]$ является кольцом многочленов от этого элемента. Представление $\varrho : R \rightarrow \text{End } W$ заключается в выборе на пространстве W линейного оператора $f = \varrho(t) : W \rightarrow W$ и наделяет пространство W структурой модуля над кольцом многочленов, которая задаётся гомоморфизмом

$$\tilde{\varrho} = \text{ev}_f : \mathbb{k}[t] \rightarrow \text{End}(W), \quad t \mapsto f, \quad (1-1)$$

¹См. раздел 14.2 на с. 224 лекций [\[Алг 1\]](#).

переводящим многочлен $\varphi(t) \in \mathbb{k}[t]$ в результат подстановки в него вместо переменной t оператора f . Если пространство W конечномерно, то гомоморфизм (1-1) имеет ненулевое ядро — главный идеал¹ $(\mu_f) \subset \mathbb{k}[t]$, порождённый приведённым многочленом наименьшей степени, аннулирующим оператор² f . Образ гомоморфизма (1-1), т. е. наименьшая содержащая оператор f ассоциативная подалгебра с единицей в $\text{End}(V)$, представляет собой множество всех многочленов от оператора f и изоморфна фактор алгебре $\mathbb{k}[t]/(\mu_f)$.

Для произвольной ассоциативной алгебры³ A над полем $\mathbb{k}$ её *линейным представлением* в векторном пространстве V над полем $\mathbb{k}$ называют любой гомоморфизм $\mathbb{k}$ -алгебр

$$\varrho : A \rightarrow \text{End } V, \quad a \mapsto \varrho_a.$$

Если такой гомоморфизм задан, пространство V называется A -модулем. Когда понятно, о каком представлении идёт речь, мы обозначаем результат применения оператора $\varrho_a = \varrho(a) \in \text{End}(V)$ к вектору $w \in W$ просто через aw . Для подпространства $U \subset W$ и множества элементов $M \subset A$ мы полагаем $MU \stackrel{\text{def}}{=} \{au \mid a \in M, u \in U\}$.

Пусть S — множество или ассоциативная алгебра. Векторное подпространство U в S -модуле W называется S -подмодулем или S -инвариантным подпространством, если $SU \subset U$. Отличные от W подмодули $U \subsetneq W$ называются *собственными*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.1 (ФАКТОР МОДУЛИ). Убедитесь, что для всякого S -подмодуля $U \subseteq W$ на фактор пространстве $V = W/U$ имеется структура S -модуля, на котором элементы $f \in S$ действуют по правилу $f[w] \stackrel{\text{def}}{=} [fw]$, где $[w] = w + U$ означает класс вектора $w \in W$ по модулю U .

Ненулевой S -модуль W называется *простым*, если у него нет ненулевых собственных подмодулей. Задающее такой модуль представление $\varrho : S \rightarrow \text{End}(W)$ называется *неприводимым*.

Ненулевой S -модуль W и соответствующее ему представление называются *разложимыми*, если W является прямой суммой своих ненулевых собственных S -подмодулей. Всякий конечномерный S -модуль является прямой суммой неразложимых, однако бывают неразложимые непростые модули.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Приведите пример непростого неразложимого модуля над алгеброй многочленов $\mathbb{k}[t]$.

1.2. Полупростые представления. Зафиксируем некоторое множество R . Если R -модуль W является прямой суммой простых R -подмодулей, то он называется *полупростым*, а соответствующее представление $\varrho : R \rightarrow \text{End}(W)$ — *вполне приводимым*. Обратите внимание, что каждый неприводимый R -модуль по определению полупрост и неразложим, и что прямая сумма любого множества полупростых модулей полупроста.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Убедитесь, что для заданных подпространств $U_1, U_2 \subset W$ условия $RU_1 \subset U_2$ и $A_R U_1 \subset U_2$ равносильны, и выведите отсюда, что простота, полупростота и разложимость пространства W относительно произвольного множества операторов $S \subset \text{End}(W)$ и относительно ассоциативной оболочки $\text{Ass}(S)$ этих операторов означают одно и то же.

¹См. раздел 4.3 на с. 73 лекций [Алг 1].

²Напомним, что он называется *минимальным многочленом* оператора f , см. раздел 9.1.5 на с. 147 лекций [Алг 1].

³См. раздел 5.2 на с. 90 лекций [Алг 1].

ПРИМЕР 1.2 (ПРОСТРАНСТВО С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ, ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМ. 1.1)

По теореме о строении конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов¹ каждый конечномерный $\mathbb{k}[t]$ -модуль W , будучи модулем кручения, изоморфен прямой сумме фактор модулей²

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_s^{m_s})}, \quad (1-2)$$

где все многочлены $p_i \in \mathbb{k}[t]$ неприводимы и приведены, а действие оператора состоит в умножении на t . Два таких модуля изоморфны если и только если они отличаются друг от друга перестановкой прямых слагаемых. Таким образом, неразложимые пространства с оператором исчерпываются пространствами $\mathbb{k}[t]/(p^m)$, не изоморфными друг другу при разных p, m , а неприводимые пространства с оператором — пространствами $\mathbb{k}[t]/(p)$, где в обоих случаях $p \in \mathbb{k}[t]$ приведён и неприводим, а оператор действует умножением на t . Полупростые пространства с оператором суть прямые суммы нескольких пространств $\mathbb{k}[t]/(p)$.

ЛЕММА 1.1

Пусть R -модуль³ W линейно порождается над $\mathbb{k}$ некоторым множеством $\mathcal{S}$ своих неприводимых R -подмодулей. Тогда для любого собственного R -подмодуля $U \subsetneq W$ найдётся такой R -подмодуль $V \subset W$, что⁴ $W = U \oplus V$, причём в качестве V можно взять прямую сумму подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. Для нулевого подмодуля $U = 0$ это утверждение означает, что весь модуль W является прямой суммой подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. В частности, такой модуль W автоматически полупрост.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $U \neq W$ и W линейно порождается подмодулями $S \in \mathcal{S}$, в множестве $\mathcal{S}$ найдётся подмодуль $S \not\subset U$. Сумма $U + S$ является прямой, поскольку пересечение $S \cap U \subsetneq S$, будучи собственным подмодулем неприводимого модуля S , равно нулю. Обозначим через $\mathcal{S}'$ множество всех полупростых подмодулей $M \subset W$, разложимых в прямую сумму модулей из $\mathcal{S}$ и таких, что сумма $U + M$ прямая. По предыдущему, множество $\mathcal{S}'$ непусто. Введём на нём частичный порядок, полагая $M_1 < M_2$, когда $M_2 = M_1 \oplus M$ для некоторого $M \in \mathcal{S}'$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Убедитесь, что $\mathcal{S}'$ является полным чумом⁵.

По лемме Цорна⁶ в множестве $\mathcal{S}'$ имеется максимальный элемент V . Покажем, что $U \oplus V = W$. Если $U \oplus V \neq W$, то повторяя проведённое в начале доказательства рассуждение для подмодуля $U \oplus V$ в роли подмодуля U , мы найдём в $\mathcal{S}$ такой подмодуль $S \subset W$, что сумма $(U \oplus V) + S$ прямая. Это означает, что $V \oplus S \in \mathcal{S}'$ строго больше, чем V . Всё сказанное работает и для $U = 0$. $\square$

ТЕОРЕМА 1.1

Модуль W полупрост если и только если каждый ненулевой подмодуль в W содержит простой ненулевой подмодуль и для каждого ненулевого собственного R -подмодуля $U \subset W$ найдётся такой R -подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

¹См. Теорему 6.4 на с. 115 лекций [Алг 1].

²См. Теорему 9.1 на с. 144 лекций [Алг 1].

³Не обязательно конечномерный как векторное пространство над $\mathbb{k}$.

⁴Всякий подмодуль V с таким свойством называется *дополнительным* к U .

⁵См. Определение 0.3 на с. 21 лекций [Алг 1].

⁶См. Следствие 0.3 на с. 21 лекций [Алг 1].

Доказательство. Если модуль W полупрост, т. е. является прямой суммой простых подмодулей, подмодуль $V \subset W$, дополнительный к произвольно заданному подмодулю $U \subset W$, существует по лем. 1.1, применённой к множеству $\mathcal{S}$ всех простых подмодулей в W .

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Убедитесь, что проекция $\pi : W = U \oplus V \rightarrow U, u + v \mapsto u$, перестановочна с действием операторов из R , т. е. $\pi(fw) = f\pi(w)$ для всех $f \in R$ и $w \in W$.

Так как W линейно порождается простыми подмодулями, проекция π переводит хотя бы один из них в ненулевое векторное подпространство в U .

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Убедитесь, что это подпространство является простым R -подмодулем в U .

Это доказывает прямую импликацию «только если». Чтобы доказать обратную импликацию, обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех полупростых ненулевых подмодулей $S \subseteq W$. Это множество непусто, поскольку содержит ненулевой простой подмодуль, имеющийся в W по условию. Зададим на $\mathcal{S}$ частичный порядок, полагая $S_1 < S_2$ когда $S_2 = S_1 \oplus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.7. Убедитесь, что члм $\mathcal{S}$ полон.

По лемме Цорна, в $\mathcal{S}$ есть максимальный элемент M . Если он не совпадает с W , то найдётся такой ненулевой подмодуль $V \subset W$, что $W = M \oplus V$. Поскольку в V есть ненулевой простой подмодуль $S \subset V$, сумма $M \oplus S \in \mathcal{S}$ будет строго больше, чем M . Тем самым, $M = W$. $\square$

Следствие 1.1 (критерии полупростоты)

Пусть каждый ненулевой R -подмодуль в R -модуле¹ W содержит в себе конечномерный ненулевой R -подмодуль. Тогда следующие свойства модуля W эквивалентны:

- 1) W полупрост
- 2) W линейно порождается над $\mathbb{k}$ простыми R -подмодулями
- 3) для любого ненулевого собственного R -подмодуля $U \subset W$ существует такой R -подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

Доказательство. Если R -подмодуль конечномерен как векторное пространство над $\mathbb{k}$, то каждый его R -подмодуль минимальной положительной размерности автоматически прост. Поэтому каждый ненулевой подмодуль в W обладает простым ненулевым подмодулем, и условия (1) и (3) эквивалентны по теор. 1.1. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) была установлена в лем. 1.1. $\square$

1.3. Гомоморфизмы представлений. Линейное отображение $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$ между R -модулями, отвечающими линейным представлениям $\varrho_1 : R \rightarrow \text{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \rightarrow \text{End}(W_2)$, называется гомоморфизмом R -модулей², если оно перестановочно с действием всех операторов из R , т. е. для всех $f \in R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\varphi} & W_2 \\ \varrho_1(f) \uparrow & & \uparrow \varrho_2(f) \\ W_1 & \xrightarrow{\varphi} & W_2. \end{array}$$

¹Который не предполагается конечномерным.

²А также сплетающим оператором, гомоморфизмом представлений или R -линейным отображением.

Примером R -линейного отображения является проекция разложимого R -модуля $U \oplus V$ на подмодуль U вдоль подмодуля V из [упр. 1.5](#) на стр. 6. Множество всех R -линейных гомоморфизмов обозначается через $\text{Hom}_R(W_1, W_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : W_1 \rightarrow W_2 \mid \forall w \in W_1, \forall f \in R \varphi(fw) = f\varphi(w)\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.8. Убедитесь, что а) $\text{Hom}_R(W_1, W_2) = \text{Hom}_{A_R}(W_1, W_2)$, и это пространство является векторным подпространством в пространстве всех линейных отображений $W_1 \rightarrow W_2$ б) композиция R -линейных отображений R -линейна в) ядро и образ гомоморфизма R -модулей являются R -подмодулями г) образ и полный прообраз любого R -модуля относительно гомоморфизма R -модулей являются R -модулями.

ЛЕММА 1.2 (ЛЕММА ШУРА)

Всякий ненулевой гомоморфизм неприводимых R -модулей является изоморфизмом. Алгебра R -линейных автоморфизмов $\text{End}_R(U)$ неприводимого R -модуля U является алгеброй с делением¹. Если основное поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто, то все R -линейные эндоморфизмы неприводимого R -модуля U скалярны, т. е. имеют вид² λId_U , где $\lambda \in \mathbb{k}$.

Доказательство. Пусть представления $\varrho_1 : R \rightarrow \text{End}(U_1)$, $\varrho_2 : R \rightarrow \text{End}(U_2)$ неприводимы, а линейное отображение $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ перестановочно со всеми операторами из R . Поскольку $\ker \varphi \subset U_1$ и $\text{im } \varphi \subset U_2$ являются подмодулями простых модулей, либо $\ker \varphi = U_1$ и $\varphi = 0$, либо $\ker \varphi = 0$. Во втором случае, если $\varphi \neq 0$, то подмодуль $\text{im } \varphi \subset U_2$ отличен от нуля, и значит, совпадает с U_2 , т. е. φ одновременно инъективно и сюръективно.

Из сказанного вытекает, что каждый ненулевой R -линейный эндоморфизм $\varphi : U \rightarrow U$ простого модуля U биективен. Поскольку обратное к биективному R -линейному эндоморфизму отображение тоже R -линейно, каждый ненулевой элемент $\varphi \in \text{End}_R(U)$ обратим.

Наконец, пусть $\varphi \in \text{End}_R(U)$ и поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто. Для каждого $\lambda \in \mathbb{k}$ эндоморфизм $\lambda \text{Id}_U - \varphi$ тоже R -линеен. В силу алгебраической замкнутости поля $\mathbb{k}$ существует такое $\lambda_0 \in \mathbb{k}$, что $\det(\lambda_0 \text{Id} - \varphi) = 0$, и тем самым R -подмодуль $\ker(\lambda_0 \text{Id} - \varphi) \subset U$ отличен от нуля. Если U прост, то $\ker(\lambda_0 \text{Id} - \varphi) = U$ и $\varphi = \lambda_0 \text{Id}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.2

Если основное поле алгебраически замкнуто, а R -модули U и W неприводимы, то

$$\dim \text{Hom}_R(U, W) = \begin{cases} 0 & \text{если } U \text{ и } W \text{ не изоморфны} \\ 1 & \text{если } U \text{ и } W \text{ изоморфны.} \end{cases}$$

Доказательство. Любые два ненулевых изоморфизма $\varphi, \psi : U \xrightarrow{\sim} W$ пропорциональны, поскольку $\psi^{-1}\varphi = \lambda \cdot \text{Id}_U$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{k}^\times$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.3

Каждый фактор модуль любого полупростого R -модуля W полупрост.

Доказательство. По лемме Шура образ любого простого R -подмодуля $S \subset W$ при любой R -линейной сюръекции $\pi : W \twoheadrightarrow U$ либо нулевой, либо изоморфен S и, стало быть, прост. Поскольку W линейно порождается простыми подмодулями $S \subset W$, модуль U линейно порождается ненулевыми подмодулями $\pi(S)$. $\square$

¹Т. е. у каждого элемента $\varphi \in \text{End}_R(U)$ имеется двусторонний обратный элемент φ^{-1} со свойством $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = 1$.

²Иначе говоря, $\text{End}_R(U) \simeq \mathbb{k}$.

Предложение 1.1

В условиях сл. 1.1 на стр. 6 полупростота R -модуля W равносильна тому, что для любого подмодуля $U \subset W$ существует такой R -линейный эндоморфизм¹ $\pi_U \in \text{End}_R(W)$, что $\pi_U^2 = \pi_U$ и $\text{im } \pi_U = U$.

Доказательство. Если $W = U \oplus V$ для некоторого R -подмодуля $V \subset W$, то проектор

$$\pi_U : U \oplus V \rightarrow U \oplus V, \quad (u, v) \mapsto (u, 0),$$

обладает требуемыми свойствами. Наоборот, если эндоморфизм π_U имеет $\pi_U^2 = \pi_U$, то он тождественно действует на своём образе: $\pi_U \pi_U w = \pi_U w$. Поэтому $\ker \pi_U \cap \text{im } \pi_U = 0$. Так как каждый вектор $w \in W$ имеет разложение $w = \pi_U w + (w - \pi_U w)$, в котором $\pi_U w \in \text{im } \pi_U$, а $w - \pi_U w \in \ker \pi_U$, мы заключаем, что $W = \text{im } \pi_U \oplus \ker \pi_U$. В силу R -линейности π_U его ядро $\ker \pi_U$ является R -подмодулем в W . $\square$

Следствие 1.4

Каждый подмодуль любого полупростого R -модуля полупрост.

Доказательство. Пусть R -модуль L является ненулевым собственным подмодулем полупростого R -модуля W . Каждый R -подмодуль $U \subset L$, будучи подмодулем и в W , является образом R -линейного проектора $W \rightarrow U$. Ограничение этого проектора на подмодуль L является R -линейным проектором $L \rightarrow U$. $\square$

1.4. Матричный формализм. Пусть векторное пространство $W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ над полем $\mathbb{k}$ является прямой суммой своих подпространств V_ν . Обозначим через $\iota_\nu : V_\nu \hookrightarrow W$ вложение каждого из них в W , а через $\pi_\mu : W \rightarrow V_\mu$ — проекцию прямой суммы $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ на μ -е слагаемое. Все эти отображения являются гомоморфизмами R -модулей удовлетворяют соотношениям

$$\sum_\nu \iota_\nu \pi_\nu = \text{Id}_W, \quad \pi_\nu \iota_\nu = \text{Id}_{V_\nu} \text{ для всех } \nu,$$

$$\pi_\nu \iota_\mu = 0 \text{ и } \iota_\mu \pi_\nu = 0 \text{ для всех } \mu \neq \nu.$$

Для произвольного линейного оператора $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{k}}(W)$ положим

$$\varphi_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu : V_\nu \rightarrow V_\mu$$

и организуем эти линейные отображения в квадратную матрицу $\Phi = (\varphi_{\mu\nu})$. Оператор φ восстанавливается из этой матрицы как

$$\varphi = \text{Id}_W \circ \varphi \circ \text{Id}_W = \left(\sum_\mu \iota_\mu \pi_\mu \right) \circ \varphi \circ \left(\sum_\nu \iota_\nu \pi_\nu \right) = \sum_{\mu, \nu} \iota_\mu \varphi_{\mu\nu} \pi_\nu,$$

а его действие на вектор $w = (v_1, \dots, v_n) \in V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ заключается в умножении столбца векторов $(v_1, \dots, v_n)^t$ слева на матрицу Φ :

$$\begin{pmatrix} \varphi v_1 \\ \vdots \\ \varphi v_n \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

¹Он называется *инвариантным проектором* на U .

УПРАЖНЕНИЕ 1.9. Убедитесь, что матрица композиции $\varphi \circ \psi$ операторов $\varphi, \psi : W \rightarrow W$ равна произведению $\Phi\Psi$ матриц этих операторов.

Таким образом, мы получаем изоморфизм векторных пространств:

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(W) \simeq \bigoplus_{\mu, \nu} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_{\nu}, V_{\mu}), \quad \varphi \mapsto \Phi = (\varphi_{\mu\nu}), \quad (1-3)$$

а когда все слагаемые $V_{\nu} = V$ являются копиями одного и того же пространства V , — изоморфизм $\mathbb{K}$ -алгебр

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(V^{\oplus n}) \simeq \text{Mat}_n(\text{End}_{\mathbb{K}}(V)). \quad (1-4)$$

Если пространство W является R -модулем, где R — это множество или ассоциативная алгебра, а все подпространства $V_{\nu} \subset W$ — R -подмодулями в W , то все вложения ι_{ν} и проекции π_{μ} являются гомоморфизмами R -модулей, а линейный оператор $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$ является эндоморфизмом R -модуля W , если и только если все его компоненты $\varphi_{\mu\nu} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_{\nu}, V_{\mu})$ являются гомоморфизмами R -модулей. Изоморфизм (1-3) превращается в этом случае в изоморфизм векторных пространств

$$\text{End}_A(W) \simeq \bigoplus_{\mu, \nu} \text{Hom}_A(V_{\nu}, V_{\mu}), \quad \varphi \mapsto (\varphi_{\mu\nu}), \quad (1-5)$$

а если все слагаемые V_{ν} являются копиями одного и того же R -модуля V , — в изоморфизм $\mathbb{K}$ -алгебр

$$\text{End}_A(V^{\oplus n}) \simeq \text{Mat}_n(\text{End}_A(V)). \quad (1-6)$$

1.5. Теорема о двойном централизаторе. Пусть в алгебре всех $\mathbb{K}$ -линейных эндоморфизмов векторного пространства V над полем $\mathbb{K}$ задана ассоциативная подалгебра $A \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Эндоморфизмы пространства V как модуля над A образуют в алгебре $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ всех $\mathbb{K}$ -линейных эндоморфизмов пространства V подалгебру

$$\text{End}_A(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid \forall a \in A, \forall v \in V \varphi(av) = a\varphi(v)\},$$

состоящую из всех линейных операторов $W \rightarrow W$, перестановочных со всеми операторами из A . Она называется *централизатором* подалгебры $A \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$.

ТЕОРЕМА 1.2 (ТЕОРЕМА ДЖЕКОБСОНА)

Пусть конечномерное векторное пространство V над полем $\mathbb{K}$ полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, и $B = \text{End}_A(V)$. Тогда $\text{End}_B(V) = A$.

Доказательство. Включение $A \subset \text{End}_B(V)$ очевидно. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в V базис $e_1, \dots, e_n$ и покажем, что для каждого B -линейного оператора $\varphi \in \text{End}_B(V)$ найдётся такой оператор $a \in A$, что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i — это обеспечит равенство $\varphi = a$. Рассмотрим n -кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\text{End}_B(V)$, полагая $f(v_1, \dots, v_n) = (f v_1, \dots, f v_n)$ для каждого оператора f из A , из B или из $\text{End}_B(V)$. Обозначим вектор $(e_1, \dots, e_n) \in W$ через e . Достаточно убедиться, что $\varphi e \in Ae$. Поскольку W полупрост как A -модуль, его A -подмодуль $Ae \subset W$ является образом некоторого A -линейного проектора $\pi : W \rightarrow Ae$, тождественно действующего на Ae . Если π коммутирует с φ , то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in Ae$, что и требуется. Покажем, что π действительно коммутирует с φ . Для этого запишем эндоморфизм $\pi : V^{\oplus n} \rightarrow V^{\oplus n}$ матрицей (π_{ij}) с элементами $\pi_{ij} \in \text{End}(V)$, как это объяснялось выше. Так как π перестановочен с действием A на W , каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V , т. е. лежит в $\text{End}_A(V) = B$. Поэтому диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \text{End}_B(V)$, коммутирует с π . $\square$

Следствие 1.5 (теорема Бернсайда)

Если основное поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто, а конечномерное векторное пространство V неприводимо как модуль над множеством операторов $R \subset \text{End}(V)$, то ассоциативная оболочка $\text{Ass}(R) \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$. В частности, все конечномерные неприводимые представления $A \rightarrow \text{End}(V)$ любой ассоциативной алгебры A эпиморфны.

Доказательство. По лемме Шура¹ $\text{End}_{\text{Ass}(R)}(V) = \mathbb{k}$, откуда $\text{End}_{\mathbb{k}}(V) = \text{Ass}(R)$. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Докажите, что обратная импликация — если $\text{Ass}(R) = \text{End}(V)$, то R -модуль V неприводим — имеет место над любым полем $\mathbb{k}$.

1.6. Изотипные компоненты. Зафиксируем ассоциативную алгебру A . Для произвольных A -модулей U, W на тензорном произведении $\text{Hom}_A(U, W) \otimes U$ имеется естественная структура A -модуля, на котором элементы $a \in A$ действуют по правилу $a(\varphi \otimes u) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \otimes (au)$. При этом каноническая свёртка

$$c_{WU} : \text{Hom}_A(U, W) \otimes U \rightarrow W, \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u), \quad (1-7)$$

является A -линейным гомоморфизмом.

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Убедитесь в этом.

Для простого A -модуля U образ канонической свёртки (1-7) обозначается $W_U = \text{im } c_{WU} \subset W$ и называется U -изотипной компонентой модуля W .

ЛЕММА 1.3

Изотипная компонента $W_U \subset W$ равна сумме всех имеющихся в W неприводимых подмодулей, изоморфных модулю U .

Доказательство. Каждый ненулевой гомоморфизм $\psi : U \rightarrow W$ инъективен, и любой вектор вида $c_{WU}(\sum \psi_i \otimes u_i) = \sum \psi_i(u_i) \in W$, где $u_i \in U, \psi_i \in \text{Hom}_A(U, W)$, лежит в сумме подмодулей $\psi_i(U) \subset W$, каждый из которых изоморфен U . Наоборот, если векторы $v_i = \psi_i(u_i)$ лежат в образах A -линейных вложений $\psi_i : U \hookrightarrow W$, то $\sum v_i = c(\sum \psi_i \otimes u_i)$. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.12. Пусть $A = \mathbb{k}[t]$, $U = \mathbb{k}[t]/(p)$, $W = \mathbb{k}[t]/(p^n)$, где $p \in \mathbb{k}[t]$ — неприводимый приведённый многочлен. Опишите подмодуль $W_U \subset W$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2

Всякий гомоморфизм A -модулей $\varphi : V \rightarrow W$ переводит U -изотипную компоненту $V_U \subset V$ в U -изотипную компоненту $W_U \subset W$. В частности, для любого подмодуля $V \subset W$ выполнено равенство $V_U = V \cap W_U$.

Доказательство. Гомоморфизм φ переводит любой лежащий в $\text{im } c_{VU}$ вектор $\sum \psi_i(u_i)$, у которого $\psi_i \in \text{Hom}_A(U, V)$, а $u_i \in U$, в вектор $\sum \varphi\psi_i(u_i) \in \text{im } c_{WU}$, ибо $\varphi\psi_i \in \text{Hom}_A(U, W)$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 (изотипное разложение)

Если A -модуль W полупрост, то в любом его разложении в прямую сумму простых подмодулей сумма тех слагаемых, что изоморфны U , совпадает с U -изотипной компонентой $W_U \subset W$. В

¹См. лем. 1.2 на стр. 7.

частности, она не зависит от выбора разложения W в прямую сумму простых подмодулей, и если зафиксировать в каждом классе изоморфных простых модулей какой-нибудь представитель U , то всякий полупростой модуль будет иметь каноническое *изотипное разложение*

$$W = \bigoplus_U W_U, \quad (1-8)$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A -модулям U , для которых $\text{Hom}_A(U, W) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $W = \bigoplus_i W_i$, где все W_i просты. Так как $\text{Hom}_A(U, W) = \bigoplus_i \text{Hom}_A(U, W_i)$ и $\text{Hom}_A(U, W_j) = 0$ для всех $W_j \not\cong U$, образ канонической свёртки (1-7) лежит в сумме тех подмодулей W_i , что изоморфны U . $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1

Для простого модуля U и полупростого модуля W количество изоморфных U слагаемых в разложении¹ модуля W в прямую сумму неприводимых подмодулей обозначается

$$m_U(W) \stackrel{\text{def}}{=} \dim W_U / \dim U, \quad (1-9)$$

и называется *кратностью* простого модуля U в полупростом модуле W .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4

Над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ для любого неприводимого A -модуля U и произвольного A -модуля W каноническая свёртка (1-7) инъективна и тем самым задаёт изоморфизм

$$c_{WU} : \text{Hom}_A(U, W) \otimes U \xrightarrow{\sim} W_U.$$

Доказательство. Будучи линейно порождённым простыми подмодулями, изоморфными U , модуль W_U полупрост и раскладывается в прямую сумму $W_U = \bigoplus_i V_i$ простых подмодулей V_i , каждый из которых изоморфен U . Зафиксируем для каждого i вложение $\psi_i : U \hookrightarrow W$, изоморфно отображающее U на подмодуль $V_i \subset W$. По сл. 1.2 пространство

$$\text{Hom}_A(U, W) = \text{Hom}_A(U, W_U) = \bigoplus_i \text{Hom}_A(U, V_i)$$

является прямой суммой одномерных пространств, порождённых вложениями ψ_i . Поэтому каждый элемент модуля $\text{Hom}_A(U, W) \otimes U$ однозначно записывается в виде $\sum \psi_i \otimes u_i$, где $u_i \in U$. Если $c_{WU}(\sum \psi_i \otimes u_i) = \sum \psi_i(u_i) = 0$, то каждое слагаемое $\psi_i(u_i) \in V_i$ равно нулю в отдельности, ибо сумма $W_U = \bigoplus_i V_i$ прямая. Так как все ψ_i инъективны, все $u_i = 0$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.6

Над алгебраически замкнутым полем для всех конечномерных полупростых A -модулей V, W выполняются равенства $\dim \text{Hom}_A(V, W) = \sum_U m_U(V) m_U(W) = \dim \text{Hom}_A(W, V)$, где суммирование происходит по всем представителям U различных классов изоморфных простых модулей.

Доказательство. Пусть $V = \bigoplus_i V_i$ и $W = \bigoplus_j W_j$, где все V_i и W_j неприводимы. По лемме Шура пространства $\text{Hom}_A(V_i, W_j)$ нулевые при $V_i \not\cong W_j$ и одномерные при $V_i \cong W_j$. Поэтому размерность пространства $\text{Hom}_A(V, W) = \bigoplus_{ij} \text{Hom}_A(V_i, W_j)$ равна $\sum_U m_U(V) m_U(W)$, и то же самое верно для $\text{Hom}_A(W, V)$. $\square$

¹По предл. 1.3 оно не зависит от способа разложения.

Следствие 1.7

Над алгебраически замкнутым полем для любого конечномерного A -модуля W и каждого простого A -модуля U выполняется равенство $m_U(W) = \dim \operatorname{Hom}_A(U, W) = \dim \operatorname{Hom}_A(W, U)$.

§2. Представления групп

2.1. Конструкции представлений. Действие группы G линейными преобразованиями на векторном пространстве V над полем $\mathbb{k}$ или, что то же самое, гомоморфизм групп $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G в векторном пространстве V . Пространство V называется в этом случае G -модулем. Неприводимость, неразложимость и полупростота представления V означают неприводимость, неразложимость и полупростоту пространства V относительно множества $\varrho(G)$ всех операторов из группы G . Представление, в котором все элементы группы G действуют тождественным оператором, называется *тривиальным*.

ПРИМЕР 2.1 (ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ)

Если группа G действует на множестве¹ M биективными преобразованиями $g : M \rightarrow M$, то возникает линейное представление группы G на векторном пространстве $\mathbb{k}M$ с базисом M по правилу $g : \sum_{m \in M} x_m m \mapsto \sum_{m \in M} x_m g m$, которое переставляет базисные векторы при помощи преобразований из группы G . Такие представления называются *перестановочными*. Например, симметрическая группа S_n имеет тавтологическое линейное представление на пространстве $\mathbb{k}^n$ перестановками стандартных базисных векторов $e_1, \dots, e_n$. Это представление является прямой суммой тривиального одномерного представления в пространстве $L = \mathbb{k}w$, порождённом вектором $w = \sum_i e_i$, и $(n-1)$ -мерного представления Δ_{n-1} в дополнительной к L гиперплоскости, задаваемой уравнением $\sum x_i = 0$. Последнее изоморфно представлению группы S_n на факторпространстве $\mathbb{k}^n/L$ аффинными автоморфизмами правильного $(n-1)$ -мерного симплекса с центром в нуле и вершинами в точках $[e_1]_L, \dots, [e_n]_L \in \mathbb{k}^n/L$. Поэтому оно называется *симплициальным* представлением симметрической группы S_n .

УПРАЖНЕНИЕ 2.1. Докажите, что симплициальное представление Δ_{n-1} неприводимо.

ПРИМЕР 2.2 (ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ)

Пусть, как и в предыдущем примере, группа G действует на множестве M биективными преобразованиями $g : M \rightarrow M$. На пространстве $\mathbb{k}^M$ функций на множестве M со значениями в поле $\mathbb{k}$ возникает линейное представление группы G , переводящее функцию $f : M \rightarrow \mathbb{k}$ в функцию $gf : m \mapsto f(g^{-1}m)$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Убедитесь, что $(gh)f = g(hf)$ для всех $g, h \in G$ и $f \in \mathbb{k}^M$, и что вычисление значений функций в точках множества M сохраняется действием группы G в том смысле, что $f(m) = gf(gm)$ для всех $g \in G, m \in M$ и всех функций $f : M \rightarrow \mathbb{k}$.

Представление в пространстве функций имеет одномерное инвариантное подпространство постоянных функций, на котором G действует тривиально. Если множество M конечно и $\mathrm{char} \mathbb{k} \nmid |M|$, то у этого одномерного тривиального подмодуля имеется дополнительный подмодуль, состоящий из функций с нулевой суммой значений.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Пусть группа S^n тавтологически действует на множестве $M = \{1, \dots, n\}$. Покажите, что представление S_n на пространстве функций $M \rightarrow \mathbb{k}$ с нулевой суммой значений изоморфно симплициальному представлению.

¹См. раздел 10.4 на с. 178 лекций [\[Алг 1\]](#).

ПРИМЕР 2.3 (ТЕНЗОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ)

Тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ нескольких G -модулей $V_1, \dots, V_n$ канонически наделяется структурой G -модуля, в котором каждый элемент $g \in G$ представляется оператором $g \otimes \dots \otimes g$, т. е. действует на разложимые тензоры по правилу:

$$g : v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto gv_1 \otimes \dots \otimes gv_n.$$

Аналогично, симметрические и внешние степени любого G -модуля V тоже являются G -модулями, в которых элементы $g \in G$ действуют на разложимые тензоры по правилам:

$$g : v_1 \cdot \dots \cdot v_n \mapsto gv_1 \cdot \dots \cdot gv_n \text{ и } g : v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto gv_1 \wedge \dots \wedge gv_n.$$

ПРИМЕР 2.4 (ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ)

Для каждого представления $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ двойственное представление $\varrho^\times : G \rightarrow \mathrm{GL}(V^*)$ определяется таким образом, чтобы свёртка векторов с ковекторами не менялась под действием G , т. е.

$$\langle \varrho_g^\times \xi, \varrho_g v \rangle = \langle \xi, v \rangle \text{ для всех } g \in G, v \in V, \xi \in V^*. \quad (2-1)$$

Так как каждый оператор ϱ_g обратим, равенство (2-1) равносильно равенству

$$\langle \varrho_g^\times \xi, v \rangle = \langle \xi, \varrho_g^{-1} v \rangle = \langle \xi, \varrho_{g^{-1}} v \rangle,$$

которое получается из (2-1) заменой v на $\varrho_g^{-1} v$ и означает, что оператор $\varrho_g^\times = \varrho_{g^{-1}}^*$ двойствен оператору $\varrho_g^{-1} = \varrho_{g^{-1}}$ и переводит ковектор $\xi \in V^*$ в композицию $\xi \circ g^{-1} : v \mapsto \xi(g^{-1} v)$. В частности, матрица оператора $\varrho_g^\times$ в двойственном базисе получается из матрицы ϱ_g обращением и транспонированием.

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Убедитесь, что $\varrho^\times : G \rightarrow \mathrm{GL}(V^*)$, $g \mapsto \varrho_{g^{-1}}^*$, является гомоморфизмом групп.

ПРИМЕР 2.5 (ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ)

Для любых двух представлений $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(U)$ и $\lambda : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ представление $\varrho^\times \otimes \lambda$ задаёт действие группы G на пространстве $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ всех линейных операторов $\varphi : U \rightarrow V$ по правилу

$$g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}. \quad (2-2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Убедитесь в этом.

Подпространство неподвижных векторов представления (2-2) обозначается

$$\mathrm{Hom}_G(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi : U \rightarrow V \mid \forall g \in G \ g\varphi = \varphi g \}$$

и называется пространством G -инвариантных операторов¹.

ПРИМЕР 2.6 (РАСШИРЕНИЕ СКАЛЯРОВ)

Если поле $\mathbb{k}$ содержится в большем поле $\mathbb{F} \supset \mathbb{k}$, то каждому линейному представлению ϱ группы G в векторном пространстве V над полем $\mathbb{k}$ можно сопоставить линейное представление $\varrho^\mathbb{F}$ в векторном пространстве $V_\mathbb{F} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F} \otimes_\mathbb{k} V$ над полем² $\mathbb{F}$. Если элемент $g \in G$ действует на пространстве V оператором $\varrho_g : V \rightarrow V$, то на пространстве $V_\mathbb{F}$ он действует оператором

$$\varrho_g^\mathbb{F} = \mathrm{Id}_\mathbb{F} \otimes \varrho_g : \mathbb{F} \otimes_\mathbb{k} V \rightarrow \mathbb{F} \otimes_\mathbb{k} V,$$

¹А также сплетающих операторов, G -линейных операторов или G -гомоморфизмов.

²См. раздел 13.5 на с. 220 лекций [Алг 1].

продолжающим оператор ϱ_g по $\mathbb{F}$ -линейности.

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Убедитесь, что если векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис пространства V над $\mathbb{k}$, то векторы $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_n$ образуют базис пространства $V_{\mathbb{F}}$ над $\mathbb{F}$, и матрица оператора $\varrho_g^{\mathbb{F}}$ в этом базисе совпадает с матрицей оператора ϱ_g в базисе $e_1, \dots, e_n$ (в частности, её элементы лежат в поле $\mathbb{k}$).

Часто встречающийся в приложениях случай расширения скаляров с $\mathbb{R}$ до $\mathbb{C}$ мы подробнее обсудим в н° 2.3 на стр. 17 ниже, а сейчас докажем следующий полезный факт.

Предложение 2.1

Пусть $\mathbb{k} \subset \mathbb{F}$ — бесконечные поля, и конечномерные представления $U_{\mathbb{F}}$ и $W_{\mathbb{F}}$ получаются из представлений U и W расширением скаляров с $\mathbb{k}$ до $\mathbb{F}$. Если представления $U_{\mathbb{F}}$ и $W_{\mathbb{F}}$ изоморфны над полем $\mathbb{F}$, то исходные представления U и W изоморфны над полем $\mathbb{k}$.

Доказательство. Изоморфность представлений $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(U)$ и $\eta : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ означает существование такой линейной биекции $f : U \xrightarrow{\sim} W$, что

$$f \varrho_g = \eta_g f \text{ для всех } g \in G. \quad (2-3)$$

Если выбрать в пространствах U и W какие-нибудь базисы над $\mathbb{k}$ и записать все операторы ϱ_g, η_g матрицами в этих базисах, то условия (2-3) превратятся в систему занумерованных элементами группы G линейных однородных уравнений на квадратную матрицу f . Если у этой системы есть ненулевое решение над полем $\mathbb{F}$, то у неё есть ненулевое решение и над исходным полем $\mathbb{k}$, в котором лежат все коэффициенты системы (2-3), и каждый базис $f_1, \dots, f_m \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W)$ пространства решений над $\mathbb{k}$ одновременно является базисом пространства решений над $\mathbb{F}$. Если над полем $\mathbb{F}$ есть решение $g = \sum \vartheta_i f_i$ с $\vartheta_i \in \mathbb{F}$ и $\det g \neq 0$, то многочлен

$$\det(x_1 f_1 + \dots + x_n f_n) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$$

ненулевой. Так как поле $\mathbb{k}$ бесконечно, существуют такие $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{k}$, что

$$\det(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n) \neq 0.$$

Это значит, что матрица $f = \sum \lambda_i f_i$, решающая систему (2-3) в поле $\mathbb{k}$, обратима и задаёт изоморфизм представлений U и W над $\mathbb{k}$. $\square$

2.2. Проектор на инварианты конечной группы. Пусть группа G действует в векторном пространстве V . Векторы, неподвижные относительно всех преобразований из G , образуют в V подмодуль G -инвариантов

$$V^G \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G\},$$

на котором группа G действует тривиально. Если группа G конечна и $\mathrm{char} \mathbb{k} \nmid |G|$, то любое линейное представление V группы G допускает G -линейную проекцию на подмодуль G -инвариантов, которая сопоставляет вектору $v \in V$ центр тяжести¹ его G -орбиты

$$v^{\natural} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv \quad (2-4)$$

¹Т. е. в равновесный барицентр, см. раздел 1.4.2 на с. 14 лекций [Гео 1]. Обратите внимание, что если $|G| : \mathrm{char}(\mathbb{k})$, то сумма весов элементов орбиты нулевая, и центр тяжести не определён.

в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Убедитесь прямым вычислением, что при $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$ оператор $v \mapsto v^{\natural}$ перестановочен с действием G и линейно проектирует V на V^G .

ТЕОРЕМА 2.1

Каждое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо¹.

Доказательство. Покажем, что любой G -подмодуль $U \subset V$ является образом G -линейного проектора². Группа G действует на пространстве всех $\mathbb{k}$ -линейных отображений $\text{Hom}(V, U)$ по правилу $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$. Достаточно убедиться в том, что проекция на инварианты этого действия

$$\text{Hom}(V, U) \rightarrow \text{Hom}_G(V, U), \quad \varphi \mapsto \varphi^{\natural} = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g\varphi g^{-1}$$

переводит проекторы V на U в проекторы V на U . Пусть $\pi : V \rightarrow U$ — любой $\mathbb{k}$ -линейный проектор. Тогда $\text{im } \pi^{\natural} \subset U$, так как $g\pi g^{-1}U \subset U$ для всех $g \in G$, а любой вектор $u \in U$ неподвижен относительно $\pi^{\natural}$, ибо $g^{-1}U \subset U$ и $\pi|_U = \text{Id}_U$ влекут $g\pi g^{-1}u = g g^{-1}u = u$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1

Линейное представление группы G в вещественном (соотв. комплексном) векторном пространстве V называется *ортогональным* (соотв. *унитарным*), если на V существует такое евклидово (соотв. эрмитово) скалярное произведение, что $(gu, gw) = (u, w)$ для всех $u, w \in V$ и всех $g \in G$, т. е. все операторы из G ортогональны (соотв. унитарны) относительно этого скалярного произведения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Покажите, что каждое ортогональное или унитарное представление произвольной группы G является прямой ортогональной суммой неприводимых представлений.

ТЕОРЕМА 2.2

Каждое линейное представление конечной группы G в вещественном (соотв. комплексном) векторном пространстве V ортогонально (соотв. унитарно).

Доказательство. Рассмотрим произвольное евклидово (соответственно эрмитово) скалярное произведение на V , сопоставляющее паре векторов $u, w \in V$ число (u, w) и положим³

$$(u, w)^{\natural} \stackrel{\text{def}}{=} |G|^{-1} \sum_{g \in G} (gu, gw).$$

Эта форма билинейна (соотв. полуторалинейна), симметрична (соотв. эрмитово симметрична) и положительно определена, поскольку этими свойствами обладает каждое слагаемое в правой части. Очевидно, что $(hu, hw)^{\natural} = (u, w)^{\natural}$ для всех $h \in G$. $\square$

¹Т. е. является прямой суммой неприводимых представлений или, что то же самое, полупростым G -модулем.

²См. предл. 1.1 на стр. 8.

³Обратите внимание, что правая часть является центром тяжести G -орбиты билинейной формы $(*, *)$ в стандартном представлении группы G на пространстве $V^* \otimes V^*$ билинейных форм на V , которое получается комбинированием конструкций из прим. 2.4 и прим. 2.3 на стр. 13 выше: элемент $g \in G$ переводит билинейную форму $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ в билинейную форму $\beta^g(u, w) = \beta(g^{-1}u, g^{-1}w)$. Инвариантами этого действия являются такие формы, относительно которых все преобразования из G являются изометриями: $\beta(gu, gw) = \beta(u, w)$ для всех $g \in G$.

2.3. Комплексные и вещественные представления. Каждое представление

$$\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$$

в вещественном векторном пространстве V можно комплексифицировать до представления

$$\varrho_{\mathbb{C}} : G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$$

в комплексном векторном пространстве $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = V \oplus iV$ — комплексификации¹ пространства V . При этом каждый элемент $g \in G$, действующий на пространстве V оператором $\varrho_g : V \rightarrow V$, действует на $V_{\mathbb{C}}$ комплексифицированным оператором²

$$\varrho_{g_{\mathbb{C}}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes \varrho_g : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}, \quad u + iv \mapsto \varrho_g(u) + i\varrho_g(v),$$

который в любом вещественном базисе $e_1, \dots, e_n \in V \subset V_{\mathbb{C}}$ пространства $V_{\mathbb{C}}$ имеет ту же самую (вещественную) матрицу, что и оператор ϱ_g . Комплексификация $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ любого вещественного линейного оператора $f : V \rightarrow V$ коммутирует с комплексным сопряжением³

$$w = u + iv \mapsto \bar{w} = u - iv, \quad \text{где } u, v \in V, \quad (2-5)$$

на $V_{\mathbb{C}}$, т. е. $f_{\mathbb{C}}(\bar{w}) = \overline{f_{\mathbb{C}}(w)}$. Поэтому каждому G -подмодулю $W \subset V_{\mathbb{C}}$ отвечает комплексно сопряжённый G -подмодуль $\bar{W} \subset V_{\mathbb{C}}$, полулинейно изоморфный G -подмодулю W в том смысле, что отображение комплексного сопряжения (2-5) задаёт $\mathbb{C}$ -полулинейный изоморфизм $W \simeq \bar{W}$, перестановочный с действием G . Если $W = \bar{W}$, подмодуль W является комплексификацией вещественного подмодуля $\mathrm{Re} W = \{w \in W \mid \bar{w} = w\} \subset V$.

Предложение 2.2

Комплексификация $U_{\mathbb{C}}$ неприводимого вещественного представления U либо неприводима, либо является прямой суммой двух комплексно сопряжённых полулинейно изоморфных неприводимых комплексных представлений.

Доказательство. Рассмотрим любой неприводимый подмодуль $W \subset U_{\mathbb{C}}$. Подмодуль $W + \bar{W} \subset U_{\mathbb{C}}$ совпадает со своим комплексно сопряжённым и стало быть является комплексификацией ненулевого вещественного подмодуля $\mathrm{Re}(W + \bar{W}) \subset U$, совпадающего с U , так как U неприводим. Пересечение $W \cap \bar{W}$, будучи подмодулем неприводимого модуля W либо нулевое, либо совпадает с W . В первом случае $U_{\mathbb{C}} = W \oplus \bar{W}$, во втором $U_{\mathbb{C}} = W = \bar{W}$. $\square$

Пример 2.7 (представление конечной циклической группы поворотами)

Группа $\mathbb{Z}/(n)$ представляется на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ поворотами: класс $[k]$ действует поворотом на угол $2\pi/k$, матрица которого в стандартном ортонормальном базисе e_1, e_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi/k) & -\sin(2\pi/k) \\ \sin(2\pi/k) & \cos(2\pi/k) \end{pmatrix}.$$

¹См. раздел 15.2 на с. 243 лекций [Алг 1].

²См. раздел 15.2.1 на с. 244 лекций [Алг 1].

³См. раздел 15.2.2 на с. 244 лекций [Алг 1].

Это представление неприводимо над $\mathbb{R}$, а его комплексификация раскладывается в прямую сумму двух комплексно сопряжённых одномерных $\mathbb{Z}/(n)$ -подмодулей, порождённых векторами $w = e_1 - ie_2$ и $\bar{w} = e_1 + ie_2$, поскольку в базисе $w, \bar{w}$ оператор $[k]$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}^k \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda = e^{2\pi/n} \text{ и } \lambda^n = 1.$$

Обозначим через U_λ и $U_{\bar{\lambda}}$ два представления группы $\mathbb{Z}/(n)$ в одномерном комплексном пространстве $\mathbb{C}$, в которых образующая $[1] \in \mathbb{Z}/(n)$ действует соответственно умножениями на λ и $\bar{\lambda}$. В этих обозначениях комплексификация двумерного вещественного представления группы $\mathbb{Z}/(n)$ поворотами евклидовой плоскости изоморфна прямой сумме $U_\lambda \oplus U_{\bar{\lambda}}$. Обратите внимание, что представления U_λ и $U_{\bar{\lambda}}$ не изоморфны друг другу над $\mathbb{C}$, ибо не существует $\mathbb{C}$ -линейной биекции $U_\lambda \xrightarrow{\sim} U_{\bar{\lambda}}$, переводящей одно действие группы $\mathbb{Z}/(n)$ в другое. А вот полулинейная биекция, действующая по правилу $z \mapsto \bar{z}$, перестановочна со всеми операторами из $\mathbb{Z}/(n)$.

Пример 2.8 (двумерное неприводимое представление группы S_3)

Группа $S_3 \simeq D_3$ действует на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ самосовмещениями правильного треугольника. Это представление неприводимо. Его комплексификация тоже неприводима, поскольку в противном случае оператор отражения σ имел бы диагональную матрицу в собственном базисе $w, \bar{w}$ оператора поворота τ из предыдущего примера. Но из соотношения $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$ вытекает, что σ переводит вектор w , который является собственным для τ с собственным числом $\lambda = e^{2\pi/3}$, в собственный вектор с собственным числом $\lambda^{-1} = \bar{\lambda} = e^{-2\pi/3}$:

$$\tau\sigma w = \sigma\tau^{-1}w = \sigma(\lambda^{-1}w) = \lambda^{-1}\sigma w.$$

т. е. оператор отражения переводит собственные векторы поворота друг в друга.

Пример 2.9 (ортогональные представления группы D_∞)

Группа D_∞ с двумя образующими σ, ϑ , связанными соотношениями¹ $\sigma^2 = \vartheta^2 = e$, называется *бесконечной диэдральной группой*. Чтобы описать неприводимые ортогональные представления группы D_∞ , положим $\tau = \sigma\vartheta$. Тогда $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$.

Упражнение 2.9. Убедитесь, что D_∞ можно иначе описать как группу с образующими σ, τ , связанными соотношениями

$$\sigma^2 = e \quad \text{и} \quad \sigma\tau\sigma = \tau^{-1}. \quad (2-6)$$

Покажем, что этих обозначениях неприводимые ортогональные представления группы D_∞ исчерпываются четырьмя одномерными представлениями, в которых каждый из операторов τ, σ действует умножением на² ± 1 , а также двумерными представлениями U_φ , где $0 < \varphi < \pi/2$, в которых σ и ϑ действуют как отражения в прямых ℓ_σ и ℓ_ϑ , пересекающихся под углом φ , а τ действует как поворот на угол 2φ в направлении от ℓ_ϑ к ℓ_σ .

Пусть U — неприводимый D_∞ -модуль, $U_\mathbb{C}$ — его комплексификация, а $u \in U_\mathbb{C}$ — собственный вектор оператора τ с собственным числом $\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку оператор τ ортогональный, $|\lambda| = 1$ и $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$. Выше, в [прим. 2.8](#) мы видели, что из соотношений (2-6) вытекает, что вектор $w = \sigma u$ тоже является собственным для τ с собственным значением $\bar{\lambda}$.

¹См. § 12 на с. 199 лекций [\[Алг 1\]](#).

²Четыре возможных выбора знака дают 4 попарно не изоморфных представления.

Если $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, то $\lambda = \pm 1$, и вектор u можно выбрать лежащим в U . Тогда w тоже лежит в U и имеет то же самое собственное число, что и u . Если векторы u и w пропорциональны, то $u = \pm v$ является собственным для обоих операторов τ, σ , а одномерное пространство $\mathbb{R}u$ инвариантно относительно D_∞ , и в нём возникает одно из четырёх указанных выше одномерных представлений. Если u и w не пропорциональны, то такое представление возникает в одномерном подпространстве $\mathbb{R}v$, натянутом на вектор $v = u + w$, также собственный для обоих операторов τ, σ , что противоречит неприводимости U .

Пусть теперь $\lambda \neq \bar{\lambda}$. Тогда σ переставляет друг с другом собственные векторы u и w оператора τ с собственными числами λ и $\bar{\lambda}$, а также собственные векторы $\bar{u}$ и $\bar{w}$ с собственными числами $\bar{\lambda}$ и λ . В линейной оболочке этих векторов имеются ненулевые комплексно сопряжённые друг другу векторы v и $\bar{v}$, которые переставляются друг с другом отражением σ и являются собственными для τ с комплексно сопряжёнными собственными числами $\lambda, \bar{\lambda}$. В самом деле, если $w = \bar{u}$, то можно положить $v = u$, а если $w \neq \bar{u}$, положим $v = u - \bar{w}$. Двумерная $\mathbb{C}$ -линейная оболочка векторов $v, \bar{v}$ инвариантна относительно действия D_∞ и является комплексификацией двумерного вещественного пространства¹ с базисом $\operatorname{Re} v = (v + \bar{v})/2$ и $\operatorname{Im} v = (v - \bar{v})/2i$, на котором оператор τ действует как поворот, а оператор σ — перестановкой базисных векторов. Из последнего вытекает, что ортогональная инволюция σ имеет собственные числа $+1$ и -1 , т. е. является отражением в прямой. Тогда $\vartheta = \sigma\tau$ тоже является отражением в прямой, а $\tau = \sigma\vartheta$ — поворотом на удвоенный угол между этими прямыми.

ПРИМЕР 2.10 (Ортогональный инвариант пары подпространств евклидова пространства)

Каждое подпространство U вещественного евклидова пространства V задаёт ортогональный оператор² $s_U : V \rightarrow V$ отражения в U , тождественно действующий на U и переводящий каждый вектор из $U^\perp$ в противоположный.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10. Убедитесь, что это инволютивный³ ортогональный линейный оператор.

Наоборот, каждый инволютивный оператор $f : V \rightarrow V$ задаёт разложение⁴ $V = V_+ \oplus V_-$ в прямую сумму собственных подпространств $V_\pm = \{v \in V \mid f v = \pm v\}$ оператора f с собственными числами ± 1 , а если f ещё и ортогонален, то эти подпространства ортогональны друг другу.

УПРАЖНЕНИЕ 2.11. Убедитесь в этом.

Таким образом, задание пары подпространств U, W в евклидовом пространстве V равносильно заданию ортогонального представления $\varrho_{UW} : D_\infty \rightarrow \mathcal{O}(V)$, $\sigma \mapsto s_U, \vartheta \mapsto s_W$. По упр. 2.8 на стр. 16 оно полупросто и единственным образом раскладывается в прямую ортогональную сумму изотипных компонент⁵

$$V = V_{--} \oplus V_{+-} \oplus V_{-+} \oplus V_{++} \oplus \bigoplus_i V_{\varphi_i}, \quad (2-7)$$

где через $V_{\pm\pm}$ обозначены суммы одномерных представлений, в которых инволюции s_U, s_W действуют как $\pm \operatorname{Id}$, а через V_{φ_i} — сумма двумерных представлений, в которых s_U, s_W действуют

¹См. предложение 15.2 на с. 245 лекций [Алг 1].

²См. пример 11.2 на с. 142 лекций [Алг 1].

³Т. е. обратный самому себе: $\sigma_U^2 = \operatorname{Id}$.

⁴См. пример 9.6 на с. 159 лекций [Алг 1].

⁵См. предл. 1.3 на стр. 10.

как отражения в прямых, пересекающихся под углом φ_i . Каждое из подпространств U, W является прямой ортогональной суммой своих ненулевых пересечений с компонентами разложения¹ (2-7). При этом $V_{--} = (U + W)^\perp$, $V_{++} = U \cap W$, $V_{+-} = U \cap W^\perp$, $V_{-+} = U^\perp \cap W$, а пересечения $U \cap V_{\varphi_i}$ и $W \cap V_{\varphi_i}$ являются изоклинными² подпространствами половинной размерности в V_{φ_i} с углом φ_i , причём $\varphi_i \neq \varphi_j$ при $i \neq j$. Углы $\varphi_i \in (0, \pi/2)$, участвующие в разложении (2-7), называются *инвариантными* (или *стационарными*) углами между подпространствами U и W . Набор размерностей компонент разложения (2-7) и величин стационарных углов является полным ортогональным инвариантом пары подпространств евклидова пространства: если у подпространств $Y, Z \subset V$ он такой же, как у $U, W \subset V$, то $Y = f(U)$, $Z = f(W)$ для некоторого ортогонального линейного оператора $f: V \rightarrow V$, и наоборот, если такой оператор f существует, то он задаёт изоморфизмом представлений ϱ_{UW} и ϱ_{YZ} .

УПРАЖНЕНИЕ 2.12. Убедитесь, что $s_{f(U)} = f \sigma_U f^{-1}$ для любого подпространства $U \subset V$.

Альтернативные геометрические описания инвариантных углов см. в разделе 11.5 на с. 154 лекций [Гео 1].

УПРАЖНЕНИЕ 2.13. Покажите, что косинусы инвариантных углов между подпространствами U и W евклидова пространства V являются отличными от 0, 1 сингулярными числами³ ортогональной проекции $\pi: U \rightarrow W$ вдоль $W^\perp$.

2.4. Представления конечных абелевых групп. Всюду в этом разделе мы считаем, что G — конечная группа, а поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто, и $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$. Эти условия гарантируют, что многочлен $t^{|G|} - 1$ имеет в поле $\mathbb{k}$ ровно $|G|$ попарно различных корней⁴. Поскольку $g^{|G|} = e$ для всех⁵ $g \in G$, многочлен $t^{|G|} - 1$ аннулирует все операторы любого конечномерного представления группы G . Следовательно, все эти операторы диагонализуются⁶. Если группа G абелева, то их можно одновременно диагонализировать в некотором общем для всех операторов базисе⁷. Мы заключаем, что каждое конечномерное линейное представление конечной абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$ является прямой суммой одномерных представлений. Одномерные представления описываются *мультипликативными характеристиками*.

2.4.1. Мультипликативные характеры. Гомоморфизмы $G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ группы G в мультипликативную группу поля $\mathbb{k}$ называются *мультипликативными характеристиками* группы G . Каждое одномерное представление U группы G задаёт мультипликативный характер $\chi_U: G \rightarrow \mathbb{k}^\times$, однозначно определяемый тем, что $gu = \chi_U(g)u$ для всех $u \in U$ и $g \in G$. Иначе говоря, каждый

¹Разложение в прямую сумму $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ называется *согласованным* с подпространством $U \subset V$, если $U = \bigoplus_j (U \cap V_j)$, где суммирование происходит по всем таким j , что $U \cap V_j \neq 0$. Таким образом, ортогональное разложение (2-7) согласовано с обоими подпространствами $U, W \subset V$.

²Подпространства $U, W \subset V$ называются *изоклинными* с углом φ , если угол между любым ненулевым вектором любого из них и другим подпространством равен φ . Подробнее про угол между векторами и подпространствами см. в разделе 10.4.2 на с. 139 лекций [Гео 1].

³См. раздел 16.3 на с. 260 лекций [Алг 1].

⁴Если $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$, то у многочлена $t^n - 1$ нет кратных корней, так как он взаимно прост со своей производной $nt^{n-1} \neq 0$.

⁵См. следствие 10.3 на с. 184 лекций [Алг 1].

⁶См. предложение 9.4 на с. 158 лекций [Алг 1].

⁷См. предложение 9.6 на с. 165 лекций [Алг 1].

оператор $g \in G$ действует на одномерном пространстве U умножением на некоторую ненулевую константу, и характер χ_U сопоставляет элементам группы G те константы, умножением на которые они действуют. Наоборот, каждый мультипликативный характер $\chi: G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ задаёт на одномерном пространстве $U = \mathbb{k}$ линейное представление группы G , в котором каждый элемент $g \in G$ действует по правилу $g: u \mapsto \chi(g)u$. Мы будем обозначать этот одномерный G -модуль через U_χ .

Упражнение 2.14. Убедитесь, что $U_\chi \simeq U_\psi$ как G -модули если и только если $\chi = \psi$ как гомоморфизмы $G \rightarrow \mathbb{k}^\times$.

Поскольку $\chi(g)^{|G|} = \chi(g^{|G|}) = \chi(e) = 1$ для всех $g \in G$, множество значений любого мультипликативного характера $\chi: G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ лежит в группе $\mu_{|G|}(\mathbb{k}) \subset \mathbb{k}^\times$ корней $|G|$ -той степени из 1 в поле $\mathbb{k}$. Множество всех мультипликативных характеров $\chi: G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ является мультипликативной абелевой подгруппой в алгебре $\mathbb{k}^G$ всех функций на группе G со значениями в поле $\mathbb{k}$. Единицей этой группы служит *тривиальный характер* $\chi_1 \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению. Обратный к χ характер χ^{-1} действует по правилу $\chi^{-1}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(g)^{-1} = \chi(g^{-1})$ и является характером двойственного к U_χ представления $U_\chi^* \simeq U_{\chi^{-1}}$.

Упражнение 2.15. Проверьте, что характер тензорного произведения одномерных представлений равен произведению их характеров.

Группа мультипликативных характеров $G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ группы G обозначается $G^\wedge$ и называется *двойственной по Понтрягину* к группе G . Поскольку каждый характер является гомоморфизмом в абелеву группу $\mathbb{k}^\times$, он однозначно пропускается через *абелинизацию*¹ $G_{\text{ab}} \stackrel{\text{def}}{=} G/G'$, где $G' = [G, G]$ — это коммутант² группы G . Таким образом, $G^\wedge = G_{\text{ab}}^\wedge$.

2.4.2. Представление в пространстве функций на группе. Каждая группа G действует на пространстве $\mathbb{k}^G$ функций $G \rightarrow \mathbb{k}$ по правилу³ $g: f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$. Для каждого характера $\chi: G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ обозначим через $\mathbb{k}_\chi^G$ изотипную компоненту⁴ этого представления, равную сумме всех изоморфных U_χ одномерных G -подмодулей в $\mathbb{k}^G$. Она состоит из всех таких функций $f: G \rightarrow \mathbb{k}$, что

$$f(g^{-1}x) = \chi(g)f(x) \text{ для всех } x, g \in G. \quad (2-8)$$

Полагая в этом равенстве $x = e$, получаем $f(g^{-1}) = \chi(g)f(e)$ для всех $g \in G$. Переобозначая g^{-1} через h , заключаем, что $f(h) = f(e)\chi(h^{-1}) = f(e)\chi^{-1}(h)$ для всех $h \in G$. Иными словами, каждая функция $f \in \mathbb{k}_\chi^G$ пропорциональна характеру χ^{-1} , обратному к χ в группе мультипликативных характеров. В частности, $\dim \mathbb{k}_\chi^G = 1$. Если группа G абелева, то представление $\mathbb{k}^G$ распадается в прямую сумму одномерных представлений и тем самым в прямую сумму изотипных компонент⁵ $\mathbb{k}_\chi^G$ по всем мультипликативным характерам $\chi \in G^\wedge$. Мы заключаем, что для абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$ имеется изоморфизм G -модулей

$$\mathbb{k}^G \simeq \bigoplus_{\chi \in G^\wedge} \mathbb{k}_\chi^G,$$

т. е. каждое из неприводимых представлений конечной абелевой группы G содержится в представлении группы G на пространстве функций $G \rightarrow \mathbb{k}$ с кратностью один. В частности, характеры образуют базис пространства $\mathbb{k}^G$ и $|G^\wedge| = |G|$.

¹См. предложение 10.6 на с. 186 лекций [Алг 1].

²См. раздел 10.6 на с. 186 лекций [Алг 1].

³Ср. с прим. 2.2 на стр. 13.

⁴См. п. 1.6 на стр. 10.

⁵См. предл. 1.3 на стр. 10.

УПРАЖНЕНИЕ 2.16. Для произвольной¹ группы G покажите, что любое множество различных гомоморфизмов $G \rightarrow \mathbb{K}^\times$ линейно независимо в пространстве $\mathbb{K}^G$.

ТЕОРЕМА 2.3 (двойственность Понтрягина)

Пусть G — конечная абелева группа. Для каждого $g \in G$ функция вычисления

$$\text{ev}_g : G^\wedge \rightarrow \mathbb{K}, \chi \mapsto \chi(g),$$

является характером группы $G^\wedge$, а отображение $G \rightarrow G^{\wedge\wedge}, g \mapsto \text{ev}_g$ является изоморфизмом групп.

Доказательство. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$\text{ev}_g(\chi_1 \chi_2) = \chi_1(g) \chi_2(g) = \text{ev}_g(\chi_1) \cdot \text{ev}_g(\chi_2).$$

Равенства $\text{ev}_{g_1 g_2}(\chi) = \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2) = \text{ev}_{g_1}(\chi) \text{ev}_{g_2}(\chi)$ показывают, что отображение $g \mapsto \text{ev}_g$ является гомоморфизмом групп. Если элемент $g \in G$ лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$ и g тривиально действует в любом конечномерном представлении группы G . Поэтому $f(g^{-1}x) = f(x)$ для любой функции $f : G \rightarrow \mathbb{K}$, что возможно только при $g = e$. Поскольку $|G^{\wedge\wedge}| = |G|$, инъективность гомоморфизма $g \mapsto \text{ev}_g$ влечёт его биективность. $\square$

2.4.3. Преобразование Фурье. На самом деле двойственность Понтрягина имеет место для всех локально компактных топологических абелевых групп, и конечные абелевы группы являются лишь самыми простыми примерами таких групп. В качестве двойственной к произвольной локально компактной топологической абелевой группе G берётся группа G непрерывных гомоморфизмов $G \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Например, мультипликативная группа $U(1)$ комплексных чисел единичной длины двойственна по Понтрягину аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$: каждому $n \in \mathbb{Z}$ отвечает характер $U(1) \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$, а каждому $e^{2\pi i t} \in U(1)$ — характер $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times, m \mapsto e^{2\pi i m t}$. Аддитивная группа $\mathbb{R}$ вещественных чисел двойственна сама себе: каждому $a \in \mathbb{R}$ отвечает характер $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times, x \mapsto e^{2\pi i a x}$.

Каждая достаточно регулярная функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ на локально компактной топологической абелевой группе G имеет единственное «линейное выражение» через характеры. Для группы $U(1)$ это выражение представляет собою разложение функции $f : U(1) \rightarrow \mathbb{C}$ в бесконечный ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f^\wedge(m) z^m$$

с коэффициентами $f^\wedge(m) \in \mathbb{C}$, которые можно воспринимать как функцию $f^\wedge : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Для аддитивной группы $\mathbb{R}$ «линейное выражение» через характеры означает представление функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^\wedge(\alpha) e^{2\pi i \alpha x} d\alpha,$$

в котором «семейство коэффициентов» $f^\wedge(\alpha)$ представляет собой функцию $f^\wedge : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Функции $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ и $f^\wedge : G^\wedge \rightarrow \mathbb{C}$ однозначно восстанавливаются друг по другу по простым явным формулам так, что с учётом двойственности Понтрягина возникает равенство $f^{\wedge\wedge} = f$. Инволюция $f \leftrightarrow f^\wedge$ называется *преобразованием Фурье*.

¹Не обязательно абелевой.

§3. Групповая алгебра конечной группы.

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что G — конечная группа, $\mathbb{k}$ — алгебраически замкнутое поле, и $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$.

3.1. Определение и простейшие свойства. Обозначим через $\mathbb{k}G$ векторное пространство с базисом G , состоящее из формальных линейных комбинаций $\sum_{g \in G} c_g g$ элементов группы G с коэффициентами $c_g \in \mathbb{k}$. Групповая операция в G задаёт на $\mathbb{k}G$ структуру ассоциативной $\mathbb{k}$ -алгебры с умножением

$$\left(\sum_g a_g g\right) \left(\sum_h b_h h\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{gh} a_g b_h gh = \sum_f c_f f, \quad \text{где } c_f = \sum_{gh=f} a_g b_h. \quad (3-1)$$

Эта алгебра называется *групповой алгеброй* группы G над полем $\mathbb{k}$. Группа G вложена в алгебру $\mathbb{k}G$ в качестве мультипликативной подгруппы. Всякое линейное представление группы G

$$\varrho : G \rightarrow \text{GL}(V) \quad (3-2)$$

однозначно продолжается по линейности до представления групповой алгебры

$$\tilde{\varrho} : \mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(V), \quad (3-3)$$

образ которого является одновременно и линейной, и ассоциативной оболочкой всех операторов из группы G . Наоборот, каждое представление (3-3), будучи ограниченным на подгруппу $G \subset \mathbb{k}G$, задаёт представление (3-2). Поэтому в дальнейшем мы будем обозначать эти представления одной и той же буквой ϱ , считая, что $\varrho_{\sum x_g g} = \sum x_g \varrho_g$.

ПРИМЕР 3.1 (ГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП)

Групповая алгебра $\mathbb{k}\mathbb{Z}$ бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ изоморфна алгебре $\mathbb{k}[t, t^{-1}]$ полиномов Лорана, а групповая алгебра $\mathbb{k}\mathbb{Z}/(n)$ циклической группы порядка n — алгебре вычетов $\mathbb{k}[t]/(t^n - 1)$. Первый изоморфизм действует на базис из групповых элементов по правилу $m \mapsto t^m$, второй — по правилу $[m]_n \mapsto [t^m]_{t^n-1}$, где в обоих случаях $m \in \mathbb{Z}$.

3.1.1. Проектор на инварианты. Если $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$, то в групповой алгебре $\mathbb{k}G$ имеется оператор усреднения

$$e_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathbb{k}G. \quad (3-4)$$

Каждое линейное представление $\varrho : \mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(V)$ переводит элемент (3-4) в проектор на подмодуль G -инвариантов¹ $V^G \subset V$ представления ϱ . Обратите внимание, что $g e_1 = e_1 g$ для всех $g \in G$, т. е. элемент (3-4) лежит в центре²

$$Z_{\mathbb{k}G} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{k}G \mid \forall x \in \mathbb{k}G \, zx = xz\} = \{z \in \mathbb{k}G \mid \forall g \in G \, gzg^{-1} = z\}$$

групповой алгебры $\mathbb{k}G$.

¹См. форм. (2-4) на стр. 15.

²Напомним, что *центром* кольца K называется множество всех элементов, коммутирующих со всеми элементами K .

3.1.2. Центр групповой алгебры представляет собой коммутативную подалгебру в $\mathbb{k}G$, состоящую из всех таких линейных комбинаций $z = \sum_h z_h h$, что $z_{g^{-1}hg} = z_h$ для всех $g, h \in G$. Иными словами, элемент z централен, если и только если его коэффициенты z_h постоянны на классах сопряжённости. Мы заключаем, что элементы

$$z_C = \sum_{h \in C} h, \quad (3-5)$$

где C пробегает множество Cl_G классов сопряжённости группы G , образуют базис векторного пространства $Z_{\mathbb{k}G}$ над $\mathbb{k}$, и $\dim_{\mathbb{k}} Z_{\mathbb{k}G} = |\text{Cl}_G|$. Мы будем называть это число *числом классов*.

Каждое линейное представление $\mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(V)$ переводит все центральные элементы групповой алгебры в эндоморфизмы пространства V , перестановочные со всеми операторами из группы G . Из теоремы Бернсайда¹ вытекает, что в любом неприводимом представлении над алгебраически замкнутым полем все центральные элементы действуют умножениями на скаляры.

3.2. Изотипное разложение регулярного представления. Зафиксируем в каждом классе изоморфных неприводимых представлений группы G какого-нибудь представителя $\lambda : G \rightarrow \text{GL}(U_\lambda)$ и обозначим множество всех таких представителей через $\text{Ir}(G)$. По [теор. 2.1](#) на стр. 16 и [предл. 1.3](#) на стр. 10 всякий конечномерный G -модуль V обладает *изотипным разложением*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(G)} V_\lambda, \quad (3-6)$$

каждая компонента V_λ которого является суммой всех простых подмодулей в V , изоморфных данному $U_\lambda \in \text{Ir}(G)$. Для каждого $\lambda \in \text{Ir}(G)$ обозначим λ -изотипную компоненту *левого регулярного представления* группы G в $\mathbb{k}G$ по правилу $g : x \mapsto gx$ через $I_\lambda \subset \mathbb{k}G$. Таким образом,

$$\mathbb{k}G = \bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(G)} I_\lambda. \quad (3-7)$$

Будучи G -подмодулем левого регулярного представления, изотипная компонента I_λ является левым идеалом алгебры $\mathbb{k}G$. Так как правое умножение $h : \mathbb{k}G \rightarrow \mathbb{k}G, x \mapsto xh$, на любой элемент $h \in G$ перестановочно с левым действием G на $\mathbb{k}G$, каждая изотипная компонента левого регулярного представления переводится правым умножением на любой элемент группы в себя по [предл. 1.2](#) на стр. 10. Поэтому каждая изотипная компонента I_λ является двусторонним идеалом алгебры $\mathbb{k}G$. Так как $I_\lambda \cap I_\varrho = 0$ при $\lambda \neq \varrho$, и $I_\lambda I_\varrho \subset I_\lambda \cap I_\varrho$, мы заключаем, что

$$I_\lambda I_\varrho = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho. \quad (3-8)$$

Обозначим через $e_\lambda \in I_\lambda$ компоненту единичного элемента $e \in G$ в разложении (3-7), так что

$$e = \sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} e_\lambda, \quad \text{где} \quad e_\lambda \in I_\lambda. \quad (3-9)$$

Из (3-8) вытекает, что для каждого $x_\lambda \in I_\lambda$ выполняются соотношения $x_\lambda e_\mu = e_\mu x_\lambda = 0$ при $\lambda \neq \mu$, а также $x_\lambda e_\lambda = x_\lambda e = x_\lambda$ и $e_\lambda x_\lambda = e x_\lambda = x_\lambda$. В частности, $e_\lambda^2 = e_\lambda$ и $e_\lambda e_\varrho = 0$, когда $\varrho \neq \lambda$. Элементы e_λ называются *изотипными проекторами* (или *неприводимыми идемпотентами*) групповой алгебры $\mathbb{k}G$. Записывая произвольный $x \in \mathbb{k}G$ как $x = \sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} x_\lambda$, где $x_\lambda \in I_\lambda$, мы видим, что $x e_\lambda = x_\lambda = e_\lambda x$. Таким образом, все изотипные проекторы e_λ лежат в центре групповой алгебры, а каждая изотипная компонента $I_\lambda = (e_\lambda)$ является главным двусторонним идеалом, порождённым e_λ .

¹См. [сл. 1.5](#) на стр. 10.

Лемма 3.1

Любое линейное представление $\varrho : \mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(V)$ с нулевой λ -изотипной компонентой переводит изотипный идеал $I_\lambda \subset \mathbb{k}G$ в нуль.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом в $\mathbb{k}G$, для любого вектора $v \in V$ подпространство $I_\lambda v = \{fv \mid f \in I_\lambda\}$ является G -подмодулем в V , и правило $f \mapsto fv$ задаёт сюръективный гомоморфизм G -модулей $I_\lambda \twoheadrightarrow I_\lambda v$. Поскольку такой гомоморфизм переводит λ -изотипный подмодуль в λ -изотипный, подмодуль $I_\lambda v$ содержится в изотипной компоненте V_λ представления V . Если она нулевая, то $I_\lambda v = 0$ для всех $v \in V$. $\square$

Теорема 3.1 (Теорема Машке)

Над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ гомоморфизм алгебр

$$\text{rep} : \mathbb{k}G \rightarrow \prod_{\lambda \in \text{Ir}(G)} \text{End}(U_\lambda), \quad (3-10)$$

переводящий элемент $f \in \mathbb{k}G$ в набор операторов $\lambda_f : U_\lambda \rightarrow U_\lambda$, которыми он действует во всех неприводимых представлениях группы G , является изоморфизмом алгебр. Ограничение гомоморфизма (3-10) на изотипный идеал $I_\lambda \subset \mathbb{k}G$ задаёт изоморфизм алгебр $I_\lambda \simeq \text{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Сначала установим инъективность гомоморфизма rep . Если элемент $h \in \mathbb{k}G$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще на любом конечномерном G -модуле, в частности — в левом регулярном представлении. Но $f \cdot 1 = 0$ влечёт $f = 0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что по лем. 3.1 каждое неприводимое представление $\lambda : \mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения (3-7) за исключением I_λ . Однако по теореме Бернсайда¹ оно эпиморфно. Поэтому ограничение $\text{rep}|_{I_\lambda} = \lambda|_{I_\lambda} : I_\lambda \simeq \text{End}(U_\lambda)$ является изоморфизмом. В частности, неприводимых представлений U_λ имеется лишь конечное число, и каждое из них присутствует в изотипном разложении левого регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\mathbb{k}G) = \dim(I_\lambda)/\dim(U_\lambda) = \dim \text{End}(U_\lambda)/\dim U_\lambda = \dim U_\lambda$. Для доказательства сюръективности гомоморфизма rep остаётся заметить, что по уже доказанному для любого набора операторов $\varphi_\lambda \in \text{End}(U_\lambda)$ найдутся такие элементы $f_\lambda \in I_\lambda$, что $\lambda(f_\lambda) = \varphi_\lambda$. Поскольку $\varrho(f_\lambda) = 0$ для всех неприводимых $\varrho \neq \lambda$, мы заключаем, что $\text{rep}(\sum_\lambda f_\lambda) = \prod_\lambda \varphi_\lambda$. $\square$

Следствие 3.1

Число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$ конечно и равно числу классов сопряжённости $|\text{Cl}_G|$ группы G , а сумма квадратов их размерностей равна $|G|$. При этом каждый неприводимый G -модуль U_λ входит в разложение регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\mathbb{k}G) = \dim U_\lambda$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что размерность центра прямой суммы матричных алгебр равна количеству слагаемых, второе — из равенства размерностей правого и левого пространств в (3-10). $\square$

Следствие 3.2

Неприводимые идемпотенты $e_\lambda \in I_\lambda$ из форм. (3-9) на стр. 24 образуют базис в центре групповой алгебры и действуют тождественным оператором в неприводимом представлении λ и

¹См. сл. 1.5 на стр. 10.

нулевым оператором во всех остальных неприводимых представлениях. Произвольное линейное представление $\mathbb{k}G \rightarrow \text{End}(V)$ переводит e_λ в G -инвариантный проектор на λ -изотипную компоненту $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Так как $x_\lambda e_\lambda = e_\lambda x_\lambda = x_\lambda$ для всех $x_\lambda \in I_\lambda$, изоморфизм

$$\text{rep}|_{I_\lambda} = \lambda|_{I_\lambda} : I_\lambda \xrightarrow{\sim} \text{End}(U_\lambda)$$

переводит e_λ в единицу Id_{U_λ} алгебры $\text{End}(U_\lambda)$. Все остальные неприводимые представления переводят $e_\lambda \in I_\lambda$ в нуль по [лем. 3.1](#) на стр. 25. Это доказывает второе и третье утверждения. Первое утверждение вытекает из второго по [теор. 3.1](#), ибо центр прямой суммы $\bigoplus \text{End}(U_\lambda)$ состоит из наборов скалярных операторов $c_\lambda \text{Id}_{U_\lambda}$, где $c_\lambda \in \mathbb{k}$, и операторы $\text{rep}(e_\lambda)$ образуют базис этого пространства. $\square$

Пример 3.2 (простенькие представления симметрических групп)

Поскольку сопоставление перестановке $g \in S_n$ её циклового типа устанавливает биекцию между классами сопряжённых элементов в S_n и n -клеточными диаграммами Юнга¹, неприводимые представления симметрической группы S_n биективно соответствуют диаграммам Юнга из n клеток. Каждая симметрическая группа S_n имеет два одномерных представления: тривиальное и *знаковое*, в котором каждая перестановка g действует умножением на знак $\text{sgn}(g)$. Если $\text{char } \mathbb{k} > n$, операторы симметризации и альтернирования

$$\text{sym}_n = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} g \quad \text{и} \quad \text{alt}_n = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) g$$

являются S_n -инвариантными проекторами на тривиальную и знаковую изотипные компоненты любого S_n -модуля.

УПРАЖНЕНИЕ 3.1. Убедитесь в этом.

Тавтологическое n -мерное представление группы S_n перестановками стандартных базисных векторов e_i пространства $\mathbb{k}^n$ имеет тривиальный одномерный подмодуль, порождённый суммой $e = e_1 + \dots + e_n$ всех базисных векторов. Индуцированное $(n-1)$ -мерное представление в факторпространстве $\mathbb{k}^n / \mathbb{k}e$ называется *симплициальным*², поскольку над полем $\mathbb{R}$ его образ представляет собою полную группу правильного $(n-1)$ -мерного симплекса в $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n / \mathbb{R} \cdot e$ с центром в нуле и вершинами в классах векторов e_i по модулю e .

УПРАЖНЕНИЕ 3.2. Покажите, что симплициальное представление неприводимо.

Неприводимые представления группы S_3 , имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным и знаковым одномерными представлениями и двумерным представлением U_Δ группой треугольника в силу равенства $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$. Инвариантный проектор на U_Δ -изотипную компоненту любого представления задаётся оператором

$$\pi_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \text{sym}_3 - \text{alt}_3 = 1 - \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} (1 + \text{sgn}(g))g = 1 - \frac{1}{3} (1 + \tau + \tau^2),$$

где $\tau = |123\rangle \in S_3$ это цикл длины 3.

¹См. пример 10.15 на с. 181 лекций [\[Алг 1\]](#).

²При $n = 2$ оно совпадает со знаковым.

Упражнение 3.3. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что π_Δ идемпотентен и лежит в центре, аннулирует тривиальный и знаковый модули, и тождественно действует в представлении группой треугольника.

У группы S_4 , имеющей 5 классов сопряжённости, кроме одномерного тривиального, одномерного знакового и трёхмерного симплициального¹ представления несобственной группой тетраэдра² имеется ещё одно трёхмерное представление собственной группой куба³, а также двумерное представление группой треугольника, возникающее из факторизации⁴ $S_4 \rightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $V_4 \subset S_4$. Равенство $2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3^2 + 2^2 = 24$ указывает на то, что это хорошие кандидаты на полный список всех неприводимых представлений.

Упражнение 3.4. Покажите, что два трёхмерных представления неприводимы, не изоморфны и получаются друг из друга тензорным умножением на знаковое представление.

3.3. Каноническое скалярное произведение. Левое регулярное представление

$$L : \mathbb{k}G \hookrightarrow \text{End}(\mathbb{k}G),$$

в котором каждый элемент $f \in \mathbb{k}G$ действует левым умножением $x \mapsto fx$, вкладывает алгебру $\mathbb{k}G$ в алгебру всех $\mathbb{k}$ -линейных эндоморфизмов векторного пространства $\mathbb{k}G$. На алгебре эндоморфизмов имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что для конечномерного векторного пространства V билинейная форма $\text{End}(V) \times \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{k}$, $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$, принимает на паре разложимых операторов⁵ $A = \alpha \otimes a$ и $B = \beta \otimes b$, где $a, b \in V$, $\alpha, \beta \in V^*$, значение $\alpha(b) \cdot \beta(a)$, равное их полной свёртке⁶, и выведите отсюда, что эта форма симметрична и невырождена.

Ограничение следа композиции на образ $L(\mathbb{k}G) \subset \text{End}(\mathbb{k}G)$ левого регулярного представления задаёт на $\mathbb{k}G$ симметричное скалярное произведение

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(L_f L_g) = \text{tr}(L_{fg}). \quad (3-11)$$

Упражнение 3.6. Покажите, что левое и правое умножение на заданный элемент сопряжены друг другу относительно скалярного произведения: $(fg, h) = (f, gh)$ и выведите отсюда, что ортогональное дополнение к любому левому идеалу в $\mathbb{k}G$ является правым идеалом, а ортогональное дополнение к правому — левым⁷.

Так как след левого умножения на единицу группы равен $|G|$, а умножение на любой другой элемент группы бесследно, скалярные произведения элементов группы задаются формулой

$$(g, h) = \begin{cases} |G| & \text{при } h = g^{-1} \\ 0 & \text{при } h \neq g^{-1}. \end{cases} \quad (3-12)$$

¹См. прим. 2.1 на стр. 13.

²См. пример 10.4 на с. 172 лекций [Алг 1].

³См. пример 10.10 на с. 177 лекций [Алг 1].

⁴См. пример 10.9 на с. 176 лекций [Алг 1].

⁵См. пример 13.3 на с. 214 лекций [Алг 1].

⁶См. раздел 14.1 на с. 222 лекций [Алг 1].

⁷Тем самым, ортогональное дополнение к любому двустороннему идеалу тоже двусторонний идеал.

Таким образом, скалярное произведение невырождено¹, и двойственным базисом к базису из групповых элементов g является базис из элементов $g^\times = g^{-1}/|G|$. В частности, каждый элемент $z \in \mathbb{K}G$ разлагается по базису из групповых элементов в виде

$$z = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g^{-1}, z) \cdot g \quad (3-13)$$

Изоморфизм $\text{ger} : \mathbb{K}G \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \text{Ir}(G)} \text{End}(U_\lambda)$ из теоремы Машке² позволяет выразить скалярное произведение (3-11) через следы действий в неприводимых представлениях.

Предложение 3.1 (Формула Планшереля)

Для всех $f, g \in \mathbb{K}G$ выполняется равенство $(f, g) = \sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} \dim(U_\lambda) \cdot \text{tr}(\lambda_{fg})$.

Доказательство. Вычислим $\text{tr}(L_{fg})$ в алгебре $\bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(G)} \text{End}(U_\lambda)$. Он равен сумме следов левого умножения на λ_{fg} в $\text{End}(U_\lambda)$ по всем неприводимым представлениям λ . След левого умножения на матрицу M в матричной алгебре $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$ равен $n \cdot \text{tr}(M)$, поскольку каждая матричная единица E_{ij} входит в ME_{ij} с коэффициентом m_{ii} . $\square$

Следствие 3.3

Базисные идемпотенты составляют ортогональный базис центра групповой алгебры и имеют скалярные квадраты $(e_\lambda, e_\lambda) = \dim^2 U_\lambda$. $\square$

Следствие 3.4

Разложение $\mathbb{K}G = \bigoplus_{\lambda \in \text{Ir}(G)} I_\lambda$ левого регулярного представления в прямую сумму изотипных подмодулей является *ортогональным* разложением, и неприводимые идемпотенты являются *ортогональными проекциями*³ единицы $e \in \mathbb{K}G$ на изотипные подпространства I_λ .

Следствие 3.5

Базисный идемпотент e_λ выражается через элементы группы по формуле

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\lambda_{g^{-1}}) \cdot g, \quad (3-14)$$

и каждое представление $\mathbb{K}G \rightarrow \text{End}(V)$ переводит правую часть этого равенства в G -инвариантный проектор на λ -изотипный подмодуль $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Комбинируя форм. (3-13) на стр. 28 с формулой Планшереля, получаем

$$\begin{aligned} e_\lambda &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} (g^{-1}, e_\lambda) \cdot g = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{\mu \in \text{Ir}(G)} \dim(U_\mu) \cdot \text{tr}(\mu(g^{-1}e_\lambda)) = \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{\mu \in \text{Ir}(G)} \dim(U_\mu) \cdot \text{tr}(\mu(g^{-1})\mu(e_\lambda)) = \frac{\dim(U_\lambda)}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\lambda(g^{-1})) \end{aligned}$$

(в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\mu(e_\lambda) = 0$ при $\mu \neq \lambda$, а $\lambda(e_\lambda) = \text{Id}_{U_\lambda}$ по сл. 3.2 на стр. 25). $\square$

¹ Отметим, что если характеристика поля делит порядок группы, то это не так.

² См. теор. 3.1 на стр. 25.

³ См. раздел 10.4 на с. 137 лекций [Гео 1].

3.4. Характеры. Линейная форма на $\mathbb{k}G$, сопоставляющая элементу групповой алгебры след его действия на пространстве V линейного представления $\varrho : G \rightarrow GL(V)$ называется *характером*¹ представления ϱ и обозначается

$$\chi_{\varrho} : \mathbb{k}G \rightarrow \mathbb{k}, \quad \chi_{\varrho}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr } \varrho_f. \quad (3-15)$$

Так как след оператора не меняется при сопряжении, характер любого представления постоянен на классах сопряжённых элементов, и изоморфные представления имеют равные характеры. Формула (3-14) для проектора на λ -изотипную компоненту переписывается в терминах характеров как

$$e_{\lambda} = \frac{\dim U_{\lambda}}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\lambda}(g^{-1}) \cdot g, \quad (3-16)$$

ПРИМЕР 3.3 (ХАРАКТЕРЫ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ)

Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g . В частности, характер регулярного представления имеет вид

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & \text{если } g = e \\ 0 & \text{если } g \neq e. \end{cases}$$

Значение характера тавтологического представления симметрической группы S_n перестановками базисных векторов координатного пространства $\mathbb{k}^n$ на перестановке циклового типа λ равно $m_1(\lambda)$, т. е. числу строк длины 1 в диаграмме λ . Поскольку это представление является прямой суммой тривиального одномерного, с тождественно единичным характером, и симплициального, мы заключаем, что значение симплициального характера группы S_n на классе сопряжённости C_{λ} , состоящем из перестановок циклового типа λ , равно $\chi_{\Delta}(C_{\lambda}) = m_1(\lambda) - 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.7. Убедитесь, что характеры неприводимых представлений симметрической группы S_3 задаются таблицей

классы			
число элементов	1	3	2
значения характеров:			
тривиального	1	1	1
знакового	1	-1	1
треугольного	2	0	-1

(3-17)

и что проекторы на изотипные компоненты, вычисленные при помощи этой таблицы по формуле (3-16), совпадают с описанными ранее в [прим. 3.2](#) на стр. 26.

¹Не следует путать эти *аддитивные* характеры с мультипликативными характерами абелевых групп, обсуждавшимися в [п° 2.4](#) на стр. 20. Только характеры одномерных представлений являются мультипликативными гомоморфизмами.

ПРИМЕР 3.4 (неприводимые характеры S_4)

В геометрически заданных представлениях следы можно вычислять складывая собственные значения соответствующих поворотов и отражений. Например, значения характеров пяти представлений симметрической группы S_4 из прим. 3.2 задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	-1	1	1	-1
тетраэдрального	3	1	-1	0	-1
кубического	3	-1	-1	0	1
треугольного	2	0	2	-1	0

(3-18)

четвёртая строка которой объясняется так: след единицы равен размерности представления; одна транспозиция и пара независимых транспозиций действуют поворотами на 180° вокруг прямой, и собственные числа такого вращения суть 1 , -1 и -1 ; цикл длины 3 и цикл длины 4 действуют поворотами на 120° и 90° соответственно, и их собственные числа суть 1 , ω , ω^2 и 1 , i , $-i$.

ЛЕММА 3.2

Для любых двух представлений V , W группы G с характерами χ_V и χ_W

$$\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g) \quad (3-19)$$

$$\chi_{V \otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g) \quad (3-20)$$

$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \quad (3-21)$$

$$\chi_{\text{Hom}(V, W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g) \quad (3-22)$$

Доказательство. Поскольку любой оператор g из конечной группы полупрост, в пространствах V и W имеются базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ из собственных векторов g . Пусть α_i и β_j — соответствующие наборы собственных чисел. Набор собственных чисел g в представлении $V \oplus W$ получается объединением этих наборов, откуда следует (3-19). Собственными числами g в представлении $V \otimes W$ являются всевозможные попарные произведения $\alpha_i\beta_j$, что даёт (3-20). Формула (3-21) следует из того, что матрица g в двойственном представлении транспонирована к матрице g^{-1} в исходном (см. н° 2.1). Последняя формула следует из двух предыдущих. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.8. Докажите, что производящие функции для характеров симметрических и внешних степеней представления $\varrho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ имеют вид:

$$\sum_{v \geq 0} \chi_{\Lambda^v V}(g) t^v = \det(1 + t \varrho(g)) \quad \text{и} \quad \sum_{v \geq 0} \chi_{S^v V}(g) t^v = \det(1 - t \varrho(g))^{-1}.$$

Следствие 3.6

Характер любого представления V выражается через неприводимые характеры χ_λ как

$$\chi_V = \sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} m_\lambda(V) \cdot \chi_\lambda \quad (3-23)$$

где $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$ обозначает кратность простого G -модуля U_λ в V . $\square$

3.5. Преобразование Фурье и алгебра функций на группе. Так как любая линейная форма на векторном пространстве однозначно задаётся своими значениями на базисных векторах, пространство $\mathbb{k}^G$ функций $G \rightarrow \mathbb{k}$ двойственно пространству $\mathbb{k}G$: каждая функция $\varphi : G \rightarrow \mathbb{k}$ задаёт линейную форму $\varphi(\sum x_g \cdot g) = \sum x_g \varphi(g)$, $\mathbb{k}$ -линейно продолжаящую φ с G на $\mathbb{k}G$. С другой стороны, скалярное произведение¹ на $\mathbb{k}G$ задаёт невырожденную корреляцию²

$$\mathbb{k}G \simeq \mathbb{k}G^*, \quad f \mapsto (f, *), \quad (3-24)$$

которая сопоставляет каждому вектору $f \in \mathbb{k}G$ линейную форму $\mathbb{k}G \rightarrow \mathbb{k}$, задаваемую скалярным умножением на этот вектор. Согласно формулам (3-12) и (3-13) на стр. 28 изоморфизм (3-24) переводит элементы $g^\times = g^{-1}/|G| \in \mathbb{k}G$ в базис векторного пространства $\mathbb{k}G^*$, двойственный к состоящему из элементов группы базису в $\mathbb{k}G$. Комбинируя обратный к (3-24) изоморфизм $\mathbb{k}G^* \simeq \mathbb{k}G$ с описанным выше отождествлением $\mathbb{k}^G \simeq \mathbb{k}G^*$, получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Phi : \mathbb{k}^G \simeq \mathbb{k}G, \quad \varphi \mapsto \hat{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \cdot g, \quad (3-25)$$

который называется *преобразованием Фурье*. По форм. (3-16) на стр. 29 преобразование Фурье переводит неприводимые характеры в кратности неприводимых идемпотентов:

$$\hat{\chi}_\lambda = e_\lambda / \dim U_\lambda. \quad (3-26)$$

Перенесём с помощью изоморфизма (3-25) скалярное произведение из $\mathbb{k}G$ в пространство функций на группе, т. е. положим

$$(\varphi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g, h \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(h^{-1})(g, h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1}) \psi(g). \quad (3-27)$$

Из формулы (3-26) и сл. 3.3 на стр. 28 немедленно вытекают следующие результаты, полностью сводящие определение кратностей вхождения неприводимых G -модулей в данное представление к формальным линейным вычислениям с характерами.

Следствие 3.7

Неприводимые характеры образуют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. $\square$

Следствие 3.8

$\dim \text{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$ для всех G -модулей V и W .

Доказательство. Обе части равны $\sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} m_\lambda(V) m_\lambda(W)$: левая — по сл. 1.6 на стр. 11, правая — в силу сл. 3.6 и ортонормальности характеров. $\square$

Следствие 3.9

Кратность вхождения неприводимого представления U_λ в произвольное представление V равна скалярному произведению их характеров: $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda, \chi_V)$.

¹См. форм. (3-11) на стр. 27.

²См. раздел 13.1.2 на с. 172 лекций [Гео 1].

Доказательство. Скалярно умножаем обе части (3-23) на χ_λ и пользуемся ортонормальностью характеров. $\square$

Следствие 3.10

Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Доказательство. В силу ортонормальности неприводимых характеров из сл. 3.6 вытекает, что $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{\lambda \in \text{Ir}(G)} m_\lambda^2(V)$, где все $m_\lambda(V)$ целые неотрицательные. Такая сумма равна единице только если она состоит из одного слагаемого, равного единице. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3.9. Опишите все неприводимые представления групп A_5 и S_5 и вычислите их характеры.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. (СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ХАРАКТЕРОВ) Так как собственные числа всех операторов из конечной группы G являются корнями $|G|$ -й степени из единицы, в любом представлении группы G над полем $\mathbb{C}$ следы обратных друг другу элементов g и g^{-1} комплексно сопряжены. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ для любого характера χ . Это позволяет переписать скалярное произведение комплексных характеров в виде стандартной эрмитовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \cdot \chi_2(g).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. (СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ХАРАКТЕРОВ ГРУППЫ S_n) Обратные друг другу перестановки $g, g^{-1} \in S_n$ имеют одинаковый цикловой тип и, стало быть, сопряжены в S_n . Поэтому $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$ для любого характера χ . Это позволяет переписать скалярное произведение характеров симметрической группы S_n в виде стандартной евклидовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi_1(g) \cdot \chi_2(g).$$

В частности, над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ оно положительно определено.

ПРИМЕР 3.5 (ВНЕШНИЕ СТЕПЕНИ СИМПЛИЦИАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ S_n)

Покажем, что все внешние степени $(n-1)$ -мерного симплициального¹ представления Δ_{n-1} симметрической группы S_n неприводимы. Разложение тавтологического представления τ группы S_n перестановками базисных векторов в $\mathbb{K}^n$ на неприводимые имеет вид $\tau = \mathbb{1} \oplus \Delta_{n-1}$. Поэтому его m -тая внешняя степень $\Lambda^m \tau \simeq \Lambda^m \Delta_{n-1} \oplus \Lambda^{m-1} \Delta_{n-1}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3.10. Покажите, что $\Lambda^m(U \oplus W) \simeq \bigoplus_{\alpha+\beta=m} \Lambda^\alpha U \otimes \Lambda^\beta W$.

Достаточно убедиться, что скалярный квадрат $(\chi_{\Lambda^m \tau}, \chi_{\Lambda^m \tau}) = 2$. В стандартном базисе

$$e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}, \text{ где } i_1 < \dots < i_m,$$

пространства $\Lambda^m(\mathbb{K}^n)$ след перестановки σ равен сумме знаков $\text{sgn } \sigma|_I$ ограничений перестановки σ на все такие подмножества I , что $\sigma(I) \subset I$. Поэтому

$$\begin{aligned} (\chi_{\Lambda^m \tau}, \chi_{\Lambda^m \tau}) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{I: \sigma(I) \subset I} \text{sgn}(\sigma|_I) \right) \cdot \left(\sum_{J: \sigma(J) \subset J} \text{sgn}(\sigma|_J) \right) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{I, J: \substack{\sigma(I) \subset I \\ \sigma(J) \subset J}} \text{sgn}(\sigma|_I) \cdot \text{sgn}(\sigma|_J) = \frac{1}{n!} \sum_{I, J} \sum_{\sigma: \substack{\sigma(I) \subset I \\ \sigma(J) \subset J}} \text{sgn}(\sigma|_I) \cdot \text{sgn}(\sigma|_J). \end{aligned}$$

¹См. прим. 2.1 на стр. 13.

Совокупность всех таких перестановок σ , что $\sigma(I) \subset I$ и $\sigma(J) \subset J$, распадается в прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \setminus (I \cap J)$, $J \setminus (I \cap J)$, $\{1, 2, \dots, n\} \setminus (I \cup J)$ и изоморфное $S_k \times S_{m-k} \times S_{m-k} \times S_{n-2m+k}$, где $k = k(I, J) = |I \cap J|$. Поскольку $\text{sgn}(\sigma|_I) \cdot \text{sgn}(\sigma|_J) = \text{sgn}(\sigma|_{I \cap J})^2 \cdot \text{sgn}(\sigma|_{I \setminus (I \cap J)}) \cdot \text{sgn}(\sigma|_{J \setminus (I \cap J)}) = \text{sgn}(\sigma|_{I \setminus (I \cap J)}) \cdot \text{sgn}(\sigma|_{J \setminus (I \cap J)})$, предыдущую сумму можно переписать как

$$\frac{1}{n!} \sum_{I, J} k! \cdot (n - 2m + k)! \cdot \left(\sum_{g \in S_{m-k}} \text{sgn}(g) \right) \cdot \left(\sum_{h \in S_{m-k}} \text{sgn}(h) \right). \quad (3-28)$$

Последние два множителя отличны от нуля только при $k = m$ и $k = m - 1$. Проверим, что вклад всех слагаемых с такими значениями $k = |I \cap J|$ в сумму (3-28) равен по единице в каждом из двух случаев. В первом случае $I = J$ и соответствующий кусок суммы (3-28) имеет вид

$$\frac{1}{n!} \sum_I m! \cdot (n - m)!.$$

Он состоит из $\binom{n}{m}$ одинаковых слагаемых, обратных к $\binom{n}{m}$, и их сумма равна 1. Во втором случае $|I \cap J| = (m - 1)$ и соответствующий кусок суммы (3-28) равен

$$\frac{1}{n!} \sum_{I \cap J} \sum_{i \neq j, i, j \notin I \cap J} (m - 1)! \cdot (n - m - 1)!.$$

Он состоит из $(n - m + 1)(n - m) \binom{n}{m-1}$ одинаковых слагаемых вида

$$\frac{(m - 1)! \cdot (n - m - 1)!}{n!} = \binom{n}{m-1}^{-1} \cdot \frac{1}{(n - m + 1)(n - m)},$$

сумма которых тоже равна 1.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Для всех $w \in W$ и $u \in U$ вектор $f(w + u) = fw + fu$ лежит в том же классе, что и fw , поскольку $fu \in U$.

Упр. 1.2. Факторкольцо $\mathbb{k}[t]/(t^2)$, на котором $\mathbb{k}[t]$ действует умножениями.

Упр. 1.4. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}'$ является объединение всех модулей цепи.

Упр. 1.5. Пусть $w = u + v$. Тогда $fw = fu + fv$ и $fv \in V$. Поэтому $\pi(fw) = fu = f\pi(w)$.

Упр. 1.6. Пусть $\pi(S) \neq 0$ для простого подмодуля $U \subset W$. Поскольку $f\pi(s) = \pi(fs) \in \pi(S)$ для всех $f \in R$ и $s \in S$, подпространство $\pi(S)$ является R -подмодулем. Для любого R -подмодуля $M \subset \pi(S)$ пересечение $S \cap \pi^{-1}(M) = \{s \in S \mid \pi(s) \in M\}$ является R -подмодулем в S : если $\pi(s) \in M$, то $\pi(fs) = f\pi(s) \in M$ для всех $f \in R$ и $s \in S$. Так как в S нет ненулевых собственных подмодулей, их нет и в $\pi(S)$.

Упр. 1.7. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}$ является объединение или, что то же самое, прямая сумма всех модулей цепи.

Упр. 1.8. Утверждения (а) и (б) проверяются непосредственно; (в) проверяется так: если $\varphi(v) = 0$, то $\varphi(fv) = f\varphi(v) = f(0) = 0$ для всех $f \in R$, а если $v = \varphi(u)$, то $fv = f\varphi(u) = \varphi(fu)$ для всех $g \in R$; Утверждение (г) фактически было доказано в [упр. 1.6](#).

Упр. 1.9. $\varphi\psi = \sum_{\alpha,\beta} \iota_\alpha \varphi_{\alpha\beta} \pi_\beta \circ \sum_{\mu,\nu} \iota_\mu \varphi_{\mu\nu} \pi_\nu = \sum_{\alpha,\nu} \iota_\alpha p_{\alpha\nu} \pi_\nu$, где $p_{\alpha\nu} = \sum_\eta \varphi_{\alpha\eta} \psi_{\eta\nu}$, так как

$$\pi_\beta \iota_\mu = \begin{cases} \text{Id}_{V_\eta} & \text{если } \beta = \mu = \eta \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Упр. 1.10. Из равенства $\text{Ass}(R) = \text{End}(V)$ вытекает, что A_R действует транзитивно на ненулевых векторах пространства V , т. е. A_R -орбита любого ненулевого вектора совпадает со всем пространством V .

Упр. 1.12. Покажите, что $\text{Hom}_{\mathbb{k}[t]}(\mathbb{k}[t]/(p), \mathbb{k}[t]/(p^n)) \simeq \mathbb{k}[t]/(p)$, причём классу $[h]_p$ из правой части отвечает гомоморфизм $\varphi_h: \mathbb{k}[t]/(p) \rightarrow \mathbb{k}[t]/(p^n)$, $[1]_p \mapsto [p^{n-1}h]_{p^n}$, после чего убедитесь, что образ канонической свёртки из форм. (1-7) на стр. 10 порождается классом $[p^{n-1}]_{p^n}$ и изоморфен $\mathbb{k}[t]/(p)$.

Упр. 2.5. Поскольку правило $g: \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$ линейно по φ , его достаточно проверять только на разложимых $\varphi = \xi \otimes w$ с $\xi \in U^*$, $w \in W$. По определению

$$g^\times \otimes \lambda(g): \xi \otimes w \mapsto g_{g^{-1}}^* \xi \otimes \lambda_g w = (\xi \circ g^{-1}) \otimes (gw).$$

Этот оператор переводит $u \in U$ в $\xi(g^{-1}u) \cdot gw = g(\xi(g^{-1}u) \cdot w) = g \circ (\xi \otimes w) \circ g^{-1}(u)$.

Упр. 2.8. В любом ортогональном или унитарном представлении ортогональное дополнение $U^\perp$ к каждому G -инвариантному подпространству также G -инвариантно.

Упр. 2.9. Элемент ϑ выражается через σ и τ как $\vartheta = \sigma\tau$, а из соотношений $\sigma^2 = e$ и $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$ вытекает, что $\tau^2 = e$.

Упр. 2.11. Если $fu = u$, а $fw = -w$, то $(u, w) = (fu, fw) = -(u, w)$, откуда $(u, w) = 0$.

Упр. 2.16. Пусть множество различных гомоморфизмов $\psi_\nu: G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ линейно зависимо. Рассмотрим линейную зависимость $\lambda_1\psi_1 + \dots + \lambda_n\psi_n = 0$ с минимально возможным числом слагаемых

и какой-нибудь элемент $h \in G$, на котором $\psi_1(h) \neq \psi_2(h)$. Поскольку для каждого $g \in G$ выполняется равенство $\sum_i \lambda_i \psi_i(h) \psi_i(g) = \sum_i \lambda_i \psi_i(hg) = 0$, имеется ещё одно линейное соотношение между функциями ψ_i с коэффициентами $\lambda_i \psi_i(h)$. Деля все коэффициенты на $\psi_1(h)$ и вычитая из первой зависимости, получаем линейную зависимость между ψ_i с нулевым коэффициентом при ψ_1 и ненулевым коэффициентом при ψ_2 . Она нетривиальна и содержит меньше слагаемых. Противоречие.

Упр. 3.4. Диагонали двумерных граней куба являются рёбрами двух центрально симметричных тетраэдров. Движения куба, осуществляющие чётную перестановку диагоналей, переводят каждый из этих двух тетраэдров в себя, осуществляя чётные перестановки их вершин. Каждое движение куба, осуществляющее нечётную перестановку его диагоналей, переводит тетраэдры друг в друга. Тензорное произведение такого движения со знаковым представлением есть ни что иное, как его композиция с центральной симметрией. Такая композиция переводит каждый из двух тетраэдров в себя и осуществляет нечётную перестановку их вершин.

Упр. 3.8. Поскольку каждый оператор $g \in G$ диагонализуем, в V существует базис $e_1, \dots, e_d$ из собственных векторов оператора g . Обозначим их собственные числа через $x_1, \dots, x_n$. Тогда базисы из мономов $e_1^{m_1} \dots e_d^{m_d}$ и грассмановых мономов $e_1 \wedge \dots \wedge e_i, n$ в пространствах $S^n V$ и $\Lambda^n V$ будут собственными для операторов $S^n g$ и $\Lambda^n g$ соответственно, и их собственными числами будут всевозможные мономы $x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$ с $m_1 + \dots + m_d = n$ и всевозможные полилинейные мономы $x_{i_1} \dots x_{i_n}$, откуда $\text{tr } S^n g = h_n(x_1, \dots, x_d)$ и $\text{tr } \Lambda^n g = e_n(x_1, \dots, x_d)$. С другой стороны, $\det(1 + tg) = \prod_i (1 + tx_i) = E(t)$ и $\det(1 - tg)^{-1} = 1/E(-t) = H(t)$ суть производящие функции для многочленов¹ e_n и h_n .

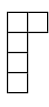
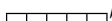
Упр. 3.9. Группа A_5 имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся на композицию с внешним автоморфизмом A_5 , который задаётся сопряжением любой транспозицией внутри S_5) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимых характеров A_5 такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	-1	-1
пятимерный	5	-1	1	0	0

Группа S_5 имеет знаковое одномерное представление sgn и симплициальное представление Δ . Представления $\text{sgn} \otimes \Delta$ и $\Lambda^2 \Delta$ тоже неприводимы, а $S^2 \Delta = \text{sgn} \oplus \Delta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое пятимерное представление, которое геометрически описывается как действие $S_5 \simeq \text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$

¹См. ?? на стр. ?? и ?? на стр. ??.

на пространстве функций с нулевой суммой значений на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$. Ответ:

классы							
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	-1	-1	1	1	-1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	-1	-1
четырёхмерный $\vartheta \otimes \alpha$	4	-2	0	1	0	1	-1
шестимерный $\Lambda^2 \vartheta$	6	0	0	0	-2	0	1
пятимерный $\zeta \subset S^2 \vartheta$	5	1	-1	-1	1	1	0
пятимерный $\zeta \otimes \alpha$	5	-1	1	-1	1	-1	0

Упр. 3.10. Выберите в $U \otimes W$ базис, согласованный с этим прямым разложением и рассмотрите соответствующий ему базис из мономов m -й степени.