

§2. Представления групп

2.1. Конструкции представлений. Действие группы G линейными преобразованиями на векторном пространстве V над полем $\mathbb{k}$ или, что то же самое, гомоморфизм групп $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G в векторном пространстве V . Пространство V называется в этом случае G -модулем. Неприводимость, неразложимость и полупростота представления V означают неприводимость, неразложимость и полупростоту пространства V относительно множества $\varrho(G)$ всех операторов из группы G . Представление, в котором все элементы группы G действуют тождественным оператором, называется *тривиальным*.

ПРИМЕР 2.1 (ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ)

Если группа G действует на множестве¹ M биективными преобразованиями $g : M \rightarrow M$, то возникает линейное представление группы G на векторном пространстве $\mathbb{k}M$ с базисом M по правилу $g : \sum_{m \in M} x_m m \mapsto \sum_{m \in M} x_m g m$, которое переставляет базисные векторы при помощи преобразований из группы G . Такие представления называются *перестановочными*. Например, симметрическая группа S_n имеет тавтологическое линейное представление на пространстве $\mathbb{k}^n$ перестановками стандартных базисных векторов $e_1, \dots, e_n$. Это представление является прямой суммой тривиального одномерного представления в пространстве $L = \mathbb{k}w$, порождённом вектором $w = \sum_i e_i$, и $(n-1)$ -мерного представления Δ_{n-1} в дополнительной к L гиперплоскости, задаваемой уравнением $\sum x_i = 0$. Последнее изоморфно представлению группы S_n на факторпространстве $\mathbb{k}^n/L$ аффинными автоморфизмами правильного $(n-1)$ -мерного симплекса с центром в нуле и вершинами в точках $[e_1]_L, \dots, [e_n]_L \in \mathbb{k}^n/L$. Поэтому оно называется *симплициальным* представлением симметрической группы S_n .

УПРАЖНЕНИЕ 2.1. Докажите, что симплициальное представление Δ_{n-1} неприводимо.

ПРИМЕР 2.2 (ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ)

Пусть, как и в предыдущем примере, группа G действует на множестве M биективными преобразованиями $g : M \rightarrow M$. На пространстве $\mathbb{k}^M$ функций на множестве M со значениями в поле $\mathbb{k}$ возникает линейное представление группы G , переводящее функцию $f : M \rightarrow \mathbb{k}$ в функцию $gf : m \mapsto f(g^{-1}m)$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.2. Убедитесь, что $(gh)f = g(hf)$ для всех $g, h \in G$ и $f \in \mathbb{k}^M$, и что вычисление значений функций в точках множества M сохраняется действием группы G в том смысле, что $f(m) = gf(gm)$ для всех $g \in G, m \in M$ и всех функций $f : M \rightarrow \mathbb{k}$.

Представление в пространстве функций имеет одномерное инвариантное подпространство постоянных функций, на котором G действует тривиально. Если множество M конечно и $\mathrm{char} \mathbb{k} \nmid |M|$, то у этого одномерного тривиального подмодуля имеется дополнительный подмодуль, состоящий из функций с нулевой суммой значений.

УПРАЖНЕНИЕ 2.3. Пусть группа S^n тавтологически действует на множестве $M = \{1, \dots, n\}$. Покажите, что представление S_n на пространстве функций $M \rightarrow \mathbb{k}$ с нулевой суммой значений изоморфно симплициальному представлению.

¹См. раздел 10.4 на с. 178 лекций [\[Алг 1\]](#).

ПРИМЕР 2.3 (ТЕНЗОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ)

Тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ нескольких G -модулей $V_1, \dots, V_n$ канонически наделяется структурой G -модуля, в котором каждый элемент $g \in G$ представляется оператором $g \otimes \dots \otimes g$, т. е. действует на разложимые тензоры по правилу:

$$g : v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto gv_1 \otimes \dots \otimes gv_n.$$

Аналогично, симметрические и внешние степени любого G -модуля V тоже являются G -модулями, в которых элементы $g \in G$ действуют на разложимые тензоры по правилам:

$$g : v_1 \cdot \dots \cdot v_n \mapsto gv_1 \cdot \dots \cdot gv_n \text{ и } g : v_1 \wedge \dots \wedge v_n \mapsto gv_1 \wedge \dots \wedge gv_n.$$

ПРИМЕР 2.4 (ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ)

Для каждого представления $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ двойственное представление $\varrho^\times : G \rightarrow \mathrm{GL}(V^*)$ определяется таким образом, чтобы свёртка векторов с ковекторами не менялась под действием G , т. е.

$$\langle \varrho_g^\times \xi, \varrho_g v \rangle = \langle \xi, v \rangle \text{ для всех } g \in G, v \in V, \xi \in V^*. \quad (2-1)$$

Так как каждый оператор ϱ_g обратим, равенство (2-1) равносильно равенству

$$\langle \varrho_g^\times \xi, v \rangle = \langle \xi, \varrho_g^{-1} v \rangle = \langle \xi, \varrho_{g^{-1}} v \rangle,$$

которое получается из (2-1) заменой v на $\varrho_g^{-1} v$ и означает, что оператор $\varrho_g^\times = \varrho_{g^{-1}}^*$ двойствен оператору $\varrho_g^{-1} = \varrho_{g^{-1}}$ и переводит ковектор $\xi \in V^*$ в композицию $\xi \circ g^{-1} : v \mapsto \xi(g^{-1} v)$. В частности, матрица оператора $\varrho_g^\times$ в двойственном базисе получается из матрицы ϱ_g обращением и транспонированием.

УПРАЖНЕНИЕ 2.4. Убедитесь, что $\varrho^\times : G \rightarrow \mathrm{GL}(V^*)$, $g \mapsto \varrho_{g^{-1}}^*$, является гомоморфизмом групп.

ПРИМЕР 2.5 (ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ)

Для любых двух представлений $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(U)$ и $\lambda : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ представление $\varrho^\times \otimes \lambda$ задаёт действие группы G на пространстве $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ всех линейных операторов $\varphi : U \rightarrow V$ по правилу

$$g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}. \quad (2-2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 2.5. Убедитесь в этом.

Подпространство неподвижных векторов представления (2-2) обозначается

$$\mathrm{Hom}_G(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi : U \rightarrow V \mid \forall g \in G \ g\varphi = \varphi g \}$$

и называется пространством G -инвариантных операторов¹.

ПРИМЕР 2.6 (РАСШИРЕНИЕ СКАЛЯРОВ)

Если поле $\mathbb{k}$ содержится в большем поле $\mathbb{F} \supset \mathbb{k}$, то каждому линейному представлению ϱ группы G в векторном пространстве V над полем $\mathbb{k}$ можно сопоставить линейное представление $\varrho^\mathbb{F}$ в векторном пространстве $V_\mathbb{F} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F} \otimes_\mathbb{k} V$ над полем² $\mathbb{F}$. Если элемент $g \in G$ действует на пространстве V оператором $\varrho_g : V \rightarrow V$, то на пространстве $V_\mathbb{F}$ он действует оператором

$$\varrho_g^\mathbb{F} = \mathrm{Id}_\mathbb{F} \otimes \varrho_g : \mathbb{F} \otimes_\mathbb{k} V \rightarrow \mathbb{F} \otimes_\mathbb{k} V,$$

¹А также сплетающих операторов, G -линейных операторов или G -гомоморфизмов.

²См. раздел 13.5 на с. 220 лекций [Алг 1].

продолжающим оператор ϱ_g по $\mathbb{F}$ -линейности.

УПРАЖНЕНИЕ 2.6. Убедитесь, что если векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис пространства V над $\mathbb{k}$, то векторы $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_n$ образуют базис пространства $V_{\mathbb{F}}$ над $\mathbb{F}$, и матрица оператора $\varrho_g^{\mathbb{F}}$ в этом базисе совпадает с матрицей оператора ϱ_g в базисе $e_1, \dots, e_n$ (в частности, её элементы лежат в поле $\mathbb{k}$).

Часто встречающийся в приложениях случай расширения скаляров с $\mathbb{R}$ до $\mathbb{C}$ мы подробнее обсудим в н° 2.3 на стр. 17 ниже, а сейчас докажем следующий полезный факт.

Предложение 2.1

Пусть $\mathbb{k} \subset \mathbb{F}$ — бесконечные поля, и конечномерные представления $U_{\mathbb{F}}$ и $W_{\mathbb{F}}$ получаются из представлений U и W расширением скаляров с $\mathbb{k}$ до $\mathbb{F}$. Если представления $U_{\mathbb{F}}$ и $W_{\mathbb{F}}$ изоморфны над полем $\mathbb{F}$, то исходные представления U и W изоморфны над полем $\mathbb{k}$.

Доказательство. Изоморфность представлений $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(U)$ и $\eta : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ означает существование такой линейной биекции $f : U \xrightarrow{\sim} W$, что

$$f \varrho_g = \eta_g f \text{ для всех } g \in G. \quad (2-3)$$

Если выбрать в пространствах U и W какие-нибудь базисы над $\mathbb{k}$ и записать все операторы ϱ_g, η_g матрицами в этих базисах, то условия (2-3) превратятся в систему занумерованных элементами группы G линейных однородных уравнений на квадратную матрицу f . Если у этой системы есть ненулевое решение над полем $\mathbb{F}$, то у неё есть ненулевое решение и над исходным полем $\mathbb{k}$, в котором лежат все коэффициенты системы (2-3), и каждый базис $f_1, \dots, f_m \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(U, W)$ пространства решений над $\mathbb{k}$ одновременно является базисом пространства решений над $\mathbb{F}$. Если над полем $\mathbb{F}$ есть решение $g = \sum \vartheta_i f_i$ с $\vartheta_i \in \mathbb{F}$ и $\det g \neq 0$, то многочлен

$$\det(x_1 f_1 + \dots + x_n f_n) \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$$

ненулевой. Так как поле $\mathbb{k}$ бесконечно, существуют такие $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{k}$, что

$$\det(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n) \neq 0.$$

Это значит, что матрица $f = \sum \lambda_i f_i$, решающая систему (2-3) в поле $\mathbb{k}$, обратима и задаёт изоморфизм представлений U и W над $\mathbb{k}$. $\square$

2.2. Проектор на инварианты конечной группы. Пусть группа G действует в векторном пространстве V . Векторы, неподвижные относительно всех преобразований из G , образуют в V подмодуль G -инвариантов

$$V^G \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G\},$$

на котором группа G действует тривиально. Если группа G конечна и $\mathrm{char} \mathbb{k} \nmid |G|$, то любое линейное представление V группы G допускает G -линейную проекцию на подмодуль G -инвариантов, которая сопоставляет вектору $v \in V$ центр тяжести¹ его G -орбиты

$$v^{\natural} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv \quad (2-4)$$

¹Т. е. в равновесный барицентр, см. раздел 1.4.2 на с. 14 лекций [Гео 1]. Обратите внимание, что если $|G| : \mathrm{char}(\mathbb{k})$, то сумма весов элементов орбиты нулевая, и центр тяжести не определён.

в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$.

УПРАЖНЕНИЕ 2.7. Убедитесь прямым вычислением, что при $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$ оператор $v \mapsto v^{\natural}$ перестановочен с действием G и линейно проектирует V на V^G .

ТЕОРЕМА 2.1

Каждое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо¹.

Доказательство. Покажем, что любой G -подмодуль $U \subset V$ является образом G -линейного проектора². Группа G действует на пространстве всех $\mathbb{k}$ -линейных отображений $\text{Hom}(V, U)$ по правилу $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$. Достаточно убедиться в том, что проекция на инварианты этого действия

$$\text{Hom}(V, U) \rightarrow \text{Hom}_G(V, U), \quad \varphi \mapsto \varphi^{\natural} = |G|^{-1} \sum_{g \in G} g\varphi g^{-1}$$

переводит проекторы V на U в проекторы V на U . Пусть $\pi : V \rightarrow U$ — любой $\mathbb{k}$ -линейный проектор. Тогда $\text{im } \pi^{\natural} \subset U$, так как $g\pi g^{-1}U \subset U$ для всех $g \in G$, а любой вектор $u \in U$ неподвижен относительно $\pi^{\natural}$, ибо $g^{-1}U \subset U$ и $\pi|_U = \text{Id}_U$ влекут $g\pi g^{-1}u = g g^{-1}u = u$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1

Линейное представление группы G в вещественном (соотв. комплексном) векторном пространстве V называется *ортогональным* (соотв. *унитарным*), если на V существует такое евклидово (соотв. эрмитово) скалярное произведение, что $(gu, gw) = (u, w)$ для всех $u, w \in V$ и всех $g \in G$, т. е. все операторы из G ортогональны (соотв. унитарны) относительно этого скалярного произведения.

УПРАЖНЕНИЕ 2.8. Покажите, что каждое ортогональное или унитарное представление произвольной группы G является прямой ортогональной суммой неприводимых представлений.

ТЕОРЕМА 2.2

Каждое линейное представление конечной группы G в вещественном (соотв. комплексном) векторном пространстве V ортогонально (соотв. унитарно).

Доказательство. Рассмотрим произвольное евклидово (соответственно эрмитово) скалярное произведение на V , сопоставляющее паре векторов $u, w \in V$ число (u, w) и положим³

$$(u, w)^{\natural} \stackrel{\text{def}}{=} |G|^{-1} \sum_{g \in G} (gu, gw).$$

Эта форма билинейна (соотв. полуторалинейна), симметрична (соотв. эрмитово симметрична) и положительно определена, поскольку этими свойствами обладает каждое слагаемое в правой части. Очевидно, что $(hu, hw)^{\natural} = (u, w)^{\natural}$ для всех $h \in G$. $\square$

¹Т. е. является прямой суммой неприводимых представлений или, что то же самое, полупростым G -модулем.

²См. предл. 1.1 на стр. 8.

³Обратите внимание, что правая часть является центром тяжести G -орбиты билинейной формы $(*, *)$ в стандартном представлении группы G на пространстве $V^* \otimes V^*$ билинейных форм на V , которое получается комбинированием конструкций из прим. 2.4 и прим. 2.3 на стр. 13 выше: элемент $g \in G$ переводит билинейную форму $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ в билинейную форму $\beta^g(u, w) = \beta(g^{-1}u, g^{-1}w)$. Инвариантами этого действия являются такие формы, относительно которых все преобразования из G являются изометриями: $\beta(gu, gw) = \beta(u, w)$ для всех $g \in G$.

2.3. Комплексные и вещественные представления. Каждое представление

$$\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$$

в вещественном векторном пространстве V можно комплексифицировать до представления

$$\varrho_{\mathbb{C}} : G \rightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$$

в комплексном векторном пространстве $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = V \oplus iV$ — комплексификации¹ пространства V . При этом каждый элемент $g \in G$, действующий на пространстве V оператором $\varrho_g : V \rightarrow V$, действует на $V_{\mathbb{C}}$ комплексифицированным оператором²

$$\varrho_{g_{\mathbb{C}}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes \varrho_g : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}, \quad u + iv \mapsto \varrho_g(u) + i\varrho_g(v),$$

который в любом вещественном базисе $e_1, \dots, e_n \in V \subset V_{\mathbb{C}}$ пространства $V_{\mathbb{C}}$ имеет ту же самую (вещественную) матрицу, что и оператор ϱ_g . Комплексификация $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ любого вещественного линейного оператора $f : V \rightarrow V$ коммутирует с комплексным сопряжением³

$$w = u + iv \mapsto \bar{w} = u - iv, \quad \text{где } u, v \in V, \quad (2-5)$$

на $V_{\mathbb{C}}$, т. е. $f_{\mathbb{C}}(\bar{w}) = \overline{f_{\mathbb{C}}(w)}$. Поэтому каждому G -подмодулю $W \subset V_{\mathbb{C}}$ отвечает комплексно сопряжённый G -подмодуль $\bar{W} \subset V_{\mathbb{C}}$, полулинейно изоморфный G -подмодулю W в том смысле, что отображение комплексного сопряжения (2-5) задаёт $\mathbb{C}$ -полулинейный изоморфизм $W \simeq \bar{W}$, перестановочный с действием G . Если $W = \bar{W}$, подмодуль W является комплексификацией вещественного подмодуля $\mathrm{Re} W = \{w \in W \mid \bar{w} = w\} \subset V$.

Предложение 2.2

Комплексификация $U_{\mathbb{C}}$ неприводимого вещественного представления U либо неприводима, либо является прямой суммой двух комплексно сопряжённых полулинейно изоморфных неприводимых комплексных представлений.

Доказательство. Рассмотрим любой неприводимый подмодуль $W \subset U_{\mathbb{C}}$. Подмодуль $W + \bar{W} \subset U_{\mathbb{C}}$ совпадает со своим комплексно сопряжённым и стало быть является комплексификацией ненулевого вещественного подмодуля $\mathrm{Re}(W + \bar{W}) \subset U$, совпадающего с U , так как U неприводим. Пересечение $W \cap \bar{W}$, будучи подмодулем неприводимого модуля W либо нулевое, либо совпадает с W . В первом случае $U_{\mathbb{C}} = W \oplus \bar{W}$, во втором $U_{\mathbb{C}} = W = \bar{W}$. $\square$

Пример 2.7 (представление конечной циклической группы поворотами)

Группа $\mathbb{Z}/(n)$ представляется на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ поворотами: класс $[k]$ действует поворотом на угол $2\pi/k$, матрица которого в стандартном ортонормальном базисе e_1, e_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi/k) & -\sin(2\pi/k) \\ \sin(2\pi/k) & \cos(2\pi/k) \end{pmatrix}.$$

¹См. раздел 15.2 на с. 243 лекций [Алг 1].

²См. раздел 15.2.1 на с. 244 лекций [Алг 1].

³См. раздел 15.2.2 на с. 244 лекций [Алг 1].

Это представление неприводимо над $\mathbb{R}$, а его комплексификация раскладывается в прямую сумму двух комплексно сопряжённых одномерных $\mathbb{Z}/(n)$ -подмодулей, порождённых векторами $w = e_1 - ie_2$ и $\bar{w} = e_1 + ie_2$, поскольку в базисе $w, \bar{w}$ оператор $[k]$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}^k \end{pmatrix}, \text{ где } \lambda = e^{2\pi/n} \text{ и } \lambda^n = 1.$$

Обозначим через U_λ и $U_{\bar{\lambda}}$ два представления группы $\mathbb{Z}/(n)$ в одномерном комплексном пространстве $\mathbb{C}$, в которых образующая $[1] \in \mathbb{Z}/(n)$ действует соответственно умножениями на λ и $\bar{\lambda}$. В этих обозначениях комплексификация двумерного вещественного представления группы $\mathbb{Z}/(n)$ поворотами евклидовой плоскости изоморфна прямой сумме $U_\lambda \oplus U_{\bar{\lambda}}$. Обратите внимание, что представления U_λ и $U_{\bar{\lambda}}$ не изоморфны друг другу над $\mathbb{C}$, ибо не существует $\mathbb{C}$ -линейной биекции $U_\lambda \xrightarrow{\sim} U_{\bar{\lambda}}$, переводящей одно действие группы $\mathbb{Z}/(n)$ в другое. А вот полулинейная биекция, действующая по правилу $z \mapsto \bar{z}$, перестановочна со всеми операторами из $\mathbb{Z}/(n)$.

Пример 2.8 (двумерное неприводимое представление группы S_3)

Группа $S_3 \simeq D_3$ действует на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ самосовмещениями правильного треугольника. Это представление неприводимо. Его комплексификация тоже неприводима, поскольку в противном случае оператор отражения σ имел бы диагональную матрицу в собственном базисе $w, \bar{w}$ оператора поворота τ из предыдущего примера. Но из соотношения $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$ вытекает, что σ переводит вектор w , который является собственным для τ с собственным числом $\lambda = e^{2\pi/3}$, в собственный вектор с собственным числом $\lambda^{-1} = \bar{\lambda} = e^{-2\pi/3}$:

$$\tau\sigma w = \sigma\tau^{-1}w = \sigma(\lambda^{-1}w) = \lambda^{-1}\sigma w.$$

т. е. оператор отражения переводит собственные векторы поворота друг в друга.

Пример 2.9 (ортогональные представления группы D_∞)

Группа D_∞ с двумя образующими σ, ϑ , связанными соотношениями¹ $\sigma^2 = \vartheta^2 = e$, называется *бесконечной диэдральной группой*. Чтобы описать неприводимые ортогональные представления группы D_∞ , положим $\tau = \sigma\vartheta$. Тогда $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$.

Упражнение 2.9. Убедитесь, что D_∞ можно иначе описать как группу с образующими σ, τ , связанными соотношениями

$$\sigma^2 = e \quad \text{и} \quad \sigma\tau\sigma = \tau^{-1}. \quad (2-6)$$

Покажем, что этих обозначениях неприводимые ортогональные представления группы D_∞ исчерпываются четырьмя одномерными представлениями, в которых каждый из операторов τ, σ действует умножением на² ± 1 , а также двумерными представлениями U_φ , где $0 < \varphi < \pi/2$, в которых σ и ϑ действуют как отражения в прямых ℓ_σ и ℓ_ϑ , пересекающихся под углом φ , а τ действует как поворот на угол 2φ в направлении от ℓ_ϑ к ℓ_σ .

Пусть U — неприводимый D_∞ -модуль, $U_\mathbb{C}$ — его комплексификация, а $u \in U_\mathbb{C}$ — собственный вектор оператора τ с собственным числом $\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку оператор τ ортогональный, $|\lambda| = 1$ и $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$. Выше, в [прим. 2.8](#) мы видели, что из соотношений (2-6) вытекает, что вектор $w = \sigma u$ тоже является собственным для τ с собственным значением $\bar{\lambda}$.

¹См. § 12 на с. 199 лекций [\[Алг 1\]](#).

²Четыре возможных выбора знака дают 4 попарно не изоморфных представления.

Если $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, то $\lambda = \pm 1$, и вектор u можно выбрать лежащим в U . Тогда w тоже лежит в U и имеет то же самое собственное число, что и u . Если векторы u и w пропорциональны, то $u = \pm v$ является собственным для обоих операторов τ, σ , а одномерное пространство $\mathbb{R}u$ инвариантно относительно D_∞ , и в нём возникает одно из четырёх указанных выше одномерных представлений. Если u и w не пропорциональны, то такое представление возникает в одномерном подпространстве $\mathbb{R}v$, натянутом на вектор $v = u + w$, также собственный для обоих операторов τ, σ , что противоречит неприводимости U .

Пусть теперь $\lambda \neq \bar{\lambda}$. Тогда σ переставляет друг с другом собственные векторы u и w оператора τ с собственными числами λ и $\bar{\lambda}$, а также собственные векторы $\bar{u}$ и $\bar{w}$ с собственными числами $\bar{\lambda}$ и λ . В линейной оболочке этих векторов имеются ненулевые комплексно сопряжённые друг другу векторы v и $\bar{v}$, которые переставляются друг с другом отражением σ и являются собственными для τ с комплексно сопряжёнными собственными числами $\lambda, \bar{\lambda}$. В самом деле, если $w = \bar{u}$, то можно положить $v = u$, а если $w \neq \bar{u}$, положим $v = u - \bar{w}$. Двумерная $\mathbb{C}$ -линейная оболочка векторов $v, \bar{v}$ инвариантна относительно действия D_∞ и является комплексификацией двумерного вещественного пространства¹ с базисом $\operatorname{Re} v = (v + \bar{v})/2$ и $\operatorname{Im} v = (v - \bar{v})/2i$, на котором оператор τ действует как поворот, а оператор σ — перестановкой базисных векторов. Из последнего вытекает, что ортогональная инволюция σ имеет собственные числа $+1$ и -1 , т. е. является отражением в прямой. Тогда $\vartheta = \sigma\tau$ тоже является отражением в прямой, а $\tau = \sigma\vartheta$ — поворотом на удвоенный угол между этими прямыми.

ПРИМЕР 2.10 (Ортогональный инвариант пары подпространств евклидова пространства)

Каждое подпространство U вещественного евклидова пространства V задаёт ортогональный оператор² $s_U : V \rightarrow V$ отражения в U , тождественно действующий на U и переводящий каждый вектор из $U^\perp$ в противоположный.

УПРАЖНЕНИЕ 2.10. Убедитесь, что это инволютивный³ ортогональный линейный оператор.

Наоборот, каждый инволютивный оператор $f : V \rightarrow V$ задаёт разложение⁴ $V = V_+ \oplus V_-$ в прямую сумму собственных подпространств $V_\pm = \{v \in V \mid f v = \pm v\}$ оператора f с собственными числами ± 1 , а если f ещё и ортогонален, то эти подпространства ортогональны друг другу.

УПРАЖНЕНИЕ 2.11. Убедитесь в этом.

Таким образом, задание пары подпространств U, W в евклидовом пространстве V равносильно заданию ортогонального представления $\varrho_{UW} : D_\infty \rightarrow \mathcal{O}(V)$, $\sigma \mapsto s_U, \vartheta \mapsto s_W$. По [упр. 2.8](#) на стр. 16 оно полупросто и единственным образом раскладывается в прямую ортогональную сумму изотипных компонент⁵

$$V = V_{--} \oplus V_{+-} \oplus V_{-+} \oplus V_{++} \oplus \bigoplus_i V_{\varphi_i}, \quad (2-7)$$

где через $V_{\pm\pm}$ обозначены суммы одномерных представлений, в которых инволюции s_U, s_W действуют как $\pm \operatorname{Id}$, а через V_{φ_i} — сумма двумерных представлений, в которых s_U, s_W действуют

¹См. предложение 15.2 на с. 245 лекций [\[Алг 1\]](#).

²См. пример 11.2 на с. 142 лекций [\[Алг 1\]](#).

³Т. е. обратный самому себе: $\sigma_U^2 = \operatorname{Id}$.

⁴См. пример 9.6 на с. 159 лекций [\[Алг 1\]](#).

⁵См. [предл. 1.3](#) на стр. 10.

как отражения в прямых, пересекающихся под углом φ_i . Каждое из подпространств U, W является прямой ортогональной суммой своих ненулевых пересечений с компонентами разложения¹ (2-7). При этом $V_{--} = (U + W)^\perp$, $V_{++} = U \cap W$, $V_{+-} = U \cap W^\perp$, $V_{-+} = U^\perp \cap W$, а пересечения $U \cap V_{\varphi_i}$ и $W \cap V_{\varphi_i}$ являются изоклинными² подпространствами половинной размерности в V_{φ_i} с углом φ_i , причём $\varphi_i \neq \varphi_j$ при $i \neq j$. Углы $\varphi_i \in (0, \pi/2)$, участвующие в разложении (2-7), называются *инвариантными* (или *стационарными*) углами между подпространствами U и W . Набор размерностей компонент разложения (2-7) и величин стационарных углов является полным ортогональным инвариантом пары подпространств евклидова пространства: если у подпространств $Y, Z \subset V$ он такой же, как у $U, W \subset V$, то $Y = f(U)$, $Z = f(W)$ для некоторого ортогонального линейного оператора $f: V \rightarrow V$, и наоборот, если такой оператор f существует, то он задаёт изоморфизмом представлений ϱ_{UW} и ϱ_{YZ} .

УПРАЖНЕНИЕ 2.12. Убедитесь, что $s_{f(U)} = f \sigma_U f^{-1}$ для любого подпространства $U \subset V$.

Альтернативные геометрические описания инвариантных углов см. в разделе 11.5 на с. 154 лекций [Гео 1].

УПРАЖНЕНИЕ 2.13. Покажите, что косинусы инвариантных углов между подпространствами U и W евклидова пространства V являются отличными от 0, 1 сингулярными числами³ ортогональной проекции $\pi: U \rightarrow W$ вдоль $W^\perp$.

2.4. Представления конечных абелевых групп. Всюду в этом разделе мы считаем, что G — конечная группа, а поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто, и $\text{char } \mathbb{k} \nmid |G|$. Эти условия гарантируют, что многочлен $t^{|G|} - 1$ имеет в поле $\mathbb{k}$ ровно $|G|$ попарно различных корней⁴. Поскольку $g^{|G|} = e$ для всех⁵ $g \in G$, многочлен $t^{|G|} - 1$ аннулирует все операторы любого конечномерного представления группы G . Следовательно, все эти операторы диагонализуются⁶. Если группа G абелева, то их можно одновременно диагонализовать в некотором общем для всех операторов базисе⁷. Мы заключаем, что каждое конечномерное линейное представление конечной абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики $\text{char}(\mathbb{k}) \nmid |G|$ является прямой суммой одномерных представлений. Одномерные представления описываются *мультипликативными характеристиками*.

2.4.1. Мультипликативные характеры. Гомоморфизмы $G \rightarrow \mathbb{k}^\times$ группы G в мультипликативную группу поля $\mathbb{k}$ называются *мультипликативными характеристиками* группы G . Каждое одномерное представление U группы G задаёт мультипликативный характер $\chi_U: G \rightarrow \mathbb{k}^\times$, однозначно определяемый тем, что $gu = \chi_U(g)u$ для всех $u \in U$ и $g \in G$. Иначе говоря, каждый

¹Разложение в прямую сумму $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ называется *согласованным* с подпространством $U \subset V$, если $U = \bigoplus_j (U \cap V_j)$, где суммирование происходит по всем таким j , что $U \cap V_j \neq 0$. Таким образом, ортогональное разложение (2-7) согласовано с обоими подпространствами $U, W \subset V$.

²Подпространства $U, W \subset V$ называются *изоклинными* с углом φ , если угол между любым ненулевым вектором любого из них и другим подпространством равен φ . Подробнее про угол между векторами и подпространствами см. в разделе 10.4.2 на с. 139 лекций [Гео 1].

³См. раздел 16.3 на с. 260 лекций [Алг 1].

⁴Если $\text{char } \mathbb{k} \nmid n$, то у многочлена $t^n - 1$ нет кратных корней, так как он взаимно прост со своей производной $nt^{n-1} \neq 0$.

⁵См. Следствие 10.3 на с. 184 лекций [Алг 1].

⁶См. предложение 9.4 на с. 158 лекций [Алг 1].

⁷См. предложение 9.6 на с. 165 лекций [Алг 1].

оператор $g \in G$ действует на одномерном пространстве U умножением на некоторую ненулевую константу, и характер χ_U сопоставляет элементам группы G те константы, умножением на которые они действуют. Наоборот, каждый мультипликативный характер $\chi: G \rightarrow \mathbb{K}^\times$ задаёт на одномерном пространстве $U = \mathbb{K}$ линейное представление группы G , в котором каждый элемент $g \in G$ действует по правилу $g: u \mapsto \chi(g)u$. Мы будем обозначать этот одномерный G -модуль через U_χ .

Упражнение 2.14. Убедитесь, что $U_\chi \simeq U_\psi$ как G -модули если и только если $\chi = \psi$ как гомоморфизмы $G \rightarrow \mathbb{K}^\times$.

Поскольку $\chi(g)^{|G|} = \chi(g^{|G|}) = \chi(e) = 1$ для всех $g \in G$, множество значений любого мультипликативного характера $\chi: G \rightarrow \mathbb{K}^\times$ лежит в группе $\mu_{|G|}(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}^\times$ корней $|G|$ -той степени из 1 в поле $\mathbb{K}$. Множество всех мультипликативных характеров $\chi: G \rightarrow \mathbb{K}^\times$ является мультипликативной абелевой подгруппой в алгебре $\mathbb{K}^G$ всех функций на группе G со значениями в поле $\mathbb{K}$. Единицей этой группы служит *тривиальный характер* $\chi_1 \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению. Обратный к χ характер χ^{-1} действует по правилу $\chi^{-1}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(g)^{-1} = \chi(g^{-1})$ и является характером двойственного к U_χ представления $U_\chi^* \simeq U_{\chi^{-1}}$.

Упражнение 2.15. Проверьте, что характер тензорного произведения одномерных представлений равен произведению их характеров.

Группа мультипликативных характеров $G \rightarrow \mathbb{K}^\times$ группы G обозначается $G^\wedge$ и называется *двойственной по Понтрягину* к группе G . Поскольку каждый характер является гомоморфизмом в абелеву группу $\mathbb{K}^\times$, он однозначно пропускается через *абелинизацию*¹ $G_{\text{ab}} \stackrel{\text{def}}{=} G/G'$, где $G' = [G, G]$ — это коммутант² группы G . Таким образом, $G^\wedge = G_{\text{ab}}^\wedge$.

2.4.2. Представление в пространстве функций на группе. Каждая группа G действует на пространстве $\mathbb{K}^G$ функций $G \rightarrow \mathbb{K}$ по правилу³ $g: f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$. Для каждого характера $\chi: G \rightarrow \mathbb{K}^\times$ обозначим через $\mathbb{K}_\chi^G$ изотипную компоненту⁴ этого представления, равную сумме всех изоморфных U_χ одномерных G -подмодулей в $\mathbb{K}^G$. Она состоит из всех таких функций $f: G \rightarrow \mathbb{K}$, что

$$f(g^{-1}x) = \chi(g)f(x) \text{ для всех } x, g \in G. \quad (2-8)$$

Полагая в этом равенстве $x = e$, получаем $f(g^{-1}) = \chi(g)f(e)$ для всех $g \in G$. Переобозначая g^{-1} через h , заключаем, что $f(h) = f(e)\chi(h^{-1}) = f(e)\chi^{-1}(h)$ для всех $h \in G$. Иными словами, каждая функция $f \in \mathbb{K}_\chi^G$ пропорциональна характеру χ^{-1} , обратному к χ в группе мультипликативных характеров. В частности, $\dim \mathbb{K}_\chi^G = 1$. Если группа G абелева, то представление $\mathbb{K}^G$ распадается в прямую сумму одномерных представлений и тем самым в прямую сумму изотипных компонент⁵ $\mathbb{K}_\chi^G$ по всем мультипликативным характерам $\chi \in G^\wedge$. Мы заключаем, что для абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики $\text{char } \mathbb{K} \nmid |G|$ имеется изоморфизм G -модулей

$$\mathbb{K}^G \simeq \bigoplus_{\chi \in G^\wedge} \mathbb{K}_\chi,$$

т. е. каждое из неприводимых представлений конечной абелевой группы G содержится в представлении группы G на пространстве функций $G \rightarrow \mathbb{K}$ с кратностью один. В частности, характеры образуют базис пространства $\mathbb{K}^G$ и $|G^\wedge| = |G|$.

¹См. предложение 10.6 на с. 186 лекций [Алг 1].

²См. раздел 10.6 на с. 186 лекций [Алг 1].

³Ср. с прим. 2.2 на стр. 13.

⁴См. п. 1.6 на стр. 10.

⁵См. предл. 1.3 на стр. 10.

УПРАЖНЕНИЕ 2.16. Для произвольной¹ группы G покажите, что любое множество различных гомоморфизмов $G \rightarrow \mathbb{K}^\times$ линейно независимо в пространстве $\mathbb{K}^G$.

ТЕОРЕМА 2.3 (двойственность Понтрягина)

Пусть G — конечная абелева группа. Для каждого $g \in G$ функция вычисления

$$\text{ev}_g : G^\wedge \rightarrow \mathbb{K}, \chi \mapsto \chi(g),$$

является характером группы $G^\wedge$, а отображение $G \rightarrow G^{\wedge\wedge}, g \mapsto \text{ev}_g$ является изоморфизмом групп.

Доказательство. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$\text{ev}_g(\chi_1 \chi_2) = \chi_1(g) \chi_2(g) = \text{ev}_g(\chi_1) \cdot \text{ev}_g(\chi_2).$$

Равенства $\text{ev}_{g_1 g_2}(\chi) = \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2) = \text{ev}_{g_1}(\chi) \text{ev}_{g_2}(\chi)$ показывают, что отображение $g \mapsto \text{ev}_g$ является гомоморфизмом групп. Если элемент $g \in G$ лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$ и g тривиально действует в любом конечномерном представлении группы G . Поэтому $f(g^{-1}x) = f(x)$ для любой функции $f : G \rightarrow \mathbb{K}$, что возможно только при $g = e$. Поскольку $|G^{\wedge\wedge}| = |G|$, инъективность гомоморфизма $g \mapsto \text{ev}_g$ влечёт его биективность. $\square$

2.4.3. Преобразование Фурье. На самом деле двойственность Понтрягина имеет место для всех локально компактных топологических абелевых групп, и конечные абелевы группы являются лишь самыми простыми примерами таких групп. В качестве двойственной к произвольной локально компактной топологической абелевой группе G берётся группа G непрерывных гомоморфизмов $G \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Например, мультипликативная группа $U(1)$ комплексных чисел единичной длины двойственна по Понтрягину аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$: каждому $n \in \mathbb{Z}$ отвечает характер $U(1) \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$, а каждому $e^{2\pi i t} \in U(1)$ — характер $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times, m \mapsto e^{2\pi i m t}$. Аддитивная группа $\mathbb{R}$ вещественных чисел двойственна сама себе: каждому $\alpha \in \mathbb{R}$ отвечает характер $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times, x \mapsto e^{2\pi i \alpha x}$.

Каждая достаточно регулярная функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ на локально компактной топологической абелевой группе G имеет единственное «линейное выражение» через характеры. Для группы $U(1)$ это выражение представляет собою разложение функции $f : U(1) \rightarrow \mathbb{C}$ в бесконечный ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f^\wedge(m) z^m$$

с коэффициентами $f^\wedge(m) \in \mathbb{C}$, которые можно воспринимать как функцию $f^\wedge : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Для аддитивной группы $\mathbb{R}$ «линейное выражение» через характеры означает представление функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^\wedge(\alpha) e^{2\pi i \alpha x} d\alpha,$$

в котором «семейство коэффициентов» $f^\wedge(\alpha)$ представляет собой функцию $f^\wedge : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Функции $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ и $f^\wedge : G^\wedge \rightarrow \mathbb{C}$ однозначно восстанавливаются друг по другу по простым явным формулам так, что с учётом двойственности Понтрягина возникает равенство $f^{\wedge\wedge} = f$. Инволюция $f \leftrightarrow f^\wedge$ называется *преобразованием Фурье*.

¹Не обязательно абелевой.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.5. Поскольку правило $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$ линейно по φ , его достаточно проверять только на разложимых $\varphi = \xi \otimes w$ с $\xi \in U^*$, $w \in W$. По определению

$$\varrho^\times \otimes \lambda(g) : \xi \otimes w \mapsto \varrho_{g^{-1}}^* \xi \otimes \lambda_g w = (\xi \circ g^{-1}) \otimes (gw).$$

Этот оператор переводит $u \in U$ в $\xi(g^{-1}u) \cdot gw = g(\xi(g^{-1}u) \cdot w) = g \circ (\xi \otimes w) \circ g^{-1}(u)$.

Упр. 2.8. В любом ортогональном или унитарном представлении ортогональное дополнение $U^\perp$ к каждому G -инвариантному подпространству также G -инвариантно.

Упр. 2.9. Элемент ϑ выражается через σ и τ как $\vartheta = \sigma\tau$, а из соотношений $\sigma^2 = e$ и $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$ вытекает, что $\tau^2 = e$.

Упр. 2.11. Если $fu = u$, а $fw = -w$, то $(u, w) = (fu, fw) = -(u, w)$, откуда $(u, w) = 0$.

Упр. 2.16. Пусть множество различных гомоморфизмов $\psi_\nu : G \rightarrow \mathbb{K}^\times$ линейно зависимо. Рассмотрим линейную зависимость $\lambda_1\psi_1 + \dots + \lambda_n\psi_n = 0$ с минимально возможным числом слагаемых и какой-нибудь элемент $h \in G$, на котором $\psi_1(h) \neq \psi_2(h)$. Поскольку для каждого $g \in G$ выполняется равенство $\sum_i \lambda_i \psi_i(h)\psi_i(g) = \sum_i \lambda_i \psi_i(hg) = 0$, имеется ещё одно линейное соотношение между функциями ψ_i с коэффициентами $\lambda_i \psi_i(h)$. Деля все коэффициенты на $\psi_1(h)$ и вычитая из первой зависимости, получаем линейную зависимость между ψ_i с нулевым коэффициентом при ψ_1 и ненулевым коэффициентом при ψ_2 . Она нетривиальна и содержит меньше слагаемых. Противоречие.