

§1. Основные понятия теории представлений.

1.1. Представления множеств и ассоциативных алгебр. Для произвольного множества R условимся обозначать через $\mathbb{k}R$ векторное пространство с базисом R над полем $\mathbb{k}$, состоящее из конечных формальных линейных комбинаций элементов из R с коэффициентами в $\mathbb{k}$, а через $A_R \stackrel{\text{def}}{=} T(\mathbb{k}R)$ — тензорную алгебру¹ этого векторного пространства, т. е. свободную ассоциативную $\mathbb{k}$ -алгебру, порождённую множеством R .

Например, если множество $R = \{t\}$ состоит из одного элемента t , то векторное пространство $\mathbb{k}t \simeq \mathbb{k}$ одномерно с базисом t , а ассоциативная алгебра $A_t = T(\mathbb{k}t) \simeq \mathbb{k}[t]$ изоморфна алгебре многочленов от одной переменной: изоморфизм сопоставляет базисному тензору $t \otimes \dots \otimes t \in (\mathbb{k}t)^{\otimes n}$ моном t^n .

Отображение $\varrho : R \rightarrow \text{End}(W), t \mapsto \varrho_t : W \rightarrow W$, множества R в алгебру линейных эндоморфизмов какого-либо векторного пространства W над полем $\mathbb{k}$ называется *линейным представлением* множества R эндоморфизмами пространства W . Иначе говоря, линейное представление ϱ сопоставляет каждому элементу $t \in R$ линейный оператор $\varrho_t = \varrho(t) : W \rightarrow W$. В этой ситуации пространство W называется R -модулем.

По универсальному свойству свободной алгебры A_R , линейные представления

$$\varrho : R \rightarrow \text{End}(W)$$

биективно соответствуют гомоморфизмам ассоциативных алгебр

$$\tilde{\varrho} : A_R \rightarrow \text{End}(W).$$

Каждый тензор $t = \sum_{t_1, \dots, t_m \in R} x_{t_1, \dots, t_m} t_1 \otimes \dots \otimes t_m \in A_R$ с $t_v \in R, x_{t_1, \dots, t_m} \in \mathbb{k}$ переводится гомоморфизмом $\tilde{\varrho}$ в линейную комбинацию композиций

$$\tilde{\varrho}_t = \sum x_{t_1, \dots, t_m} \varrho_{t_1} \circ \dots \circ \varrho_{t_m} : W \rightarrow W,$$

а единичный элемент тензорной алгебры — в тождественный оператор Id_W . Обратите внимание, что $\tilde{\varrho}_{f+g} = \tilde{\varrho}_f + \tilde{\varrho}_g$ и $\tilde{\varrho}_{f \otimes g} = \tilde{\varrho}_f \circ \tilde{\varrho}_g$, т. е. $\tilde{\varrho} : A_R \rightarrow \text{End}(W)$ является гомоморфизмом алгебр. Образ этого гомоморфизма совпадает с *ассоциативной оболочкой* множества операторов $\varrho(R) \subset \text{End}(W)$ и тождественного оператора Id_W , т. е. является наименьшей ассоциативной подалгеброй с единицей, содержащей $\varrho(R)$, и получается из операторов ϱ_t исходного представления $\varrho : R \rightarrow \text{End}(W)$ множества R при помощи композиций и взятия их конечных линейных комбинаций с тождественным оператором. Он обозначается

$$\text{Ass}(\varrho(R)) \stackrel{\text{def}}{=} \text{im } \tilde{\varrho}.$$

Пример 1.1 (пространство с одним оператором, см. раздел 9.1.1 на с. 143 лекций [\[Алг 1\]](#))

Если множество R состоит из одного элемента t , то алгебра $A_R \simeq \mathbb{k}[t]$ является кольцом многочленов от этого элемента. Представление $\varrho : R \rightarrow \text{End } W$ заключается в выборе на пространстве W линейного оператора $f = \varrho(t) : W \rightarrow W$ и наделяет пространство W структурой модуля над кольцом многочленов, которая задаётся гомоморфизмом

$$\tilde{\varrho} = \text{ev}_f : \mathbb{k}[t] \rightarrow \text{End}(W), \quad t \mapsto f, \quad (1-1)$$

¹См. раздел 14.2 на с. 224 лекций [\[Алг 1\]](#).

переводящим многочлен $\varphi(t) \in \mathbb{k}[t]$ в результат подстановки в него вместо переменной t оператора f . Если пространство W конечномерно, то гомоморфизм (1-1) имеет ненулевое ядро — главный идеал¹ $(\mu_f) \subset \mathbb{k}[t]$, порождённый приведённым многочленом наименьшей степени, аннулирующим оператор² f . Образ гомоморфизма (1-1), т. е. наименьшая содержащая оператор f ассоциативная подалгебра с единицей в $\text{End}(V)$, представляет собой множество всех многочленов от оператора f и изоморфна фактор алгебре $\mathbb{k}[t]/(\mu_f)$.

Для произвольной ассоциативной алгебры³ A над полем $\mathbb{k}$ её *линейным представлением* в векторном пространстве V над полем $\mathbb{k}$ называют любой гомоморфизм $\mathbb{k}$ -алгебр

$$\varrho : A \rightarrow \text{End } V, \quad a \mapsto \varrho_a.$$

Если такой гомоморфизм задан, пространство V называется A -модулем. Когда понятно, о каком представлении идёт речь, мы обозначаем результат применения оператора $\varrho_a = \varrho(a) \in \text{End}(V)$ к вектору $w \in W$ просто через aw . Для подпространства $U \subset W$ и множества элементов $M \subset A$ мы полагаем $MU \stackrel{\text{def}}{=} \{au \mid a \in M, u \in U\}$.

Пусть S — множество или ассоциативная алгебра. Векторное подпространство U в S -модуле W называется S -подмодулем или S -инвариантным подпространством, если $SU \subset U$. Отличные от W подмодули $U \subsetneq W$ называются *собственными*.

УПРАЖНЕНИЕ 1.1 (ФАКТОР МОДУЛИ). Убедитесь, что для всякого S -подмодуля $U \subseteq W$ на фактор пространстве $V = W/U$ имеется структура S -модуля, на котором элементы $f \in S$ действуют по правилу $f[w] \stackrel{\text{def}}{=} [fw]$, где $[w] = w + U$ означает класс вектора $w \in W$ по модулю U .

Ненулевой S -модуль W называется *простым*, если у него нет ненулевых собственных подмодулей. Задающее такой модуль представление $\varrho : S \rightarrow \text{End}(W)$ называется *неприводимым*.

Ненулевой S -модуль W и соответствующее ему представление называются *разложимыми*, если W является прямой суммой своих ненулевых собственных S -подмодулей. Всякий конечномерный S -модуль является прямой суммой неразложимых, однако бывают неразложимые непростые модули.

УПРАЖНЕНИЕ 1.2. Приведите пример непростого неразложимого модуля над алгеброй многочленов $\mathbb{k}[t]$.

1.2. Полупростые представления. Зафиксируем некоторое множество R . Если R -модуль W является прямой суммой простых R -подмодулей, то он называется *полупростым*, а соответствующее представление $\varrho : R \rightarrow \text{End}(W)$ — *вполне приводимым*. Обратите внимание, что каждый неприводимый R -модуль по определению полупрост и неразложим, и что прямая сумма любого множества полупростых модулей полупроста.

УПРАЖНЕНИЕ 1.3. Убедитесь, что для заданных подпространств $U_1, U_2 \subset W$ условия $RU_1 \subset U_2$ и $A_R U_1 \subset U_2$ равносильны, и выведите отсюда, что простота, полупростота и разложимость пространства W относительно произвольного множества операторов $S \subset \text{End}(W)$ и относительно ассоциативной оболочки $\text{Ass}(S)$ этих операторов означают одно и то же.

¹См. раздел 4.3 на с. 73 лекций [Алг 1].

²Напомним, что он называется *минимальным многочленом* оператора f , см. раздел 9.1.5 на с. 147 лекций [Алг 1].

³См. раздел 5.2 на с. 90 лекций [Алг 1].

ПРИМЕР 1.2 (ПРОСТРАНСТВО С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ, ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРИМ. 1.1)

По теореме о строении конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов¹ каждый конечномерный $\mathbb{k}[t]$ -модуль W , будучи модулем кручения, изоморфен прямой сумме фактор модулей²

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_s^{m_s})}, \quad (1-2)$$

где все многочлены $p_i \in \mathbb{k}[t]$ неприводимы и приведены, а действие оператора состоит в умножении на t . Два таких модуля изоморфны если и только если они отличаются друг от друга перестановкой прямых слагаемых. Таким образом, неразложимые пространства с оператором исчерпываются пространствами $\mathbb{k}[t]/(p^m)$, не изоморфными друг другу при разных p, m , а неприводимые пространства с оператором — пространствами $\mathbb{k}[t]/(p)$, где в обоих случаях $p \in \mathbb{k}[t]$ приведён и неприводим, а оператор действует умножением на t . Полупростые пространства с оператором суть прямые суммы нескольких пространств $\mathbb{k}[t]/(p)$.

ЛЕММА 1.1

Пусть R -модуль³ W линейно порождается над $\mathbb{k}$ некоторым множеством $\mathcal{S}$ своих неприводимых R -подмодулей. Тогда для любого собственного R -подмодуля $U \subsetneq W$ найдётся такой R -подмодуль $V \subset W$, что⁴ $W = U \oplus V$, причём в качестве V можно взять прямую сумму подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. Для нулевого подмодуля $U = 0$ это утверждение означает, что весь модуль W является прямой суммой подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. В частности, такой модуль W автоматически полупрост.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $U \neq W$ и W линейно порождается подмодулями $S \in \mathcal{S}$, в множестве $\mathcal{S}$ найдётся подмодуль $S \not\subset U$. Сумма $U + S$ является прямой, поскольку пересечение $S \cap U \subsetneq S$, будучи собственным подмодулем неприводимого модуля S , равно нулю. Обозначим через $\mathcal{S}'$ множество всех полупростых подмодулей $M \subset W$, разложимых в прямую сумму модулей из $\mathcal{S}$ и таких, что сумма $U + M$ прямая. По предыдущему, множество $\mathcal{S}'$ непусто. Введём на нём частичный порядок, полагая $M_1 < M_2$, когда $M_2 = M_1 \oplus M$ для некоторого $M \in \mathcal{S}'$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.4. Убедитесь, что $\mathcal{S}'$ является полным чумом⁵.

По лемме Цорна⁶ в множестве $\mathcal{S}'$ имеется максимальный элемент V . Покажем, что $U \oplus V = W$. Если $U \oplus V \neq W$, то повторяя проведённое в начале доказательства рассуждение для подмодуля $U \oplus V$ в роли подмодуля U , мы найдём в $\mathcal{S}$ такой подмодуль $S \subset W$, что сумма $(U \oplus V) + S$ прямая. Это означает, что $V \oplus S \in \mathcal{S}'$ строго больше, чем V . Всё сказанное работает и для $U = 0$. $\square$

ТЕОРЕМА 1.1

Модуль W полупрост если и только если каждый ненулевой подмодуль в W содержит простой ненулевой подмодуль и для каждого ненулевого собственного R -подмодуля $U \subset W$ найдётся такой R -подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

¹См. Теорему 6.4 на с. 115 лекций [Алг 1].

²См. Теорему 9.1 на с. 144 лекций [Алг 1].

³Не обязательно конечномерный как векторное пространство над $\mathbb{k}$.

⁴Всякий подмодуль V с таким свойством называется *дополнительным* к U .

⁵См. Определение 0.3 на с. 21 лекций [Алг 1].

⁶См. Следствие 0.3 на с. 21 лекций [Алг 1].

Доказательство. Если модуль W полупрост, т. е. является прямой суммой простых подмодулей, подмодуль $V \subset W$, дополнительный к произвольно заданному подмодулю $U \subset W$, существует по лем. 1.1, применённой к множеству $\mathcal{S}$ всех простых подмодулей в W .

УПРАЖНЕНИЕ 1.5. Убедитесь, что проекция $\pi : W = U \oplus V \rightarrow U, u + v \mapsto u$, перестановочна с действием операторов из R , т. е. $\pi(fw) = f\pi(w)$ для всех $f \in R$ и $w \in W$.

Так как W линейно порождается простыми подмодулями, проекция π переводит хотя бы один из них в ненулевое векторное подпространство в U .

УПРАЖНЕНИЕ 1.6. Убедитесь, что это подпространство является простым R -подмодулем в U .

Это доказывает прямую импликацию «только если». Чтобы доказать обратную импликацию, обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех полупростых ненулевых подмодулей $S \subseteq W$. Это множество непусто, поскольку содержит ненулевой простой подмодуль, имеющийся в W по условию. Зададим на $\mathcal{S}$ частичный порядок, полагая $S_1 < S_2$ когда $S_2 = S_1 \oplus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.7. Убедитесь, что члм $\mathcal{S}$ полон.

По лемме Цорна, в $\mathcal{S}$ есть максимальный элемент M . Если он не совпадает с W , то найдётся такой ненулевой подмодуль $V \subset W$, что $W = M \oplus V$. Поскольку в V есть ненулевой простой подмодуль $S \subset V$, сумма $M \oplus S \in \mathcal{S}$ будет строго больше, чем M . Тем самым, $M = W$. $\square$

Следствие 1.1 (критерии полупростоты)

Пусть каждый ненулевой R -подмодуль в R -модуле¹ W содержит в себе конечномерный ненулевой R -подмодуль. Тогда следующие свойства модуля W эквивалентны:

- 1) W полупрост
- 2) W линейно порождается над $\mathbb{k}$ простыми R -подмодулями
- 3) для любого ненулевого собственного R -подмодуля $U \subset W$ существует такой R -подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

Доказательство. Если R -подмодуль конечномерен как векторное пространство над $\mathbb{k}$, то каждый его R -подмодуль минимальной положительной размерности автоматически прост. Поэтому каждый ненулевой подмодуль в W обладает простым ненулевым подмодулем, и условия (1) и (3) эквивалентны по теор. 1.1. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) была установлена в лем. 1.1. $\square$

1.3. Гомоморфизмы представлений. Линейное отображение $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$ между R -модулями, отвечающими линейным представлениям $\varrho_1 : R \rightarrow \text{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \rightarrow \text{End}(W_2)$, называется гомоморфизмом R -модулей², если оно перестановочно с действием всех операторов из R , т. е. для всех $f \in R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\varphi} & W_2 \\ \varrho_1(f) \uparrow & & \uparrow \varrho_2(f) \\ W_1 & \xrightarrow{\varphi} & W_2. \end{array}$$

¹Который не предполагается конечномерным.

²А также сплетающим оператором, гомоморфизмом представлений или R -линейным отображением.

Примером R -линейного отображения является проекция разложимого R -модуля $U \oplus V$ на подмодуль U вдоль подмодуля V из [упр. 1.5](#) на стр. 6. Множество всех R -линейных гомоморфизмов обозначается через $\text{Hom}_R(W_1, W_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : W_1 \rightarrow W_2 \mid \forall w \in W_1, \forall f \in R \varphi(fw) = f\varphi(w)\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 1.8. Убедитесь, что а) $\text{Hom}_R(W_1, W_2) = \text{Hom}_{A_R}(W_1, W_2)$, и это пространство является векторным подпространством в пространстве всех линейных отображений $W_1 \rightarrow W_2$ б) композиция R -линейных отображений R -линейна в) ядро и образ гомоморфизма R -модулей являются R -подмодулями г) образ и полный прообраз любого R -модуля относительно гомоморфизма R -модулей являются R -модулями.

ЛЕММА 1.2 (ЛЕММА ШУРА)

Всякий ненулевой гомоморфизм неприводимых R -модулей является изоморфизмом. Алгебра R -линейных автоморфизмов $\text{End}_R(U)$ неприводимого R -модуля U является алгеброй с делением¹. Если основное поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто, то все R -линейные эндоморфизмы неприводимого R -модуля U скалярны, т. е. имеют вид² λId_U , где $\lambda \in \mathbb{k}$.

Доказательство. Пусть представления $\varrho_1 : R \rightarrow \text{End}(U_1)$, $\varrho_2 : R \rightarrow \text{End}(U_2)$ неприводимы, а линейное отображение $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ перестановочно со всеми операторами из R . Поскольку $\ker \varphi \subset U_1$ и $\text{im } \varphi \subset U_2$ являются подмодулями простых модулей, либо $\ker \varphi = U_1$ и $\varphi = 0$, либо $\ker \varphi = 0$. Во втором случае, если $\varphi \neq 0$, то подмодуль $\text{im } \varphi \subset U_2$ отличен от нуля, и значит, совпадает с U_2 , т. е. φ одновременно инъективно и сюръективно.

Из сказанного вытекает, что каждый ненулевой R -линейный эндоморфизм $\varphi : U \rightarrow U$ простого модуля U биективен. Поскольку обратное к биективному R -линейному эндоморфизму отображение тоже R -линейно, каждый ненулевой элемент $\varphi \in \text{End}_R(U)$ обратим.

Наконец, пусть $\varphi \in \text{End}_R(U)$ и поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто. Для каждого $\lambda \in \mathbb{k}$ эндоморфизм $\lambda \text{Id}_U - \varphi$ тоже R -линеен. В силу алгебраической замкнутости поля $\mathbb{k}$ существует такое $\lambda_0 \in \mathbb{k}$, что $\det(\lambda_0 \text{Id} - \varphi) = 0$, и тем самым R -подмодуль $\ker(\lambda_0 \text{Id} - \varphi) \subset U$ отличен от нуля. Если U прост, то $\ker(\lambda_0 \text{Id} - \varphi) = U$ и $\varphi = \lambda_0 \text{Id}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.2

Если основное поле алгебраически замкнуто, а R -модули U и W неприводимы, то

$$\dim \text{Hom}_R(U, W) = \begin{cases} 0 & \text{если } U \text{ и } W \text{ не изоморфны} \\ 1 & \text{если } U \text{ и } W \text{ изоморфны.} \end{cases}$$

Доказательство. Любые два ненулевых изоморфизма $\varphi, \psi : U \xrightarrow{\sim} W$ пропорциональны, поскольку $\psi^{-1}\varphi = \lambda \cdot \text{Id}_U$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{k}^\times$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.3

Каждый фактор модуль любого полупростого R -модуля W полупрост.

Доказательство. По лемме Шура образ любого простого R -подмодуля $S \subset W$ при любой R -линейной сюръекции $\pi : W \twoheadrightarrow U$ либо нулевой, либо изоморфен S и, стало быть, прост. Поскольку W линейно порождается простыми подмодулями $S \subset W$, модуль U линейно порождается ненулевыми подмодулями $\pi(S)$. $\square$

¹Т. е. у каждого элемента $\varphi \in \text{End}_R(U)$ имеется двусторонний обратный элемент φ^{-1} со свойством $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = 1$.

²Иначе говоря, $\text{End}_R(U) \simeq \mathbb{k}$.

Предложение 1.1

В условиях сл. 1.1 на стр. 6 полупростота R -модуля W равносильна тому, что для любого подмодуля $U \subset W$ существует такой R -линейный эндоморфизм¹ $\pi_U \in \text{End}_R(W)$, что $\pi_U^2 = \pi_U$ и $\text{im } \pi_U = U$.

Доказательство. Если $W = U \oplus V$ для некоторого R -подмодуля $V \subset W$, то проектор

$$\pi_U : U \oplus V \rightarrow U \oplus V, \quad (u, v) \mapsto (u, 0),$$

обладает требуемыми свойствами. Наоборот, если эндоморфизм π_U имеет $\pi_U^2 = \pi_U$, то он тождественно действует на своём образе: $\pi_U \pi_U w = \pi_U w$. Поэтому $\ker \pi_U \cap \text{im } \pi_U = 0$. Так как каждый вектор $w \in W$ имеет разложение $w = \pi_U w + (w - \pi_U w)$, в котором $\pi_U w \in \text{im } \pi_U$, а $w - \pi_U w \in \ker \pi_U$, мы заключаем, что $W = \text{im } \pi_U \oplus \ker \pi_U$. В силу R -линейности π_U его ядро $\ker \pi_U$ является R -подмодулем в W . $\square$

Следствие 1.4

Каждый подмодуль любого полупростого R -модуля полупрост.

Доказательство. Пусть R -модуль L является ненулевым собственным подмодулем полупростого R -модуля W . Каждый R -подмодуль $U \subset L$, будучи подмодулем и в W , является образом R -линейного проектора $W \rightarrow U$. Ограничение этого проектора на подмодуль L является R -линейным проектором $L \rightarrow U$. $\square$

1.4. Матричный формализм. Пусть векторное пространство $W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ над полем $\mathbb{k}$ является прямой суммой своих подпространств V_ν . Обозначим через $\iota_\nu : V_\nu \hookrightarrow W$ вложение каждого из них в W , а через $\pi_\mu : W \rightarrow V_\mu$ — проекцию прямой суммы $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ на μ -е слагаемое. Все эти отображения являются гомоморфизмами R -модулей удовлетворяют соотношениям

$$\sum_\nu \iota_\nu \pi_\nu = \text{Id}_W, \quad \pi_\nu \iota_\nu = \text{Id}_{V_\nu} \text{ для всех } \nu,$$

$$\pi_\nu \iota_\mu = 0 \text{ и } \iota_\mu \pi_\nu = 0 \text{ для всех } \mu \neq \nu.$$

Для произвольного линейного оператора $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{k}}(W)$ положим

$$\varphi_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu : V_\nu \rightarrow V_\mu$$

и организуем эти линейные отображения в квадратную матрицу $\Phi = (\varphi_{\mu\nu})$. Оператор φ восстанавливается из этой матрицы как

$$\varphi = \text{Id}_W \circ \varphi \circ \text{Id}_W = \left(\sum_\mu \iota_\mu \pi_\mu \right) \circ \varphi \circ \left(\sum_\nu \iota_\nu \pi_\nu \right) = \sum_{\mu, \nu} \iota_\mu \varphi_{\mu\nu} \pi_\nu,$$

а его действие на вектор $w = (v_1, \dots, v_n) \in V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ заключается в умножении столбца векторов $(v_1, \dots, v_n)^t$ слева на матрицу Φ :

$$\begin{pmatrix} \varphi v_1 \\ \vdots \\ \varphi v_n \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

¹Он называется *инвариантным проектором* на U .

УПРАЖНЕНИЕ 1.9. Убедитесь, что матрица композиции $\varphi \circ \psi$ операторов $\varphi, \psi : W \rightarrow W$ равна произведению $\Phi\Psi$ матриц этих операторов.

Таким образом, мы получаем изоморфизм векторных пространств:

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(W) \simeq \bigoplus_{\mu, \nu} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_{\nu}, V_{\mu}), \quad \varphi \mapsto \Phi = (\varphi_{\mu\nu}), \quad (1-3)$$

а когда все слагаемые $V_{\nu} = V$ являются копиями одного и того же пространства V , — изоморфизм $\mathbb{K}$ -алгебр

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(V^{\oplus n}) \simeq \text{Mat}_n(\text{End}_{\mathbb{K}}(V)). \quad (1-4)$$

Если пространство W является R -модулем, где R — это множество или ассоциативная алгебра, а все подпространства $V_{\nu} \subset W$ — R -подмодулями в W , то все вложения ι_{ν} и проекции π_{μ} являются гомоморфизмами R -модулей, а линейный оператор $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(W)$ является эндоморфизмом R -модуля W , если и только если все его компоненты $\varphi_{\mu\nu} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V_{\nu}, V_{\mu})$ являются гомоморфизмами R -модулей. Изоморфизм (1-3) превращается в этом случае в изоморфизм векторных пространств

$$\text{End}_A(W) \simeq \bigoplus_{\mu, \nu} \text{Hom}_A(V_{\nu}, V_{\mu}), \quad \varphi \mapsto (\varphi_{\mu\nu}), \quad (1-5)$$

а если все слагаемые V_{ν} являются копиями одного и того же R -модуля V , — в изоморфизм $\mathbb{K}$ -алгебр

$$\text{End}_A(V^{\oplus n}) \simeq \text{Mat}_n(\text{End}_A(V)). \quad (1-6)$$

1.5. Теорема о двойном централизаторе. Пусть в алгебре всех $\mathbb{K}$ -линейных эндоморфизмов векторного пространства V над полем $\mathbb{K}$ задана ассоциативная подалгебра $A \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Эндоморфизмы пространства V как модуля над A образуют в алгебре $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ всех $\mathbb{K}$ -линейных эндоморфизмов пространства V подалгебру

$$\text{End}_A(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid \forall a \in A, \forall v \in V \varphi(av) = a\varphi(v)\},$$

состоящую из всех линейных операторов $W \rightarrow W$, перестановочных со всеми операторами из A . Она называется *централизатором* подалгебры $A \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

ТЕОРЕМА 1.2 (ТЕОРЕМА ДЖЕКОБСОНА)

Пусть конечномерное векторное пространство V над полем $\mathbb{K}$ полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, и $B = \text{End}_A(V)$. Тогда $\text{End}_B(V) = A$.

Доказательство. Включение $A \subset \text{End}_B(V)$ очевидно. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в V базис $e_1, \dots, e_n$ и покажем, что для каждого B -линейного оператора $\varphi \in \text{End}_B(V)$ найдётся такой оператор $a \in A$, что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i — это обеспечит равенство $\varphi = a$. Рассмотрим n -кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\text{End}_B(V)$, полагая $f(v_1, \dots, v_n) = (f v_1, \dots, f v_n)$ для каждого оператора f из A , из B или из $\text{End}_B(V)$. Обозначим вектор $(e_1, \dots, e_n) \in W$ через e . Достаточно убедиться, что $\varphi e \in Ae$. Поскольку W полупрост как A -модуль, его A -подмодуль $Ae \subset W$ является образом некоторого A -линейного проектора $\pi : W \rightarrow Ae$, тождественно действующего на Ae . Если π коммутирует с φ , то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in Ae$, что и требуется. Покажем, что π действительно коммутирует с φ . Для этого запишем эндоморфизм $\pi : V^{\oplus n} \rightarrow V^{\oplus n}$ матрицей (π_{ij}) с элементами $\pi_{ij} \in \text{End}(V)$, как это объяснялось выше. Так как π перестановочен с действием A на W , каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V , т. е. лежит в $\text{End}_A(V) = B$. Поэтому диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \text{End}_B(V)$, коммутирует с π . $\square$

Следствие 1.5 (теорема Бернсайда)

Если основное поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто, а конечномерное векторное пространство V неприводимо как модуль над множеством операторов $R \subset \text{End}(V)$, то ассоциативная оболочка $\text{Ass}(R) \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$. В частности, все конечномерные неприводимые представления $A \rightarrow \text{End}(V)$ любой ассоциативной алгебры A эпиморфны.

Доказательство. По лемме Шура¹ $\text{End}_{\text{Ass}(R)}(V) = \mathbb{k}$, откуда $\text{End}_{\mathbb{k}}(V) = \text{Ass}(R)$. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.10. Докажите, что обратная импликация — если $\text{Ass}(R) = \text{End}(V)$, то R -модуль V неприводим — имеет место над любым полем $\mathbb{k}$.

1.6. Изотипные компоненты. Зафиксируем ассоциативную алгебру A . Для произвольных A -модулей U, W на тензорном произведении $\text{Hom}_A(U, W) \otimes U$ имеется естественная структура A -модуля, на котором элементы $a \in A$ действуют по правилу $a(\varphi \otimes u) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \otimes (au)$. При этом каноническая свёртка

$$c_{WU} : \text{Hom}_A(U, W) \otimes U \rightarrow W, \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u), \quad (1-7)$$

является A -линейным гомоморфизмом.

УПРАЖНЕНИЕ 1.11. Убедитесь в этом.

Для простого A -модуля U образ канонической свёртки (1-7) обозначается $W_U = \text{im } c_{WU} \subset W$ и называется U -изотипной компонентой модуля W .

ЛЕММА 1.3

Изотипная компонента $W_U \subset W$ равна сумме всех имеющихся в W неприводимых подмодулей, изоморфных модулю U .

Доказательство. Каждый ненулевой гомоморфизм $\psi : U \rightarrow W$ инъективен, и любой вектор вида $c_{WU}(\sum \psi_i \otimes u_i) = \sum \psi_i(u_i) \in W$, где $u_i \in U, \psi_i \in \text{Hom}_A(U, W)$, лежит в сумме подмодулей $\psi_i(U) \subset W$, каждый из которых изоморфен U . Наоборот, если векторы $v_i = \psi_i(u_i)$ лежат в образах A -линейных вложений $\psi_i : U \hookrightarrow W$, то $\sum v_i = c(\sum \psi_i \otimes u_i)$. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.12. Пусть $A = \mathbb{k}[t]$, $U = \mathbb{k}[t]/(p)$, $W = \mathbb{k}[t]/(p^n)$, где $p \in \mathbb{k}[t]$ — неприводимый приведённый многочлен. Опишите подмодуль $W_U \subset W$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2

Всякий гомоморфизм A -модулей $\varphi : V \rightarrow W$ переводит U -изотипную компоненту $V_U \subset V$ в U -изотипную компоненту $W_U \subset W$. В частности, для любого подмодуля $V \subset W$ выполнено равенство $V_U = V \cap W_U$.

Доказательство. Гомоморфизм φ переводит любой лежащий в $\text{im } c_{VU}$ вектор $\sum \psi_i(u_i)$, у которого $\psi_i \in \text{Hom}_A(U, V)$, а $u_i \in U$, в вектор $\sum \varphi\psi_i(u_i) \in \text{im } c_{WU}$, ибо $\varphi\psi_i \in \text{Hom}_A(U, W)$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 (изотипное разложение)

Если A -модуль W полупрост, то в любом его разложении в прямую сумму простых подмодулей сумма тех слагаемых, что изоморфны U , совпадает с U -изотипной компонентой $W_U \subset W$. В

¹См. лем. 1.2 на стр. 7.

частности, она не зависит от выбора разложения W в прямую сумму простых подмодулей, и если зафиксировать в каждом классе изоморфных простых модулей какой-нибудь представитель U , то всякий полупростой модуль будет иметь каноническое *изотипное разложение*

$$W = \bigoplus_U W_U, \quad (1-8)$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A -модулям U , для которых $\text{Hom}_A(U, W) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $W = \bigoplus_i W_i$, где все W_i просты. Так как $\text{Hom}_A(U, W) = \bigoplus_i \text{Hom}_A(U, W_i)$ и $\text{Hom}_A(U, W_j) = 0$ для всех $W_j \not\cong U$, образ канонической свёртки (1-7) лежит в сумме тех подмодулей W_i , что изоморфны U . $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1

Для простого модуля U и полупростого модуля W количество изоморфных U слагаемых в разложении¹ модуля W в прямую сумму неприводимых подмодулей обозначается

$$m_U(W) \stackrel{\text{def}}{=} \dim W_U / \dim U, \quad (1-9)$$

и называется *кратностью* простого модуля U в полупростом модуле W .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4

Над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ для любого неприводимого A -модуля U и произвольного A -модуля W каноническая свёртка (1-7) инъективна и тем самым задаёт изоморфизм

$$c_{WU} : \text{Hom}_A(U, W) \otimes U \xrightarrow{\sim} W_U.$$

Доказательство. Будучи линейно порождённым простыми подмодулями, изоморфными U , модуль W_U полупрост и раскладывается в прямую сумму $W_U = \bigoplus_i V_i$ простых подмодулей V_i , каждый из которых изоморфен U . Зафиксируем для каждого i вложение $\psi_i : U \hookrightarrow W$, изоморфно отображающее U на подмодуль $V_i \subset W$. По сл. 1.2 пространство

$$\text{Hom}_A(U, W) = \text{Hom}_A(U, W_U) = \bigoplus_i \text{Hom}_A(U, V_i)$$

является прямой суммой одномерных пространств, порождённых вложениями ψ_i . Поэтому каждый элемент модуля $\text{Hom}_A(U, W) \otimes U$ однозначно записывается в виде $\sum \psi_i \otimes u_i$, где $u_i \in U$. Если $c_{WU}(\sum \psi_i \otimes u_i) = \sum \psi_i(u_i) = 0$, то каждое слагаемое $\psi_i(u_i) \in V_i$ равно нулю в отдельности, ибо сумма $W_U = \bigoplus_i V_i$ прямая. Так как все ψ_i инъективны, все $u_i = 0$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.6

Над алгебраически замкнутым полем для всех конечномерных полупростых A -модулей V, W выполняются равенства $\dim \text{Hom}_A(V, W) = \sum_U m_U(V) m_U(W) = \dim \text{Hom}_A(W, V)$, где суммирование происходит по всем представителям U различных классов изоморфных простых модулей.

Доказательство. Пусть $V = \bigoplus_i V_i$ и $W = \bigoplus_j W_j$, где все V_i и W_j неприводимы. По лемме Шура пространства $\text{Hom}_A(V_i, W_j)$ нулевые при $V_i \not\cong W_j$ и одномерные при $V_i \cong W_j$. Поэтому размерность пространства $\text{Hom}_A(V, W) = \bigoplus_{ij} \text{Hom}_A(V_i, W_j)$ равна $\sum_U m_U(V) m_U(W)$, и то же самое верно для $\text{Hom}_A(W, V)$. $\square$

¹По предл. 1.3 оно не зависит от способа разложения.

Следствие 1.7

Над алгебраически замкнутым полем для любого конечномерного A -модуля W и каждого простого A -модуля U выполняется равенство $m_U(W) = \dim \operatorname{Hom}_A(U, W) = \dim \operatorname{Hom}_A(W, U)$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Для всех $w \in W$ и $u \in U$ вектор $f(w + u) = fw + fu$ лежит в том же классе, что и fw , поскольку $fu \in U$.

Упр. 1.2. Факторкольцо $\mathbb{k}[t]/(t^2)$, на котором $\mathbb{k}[t]$ действует умножениями.

Упр. 1.4. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}'$ является объединение всех модулей цепи.

Упр. 1.5. Пусть $w = u + v$. Тогда $fw = fu + fv$ и $fv \in V$. Поэтому $\pi(fw) = fu = f\pi(w)$.

Упр. 1.6. Пусть $\pi(S) \neq 0$ для простого подмодуля $U \subset W$. Поскольку $f\pi(s) = \pi(fs) \in \pi(S)$ для всех $f \in R$ и $s \in S$, подпространство $\pi(S)$ является R -подмодулем. Для любого R -подмодуля $M \subset \pi(S)$ пересечение $S \cap \pi^{-1}(M) = \{s \in S \mid \pi(s) \in M\}$ является R -подмодулем в S : если $\pi(s) \in M$, то $\pi(fs) = f\pi(s) \in M$ для всех $f \in R$ и $s \in S$. Так как в S нет ненулевых собственных подмодулей, их нет и в $\pi(S)$.

Упр. 1.7. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}$ является объединение или, что то же самое, прямая сумма всех модулей цепи.

Упр. 1.8. Утверждения (а) и (б) проверяются непосредственно; (в) проверяется так: если $\varphi(v) = 0$, то $\varphi(fv) = f\varphi(v) = f(0) = 0$ для всех $f \in R$, а если $v = \varphi(u)$, то $fv = f\varphi(u) = \varphi(fu)$ для всех $g \in R$; Утверждение (г) фактически было доказано в [упр. 1.6](#).

Упр. 1.9. $\varphi\psi = \sum_{\alpha,\beta} {}^t_{\alpha}\varphi_{\alpha\beta}\pi_{\beta} \circ \sum_{\mu,\nu} {}^t_{\mu}\varphi_{\mu\nu}\pi_{\nu} = \sum_{\alpha,\nu} {}^t_{\alpha}p_{\alpha\nu}\pi_{\nu}$, где $p_{\alpha\nu} = \sum_{\eta} \varphi_{\alpha\eta}\psi_{\eta\nu}$, так как

$$\pi_{\beta} {}^t_{\mu} = \begin{cases} \text{Id}_{V_{\eta}} & \text{если } \beta = \mu = \eta \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Упр. 1.10. Из равенства $\text{Ass}(R) = \text{End}(V)$ вытекает, что A_R действует транзитивно на ненулевых векторах пространства V , т. е. A_R -орбита любого ненулевого вектора совпадает со всем пространством V .

Упр. 1.12. Покажите, что $\text{Hom}_{\mathbb{k}[t]}(\mathbb{k}[t]/(p), \mathbb{k}[t]/(p^n)) \simeq \mathbb{k}[t]/(p)$, причём классу $[h]_p$ из правой части отвечает гомоморфизм $\varphi_h: \mathbb{k}[t]/(p) \rightarrow \mathbb{k}[t]/(p^n)$, $[1]_p \mapsto [p^{n-1}h]_{p^n}$, после чего убедитесь, что образ канонической свёртки из форм. (1-7) на стр. 10 порождается классом $[p^{n-1}]_{p^n}$ и изоморфен $\mathbb{k}[t]/(p)$.