Алгебраические расширения полей.

А12◇1. Найдите минимальный многочлен числа **а)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$ **б)** $1+\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

А12◇2. Верно ли, что **а)** $\cos 36^\circ \in \mathbb{Q}(\sin 36^\circ)$ **б)** $\sin 36^\circ \in \mathbb{Q}(\cos 36^\circ)$?

А12◇3. Совпадает ли поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-1})$ с полем **а)** $\mathbb{Q}(-1+\sqrt{-2})$ **б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}+\sqrt{2})$?

А12◇4. Найдите степень над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочлена **а)** x^4-2 **б)** x^p-a ($p\in\mathbb{N}$ простое, $a\in\mathbb{Q}$ не является p-той степенью).

А12◇5. Покажите, что для любого отличного от константы многочлена $f\in\mathbb{Z}[x]$ существует бесконечно много таких простых $p\in\mathbb{N}$, что f имеет корень в $\mathbb{F}_p$.

А12◇6. Покажите, что в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлен $x^{p^n}-x$ является произведением всех неприводимых над $\mathbb{F}_p$ приведённых многочленов, степени которых делят n.

А12◇7*. Покажите, что в результате присоединения к $\mathbb{F}_p$ всех примитивных корней из единицы всех отличных от p простых степеней получится алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{F}}_p$.

А12◇8. Пусть $p\in\mathbb{N}$ — простое, и $a\in\mathbb{F}_p^*$. Покажите, что многочлен x^p-x-a неприводим **а)** в $\mathbb{F}_p[x]$ всегда, а **б)** в $\mathbb{F}_{p^n}[x]$, если и только если $p\nmid n$.

А12◇9. При каких n многочлен $x^{2n}+x^n+1$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$?

А12◇10. Неприводимы ли над $\mathbb{Q}$ при $n\not\equiv 2 \operatorname{mod}(3)$ многочлены **а)** x^n-x+1 **б)** x^n+x+1 ?

А12◇11. Группа диэдра D_n действует на $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ и на $\mathbb{C}(x)$ по правилам $\tau : x\mapsto e^{\frac{2\pi i}{n}}x$, $\sigma : x\mapsto x^{-1}$. Опишите поле инвариантов $\mathbb{C}(x)^{D_n}$.

А12◇12*. Отождествим $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ с единичной сферой в $\mathbb{R}^3$, а стандартные карты U_0, U_1 — с проекциями из полюсов $(0,0,\pm1)$ на экваториальную плоскость $z=0$, стандартно отождествлённую с $\mathbb{C}$. Пусть однородные координаты $(t_0 : t_1)$ согласованы с этими картами и $\varphi_M,\psi_M,\chi_M\in\mathbb{C}[t_0 : t_1]$ — однородные многочлены минимальной степени, корнями которых являются проекции на сферу соответственно вершин, середин рёбер и центров граней вписанного в неё правильного многогранника M. Группа G_M вращений многогранника M действует на $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ и на $\mathbb{C}(t)$, где $t=t_0/t_1$. Опишите $\mathbb{C}(t)^{G_M}$ в терминах φ_M,ψ_M,χ_M, для **а)** тетраэдра **б)** октаэдра **в)** икосаэдра.

А12◇13. Найдите поле инвариантов $\mathbb{C}(x_1,x_2,\dots,x_n)^G$ для **а)** $G=S_n$ **б)** $G\subset S_n$ порождена циклом длины n **в)** G порождена гомотетией $x_\nu\mapsto e^{2\pi i/n}x_\nu$.

А12◇14. Пусть $G=\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$, а $P\subset G$ и $N\subset P$ состоят из замен $t\mapsto at+b$ с $a\neq0$ и $t\mapsto t+b$. Покажите, что **а)** $\mathbb{F}_q(t)^N=\mathbb{F}_q(t^q-t)$ **б)** $\mathbb{F}_q(t)^P=\mathbb{F}_q\big((t^q-t)^{q-1}\big)$ **в)** $\mathbb{F}_q(t)^G=\mathbb{F}_q\left((t^{q^2}-t)^{q+1}/(t^q-t)^{q^2+1}\right)$.

А12◇15. Пусть $\operatorname{char}\Bbbk=p$, и x, y алгебраически независимы над $\Bbbk$. **а)** Найдите $[\Bbbk(x,y) : \Bbbk(x^p,y^p)]$. **б)** Конечно ли множество таких полей $\mathbb{F}$, что $\Bbbk(x^p,y^p)\subset\mathbb{F}\subset\Bbbk(x,y)$?

А12◇16. Всегда ли целое замыкание нётерова нормального кольца A в конечном сепарабельном расширении $\mathbb{L}$ его поля частных[1] конечно порождено как A-модуль?

Норма и след. Характеристический многочлен, след и определитель оператора умножения на элемент $\vartheta\in\mathbb{K}$ в конечном расширении $\mathbb{K}\supset\Bbbk$, обозначаются $\chi_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta;x)\in\Bbbk[x]$ и $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)$, $N_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)\in\Bbbk$.

А12◇17. Покажите, что для расширения Галуа $\Bbbk\subset\mathbb{K}$ с группой Галуа $G=\operatorname{Aut}_{\Bbbk}\mathbb{K}$ выполняются равенства **а)** $\chi_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta;x)=\prod\limits_{g\in G}(x-g\vartheta)$ **б)** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)=\sum\limits_{g\in G}g\vartheta$ **в)** $N_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)=\prod\limits_{g\in G}g\vartheta$

А12◇18. Покажите, что **а)** $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)=0\ \ \forall\,\vartheta\in\mathbb{K} \iff$ расширение $\mathbb{K}\supset\Bbbk$ чисто несепарабельно[2] **б)** в сепарабельном расширении $\mathbb{K}\supset\Bbbk$ форма $(\vartheta_1,\vartheta_2)=\mathrm{Sp}_{K/\Bbbk}(\vartheta_1\vartheta_2)$ невырождена.

А12◇19. Найдите размерность $\mathbb{Q}$-линейной оболочки чисел 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{30}$.

[1] пример этой ситуации: $A=\mathbb{Z}$, $\mathbb{L}=\mathbb{Q}[x]/(f)$, где f неприводим над $\mathbb{Q}$

[2] т. е. каждый элемент $\vartheta\in\mathbb{K}\smallsetminus\Bbbk$ несепарабелен над $\Bbbk$

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 12 (7 апреля 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2а			
б			
3а			
б			
4а			
б			
5			
6			
7			
8а			
б			
9			
10а			
б			
11			
12а			
б			
в			
13а			
б			
в			
14а			
б			
в			
15а			
б			
16			
17а			
б			
в			
18а			
б			
19			