Аффинная алгебраическая геометрия.

А10◇1. Докажите, что максимальный спектр конечномерной как векторное пространство $\Bbbk$-алгебры конечен, а любой конечный морфизм имеет конечные слои.

А10◇2. Приведите пример регулярного не конечного морфизма с конечными слоями.

А10◇3. Пусть $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $\deg f > 0$. При каком условии на вектор $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ параллельная проекция гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в направлении v на гиперплоскость $x_n = 0$ является: **а)** доминантной **б)** конечной **в)** сюрьективной? **г)** Покажите, что $\dim V(f) = n - 1$.

А10◇4. Докажите, что проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ доминантна.

А10◇5. Покажите, что образ доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

А10◇6 (лемма Нётер о нормализации). Покажите, что любая гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ допускает конечную сюрьекцию на некоторую гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

А10◇7. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия X является его аффинным подмногообразием[1] тогда и только тогда, когда для некоторых $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[U]$, порождающих единичный идеал в кольце $\Bbbk[U]$, каждое из главных открытых подмножеств $U_i = \mathcal{D}\left(f_i\right)$ является аффинным многообразием с координатным кольцом $\Bbbk[U_i]$.

А10◇8. Для рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$ покажите, что: **а)** если $x \in \mathrm{Dom}(f)$, то значение $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ не зависит от способа записи $f = p/q$ с $p, q \in \Bbbk[X]$ и $q(x) \neq 0$ **б)** $\mathrm{Dom}(f)$ открыто и плотно в X **в)** отображение $f : \mathrm{Dom}(f) \to \Bbbk$, $x \mapsto f(x)$, непрерывно[2] **г)** идеал $I_f = \{q \in \Bbbk[X] \mid qf \in \Bbbk[X]\}$ порождается содержащимися в нём неделителями нуля **д)** $\mathrm{Dom}(f) = X \smallsetminus V(I_f)$ **е)** если $\mathcal{D}(h) \subset \mathrm{Dom}(f)$, где $h \in \Bbbk[X]$, то $f = g/h^m$ для некоторых $g \in \Bbbk[X]$ и $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ **ж)** если $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m$ — разложение на неприводимые компоненты, то имеется изоморфизм[3]: $\Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk(X_1) \times \Bbbk(X_2) \times \dots \times \Bbbk(X_m)$, $f \mapsto \left(f|_{X_1}, f|_{X_2}, \dots, f|_{X_m}\right)$.

А10◇9. Найдите $\mathrm{Dom}(f)$ для **а)** $f = (1-y)/x$ на $V(x^2+y^2-1) \subset \mathbb{A}^2$ **б)** $f = y/x$ на $V(x^3+x^2-y^2) \subset \mathbb{A}^2$ **в)** $f = x_1/x_3$ на $X = V(x_1x_4 - x_2x_4) \subset \mathbb{A}^4$ и выясните, лежит ли f в $\Bbbk[X]$.

А10◇10 (фактор по конечной группе). Пусть конечная группа G действует регулярными автоморфизмами на аффинном алгебраическом многообразии X над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Обозначим через $R = \Bbbk[X]^G \subset \Bbbk[X]$ подалгебру инвариантов. Покажите, что **а)** $\Bbbk$-линейный оператор $\natural : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow R$, переводящий функцию $f \in \Bbbk[X]$ в центр тяжести её G-орбиты $f^\natural \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum\limits_{\sigma \in G} \sigma f$, обладает $\forall f \in \Bbbk[X]$ и $\forall h \in R$ свойствами: $f^\natural \in R$, $h^\natural = h$, $(fh)^\natural = f^\natural h$ **б)** алгебра R конечно порождена и не имеет нильпотентов. **в)** Постройте такие аффинное алгебраическое многообразие X/G и конечную регулярную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow X/G$, что слои π — это в точности G-орбиты и для любого регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$, такого что $\forall \sigma \in G$ и $\forall x \in X$ $\varphi(\sigma x) = \varphi(x)$, существует единственный регулярный морфизм $\psi : X/G \to Y$, такой что $\psi \circ \pi = \varphi$. **г)** Опишите явными уравнениями в подходящем аффинном пространстве фактор $\mathbb{C}^2/G$, где $G = \mathbb{Z}/(n)$ действует на $\mathbb{C}^2$ по правилу $[k]_n : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i k/n}x, e^{2\pi i k/n}y)$.

А10◇11. Докажите, что произведение неприводимых многообразий неприводимо, и его размерность равна сумме размерностей сомножителей.

---

[1] т. е. существует аффинное многообразие Y и регулярный морфизм $Y \hookrightarrow X$ гомеоморфно отображающий Y на U

[2] в топологии Зарисского

[3] через $f|_{X_i}$ обозначен образ f при гомоморфизме $\Bbbk(X) \to \Bbbk(X_i)$, продолжающем гомоморфизм $\varphi_i^* : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[X_i]$, отвечающий замкнутому вложению $\varphi_i : X_i \hookrightarrow X$

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 10 (3 марта 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
9а			
б			
в			
10а			
б			
в			
г			
11			