Многочлены и аффинные алгебраические многообразия.

А9◇1. Вычислите результант: **а)** $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $2x^2 - x - 1$ **б)** $2x^4 - x^3 + 3$ и $3x^3 - x^2 + 4$ **в)** $2x^3 - 3x^2 - x + 2$ и $x^4 - 2x^2 - 3x + 4$ **г*)** круговых многочленов Φ_n и Φ_m

А9◇2. Исключите x из уравнений: **а)** $x^2-xy+y^2-3 = x^2y-xy^2-6 = 0$ **б)** $4x^2-7xy+y^2+13x-2y-3 = 9x^2 - 14xy + y^2 + 28x - 4y - 5 = 0$ **в)** $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16 = 2x^2 - xy + y^2 - x - y - 4 = 0$.

А9◇3 (дискриминант). Дискриминантом многочлена $f(x) = a_n \prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ называется произведение $D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$. **а)** Выразите дискриминант $D(f)$ через результант $R(f, f')$ многочлена и его производной и **б)** покажите, что $D(fg) = D(f)D(g)R^2(f,g)$.

А9◇4. Вычислите дискриминанты многочленов: **а)** $\sum_{k=0}^{n} x^k$ **б)** $\sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ **в)** $x^n + a$ **г*)** $\Phi_k(x)$

А9◇5. Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, $f, g \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $\forall\, p \in \mathbb{A}^n(\Bbbk)$ $g(p) = 0 \Rightarrow f(p) = 0$. Верно ли, что каждый неприводимый сомножитель многочлена g делит многочлен f?

Обозначения. Для идеала $I \subset A$ положим $\sqrt{I} \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$. Для подмножества $X \subset \mathbb{A}^n$ и идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ положим $I(X) \overset{\text{def}}{=} \{f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \ \ \forall\, p{\in}X\}$ и $V(J) \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0 \ \ \forall\, f{\in}J\}$.

А9◇6. Для пары идеалов I, J кольца $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ положим $K = \{ab \mid a \in I,\ b \in J\}$ и обозначим через IJ идеал, порождённый множеством K. Верно ли, что **а)** $K = IJ$ **б)** $K = I \cap J$ **в)** $IJ = I \cap J$ **г)** $1 \in I + J \ \Rightarrow\ IJ = I \cap J$ **д)** $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$ **е)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ **ж)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$ **з)** $(I = \sqrt{I}\ \&\ J = \sqrt{J}) \ \Rightarrow\ IJ = \sqrt{IJ}$.

А9◇7. Какие из следующих трёх колец Нётеровы: **а)** $\{p(z\,/\,q(z) \in \mathbb{C}(z) \mid q(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1\}$ **б)** $\{f(z) \in \mathbb{C}[[z]] \mid f$ сходится всюду в $\mathbb{C}\}$ **в)** $A[[t]]$, где A нётерово.

А9◇8. Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Можно ли задать многообразие $V(J)$ двумя полиномиальными уравнениями?

А9◇9. Найдите какой-нибудь многочлен $f \in I(V(J)) \smallsetminus J$ для $J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \Bbbk[x, y]$.

А9◇10. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$ для **а)** $J = (xy, (x-y)z)$ **б)** $J = (xy+yz+zx, x^2+y^2+z^2)$

А9◇11. Пусть известны системы уравнений, задающих аффинные алгебраические многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$. Напишите систему уравнений, задающую $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$.

А9◇12 (топология Зарисского). Для аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ положим[1] $\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$. Для идеала $J \subset \Bbbk[X]$ положим $V(J) \overset{\text{def}}{=} \{p \in X \mid f(p) = 0 \ \ \forall\, f{\in}J\}$. Для функции $f \in \Bbbk[X]$ положим $\mathcal{D}_f \overset{\text{def}}{=} X \smallsetminus V(f)$. Покажите, что **а)** подмножества $V(J) \subset X$, отвечающие всевозможным идеалам $J \subset \Bbbk[X]$, составляют полный набор замкнутых множеств некоторой топологии[2] на X **б)** подмножества $\mathcal{D}_f \subset X$ с $f \in \Bbbk[X]$ образуют для неё базис открытых множеств **в)** любое открытое покрытие любого открытого $U \subset X$ содержит конечное подпокрытие.

А9◇13. Для кольца A непрерывных[3] функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X выясните **а)** биективно ли отображение $X \to \operatorname{Spec}_m A$, $x \mapsto \ker \operatorname{ev}_x$ **б)** индуцирует ли топология Зарисского на $\operatorname{Spec}_m A$ исходную топологию.

А9◇14. Пусть $X = \operatorname{Spec}_m A$ — аффинное алгебраическое многообразие. Равносильна ли разложимость A в прямое произведение $A = A_1 \times A_2$ разложимости X в дизъюнктное объединение $X = X_1 \sqcup X_2$ двух собственных замкнутых подмножеств?

---

[1] это фактор кольцо называется *координатной алгеброй* многообразия X

[2] она называется *топологией Зарисского*

[3] вещественных или комплексных

Персональный табель ______________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 9 (24 февраля 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
в			
3а			
б			
4а			
б			
в			
г			
5			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
з			
7а			
б			
в			
8			
9			
10а			
б			
11			
12а			
б			
в			
13а			
б			
14			