Расширения коммутативных колец.

В этом листке слово «кольцо» всюду означает *коммутативное кольцо с единицей*, и все гомоморфизмы колец предполагаются переводящими единицу в единицу.

A8◇1. Пусть поле $\mathbb{F} \supset \mathbb{Q}$ имеет как векторное пространство над $\mathbb{Q}$ размерность $d < \infty$. Означает ли целость над $\mathbb{Z}$ числа $\xi \in \mathbb{F}$, что оператор умножения на ξ записывается целочисленной матрицей **а)** в каком-нибудь **б)** в любом базисе $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$? Покажите, что
в) кольцо целых $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ является свободным $\mathbb{Z}$-модулем ранга d
г) билинейная *форма следа* $\mathrm{Sp} : K \times K \to \mathbb{Q}$, сопоставляющая числам $\alpha, \beta \in K$ след оператора умножения на $\alpha\beta$, невырождена

A8◇2. Опишите кольца целых в полях **а)** $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ **б)** $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ **в)** $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ **г*)** $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, где $d \in \mathbb{Z}$ не делится на квадраты, и **д)** вычислите дискриминанты[1] этих полей.

A8◇3. Покажите, что любое факториальное[2] кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

A8◇4. Выясните, цело ли **а)** кольцо $\Bbbk[x, y]$ над подкольцом таких многочленов f, что $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(0,0)} f = 0$ **б)** кольцо непрерывных функций $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ над подкольцом таких функций f, что $f(1,0) = f(0,1)$.

A8◇5. Для нормального[3] кольца A с полем частных $\mathbb{F}$ покажите, что **а)** произведение двух приведённых многочленов из $\mathbb{F}[x]$ лежит в $A[x]$, если и только если оба множителя лежат в $A[x]$ **б)** если элемент b какой-либо $\mathbb{F}$-алгебры B цел над A, то его минимальный многочлен над $\mathbb{F}$ лежит в $A[x]$ **в*)** кольцо $A[x]$ нормально.

A8◇6. Покажите, что если фактор кольцо $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ является полем, то оно конечно.

A8◇7. Покажите, что любой гомоморфизм кольца A в алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ можно продолжить до гомоморфизма $B \to \Bbbk$ любого целого расширения $B \supset A$.

A8◇8. Верно ли, что целое замыкание нётерова нормального кольца A с полем частных K в любом конечном сепарабельном расширении[4] $L \supset K$ конечно порождено как A-модуль?

A8◇9. Покажите, что всякое поле $\mathbb{F} \supset \mathbb{C}$, базис которого как векторного пространства над $\mathbb{C}$ не более, чем счётен, совпадает с $\mathbb{C}$.

A8◇10*. Выведите из предыдущей задачи, что для любого набора многочленов

$$f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

выполняется альтернатива: либо система уравнений $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ имеет решение в $\mathbb{C}^n$, либо существуют такие $g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, что $\sum f_i g_i = 1$.

A8◇11. Покажите, что характер неодномерного неприводимого комплексного представления конечной группы обращается в нуль хотя бы на одном классе сопряжённости.

A8◇12*. Покажите, что размерность неприводимого комплексного представления конечной группы делит индекс любой её нормальной абелевой подгруппы.

---

[1] т. е. определитель Грама формы следа в любом базисе кольца целых как модуля над $\mathbb{Z}$

[2] напомним, что кольцо A называется *факториальным*, если в нём нет делителей нуля, и каждый необратимый элемент $a \in A$ является произведением конечного числа неприводимых, причём для любых двух разложений $a = p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$ в произведение неприводимых множителей $m = n$ и (после надлежащей перенумерации) $p_i = s_i q_i$ для некоторых обратимых $s_i \in A$; например, факториальными являются любое поле, любое кольцо главных идеалов (в частности, кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$) и кольца многочленов $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над любым факториальным кольцом K

[3] коммутативное кольцо называется *нормальным*, если в нём нет делителей нуля и оно целозамкнуто в своём поле частных

[4] т. е. в таком содержащем K поле L, что размерность L как векторного пространства над K конечна и минимальный многочлен любого элемента $\vartheta \in L$ над полем K не имеет кратных корней ни в каком расширении поля K

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 8 (17 февраля 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
в			
г			
д			
3			
4а			
б			
5а			
б			
в			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			