Категории и функторы.

Обозначения. Через $\mathcal{S}et$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{G}rp$, $\mathcal{C}mr$, $\mathcal{M}od_K$, $\mathcal{V}ec_{\Bbbk} = \mathcal{M}od_{\Bbbk}$, $\mathcal{A}ss_{\Bbbk}$, A-$\mathcal{M}od$, $\mathcal{M}od$-A обозначаются категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец[1], модулей над коммутативным кольцом K, векторных пространств и ассоциативных алгебр над полем $\Bbbk$, левых и правых модулей над алгеброй A. $\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{D})$ и $p\mathcal{S}h(\mathcal{C},\mathcal{D})$ суть категории функторов $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и предпучков[2] $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$.

А7◇1. Категория Δ образована упорядоченными множествами $[n] = \{0, 1, \dots , n\} \subset \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$, и неубывающими отображениями $[n] \to [m]$. **а)** Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$ порождается тождественными отображениями $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$, вложениями $\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n]$, $0 \leqslant i \leqslant n$, образ не содержит i, и наложениями $s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1]$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $(i+1) \mapsto i$, и **б*)** найдите образующие идеала соотношений между ними.

А7◇2. Покажите, что категория Δ_{big}, образованная *всеми* конечными упорядоченными множествами и неубывающими отображениями между ними эквивалентна своей малой подкатегории Δ.

А7◇3. Для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор $h^X : Y \mapsto \mathrm{Hom}(X,Y)$ и предпучок $h_X : Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y,X)$ переводят стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ соответственно в левое и правое умножения на эту стрелку: $\varphi_* : \mathrm{Hom}(X,Y_1) \to \mathrm{Hom}(X,Y_2)$, $\psi \mapsto \varphi \circ \psi$ и $\mathrm{Hom}(Y_2,X) \to \mathrm{Hom}(Y_1,X)$, $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$. Проверьте, что сопоставления $X \mapsto h^X$ и $X \mapsto h_X$ задают предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)$ и функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{C},\mathcal{S}et)$.

А7◇4. Покажите, что при применении h^X к точной последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$ в $\mathcal{A}b$ получится точная последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(X,A) \to \mathrm{Hom}(X,B) \to \mathrm{Hom}(X,C)$, правая стрелка в которой не обязательно сюрьективна. Установите двойственный факт про h_X.

А7◇5. Опишите произведения $X \times Y$ и копроизведения $X \otimes Y$ в **а)** $\mathcal{S}et$ **б)** $\mathcal{T}op$ **в)** $\mathcal{M}od_K$ **г)** $\mathcal{G}rp$ **д)** $\mathcal{C}mr$.

А7◇6. Пусть $p \in \mathbb{N}$ — простое и $A_n = \mathbb{Z}/(p^n)$. Для всех $n > m$ обозначим через $\psi_{nm} : \mathbb{Z}/(p^n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(p^m)$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/(p^m) \hookrightarrow \mathbb{Z}/(p^n)$ — вложение $[1] \mapsto [p^{n-m}]$. Покажите, что в $\mathcal{A}b$

а) $\varprojlim A_n$ вдоль стрелок ψ_{mn} изоморфен группе целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_{(p)}$

б) $\varinjlim A_n$ вдоль стрелок φ_{mn} изоморфен подгруппе классов дробей вида z/p^ℓ в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

А7◇7. В категории $\mathcal{A}b$ положим $B_n = \mathbb{Z}/(n)$ и при $n|m$ обозначим через $\psi_{nm} : \mathbb{Z}/(m) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(n)$ факторизацию, а через $\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/(n) \hookrightarrow \mathbb{Z}/(m)$ — вложение $[1] \mapsto [m/n]$. Покажите, что

а) $\varprojlim B_n$ вдоль стрелок ψ_{nm} изоморфен неархимедову пополнению $\prod_p \mathbb{Z}_{(p)}$ группы $\mathbb{Z}$

б) $\varinjlim B_n$ вдоль стрелок φ_{mn} изоморфен $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

А7◇8. Для любого чума $\mathcal{N}$ постройте предел и копредел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$.

А7◇9. Докажите, что функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ тогда и только тогда имеет левый сопряжённый F, когда для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор $h_G^X : Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ копредставим, и в этом случае $F(X)$ копредставляет h_G^X. Найдите двойственные необходимые и достаточные условия существования правого сопряжённого функтора G к данному функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

А7◇10. Постройте левый сопряжённый к функтору забывания алгебраической структуры $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ для **а)** $\mathcal{C} = \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ **б)** $\mathcal{C} = \mathcal{A}ss_{\Bbbk}$ **в)** $\mathcal{C} = \mathcal{C}mr$ **г)** $\mathcal{C} = \mathcal{G}rp$. В каждом из случаев явно опишите естественное преобразование композиции сопряжённых функторов и тождественный эндофунктор.

А7◇11. Покажите, что все левые сопряжённые функторы перестановочны с копределами, а правые — с пределами[3].

А7◇12. Для любого расширения $S \subset R$ ассоциативных алгебр с единицей постройте левый и правый сопряжённые функторы к функтору ограничения $\mathrm{res}_S^R : R$-$\mathcal{M}od \to S$-$\mathcal{M}od$.

---

[1] с единицей и гомоморфизмами, переводящими единицу в единицу

[2] сиречь контравариантных функторов

[3] функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любой диаграммы $\Phi : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом Φ в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ \Phi$ в $\mathcal{D}$

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 7 (4 декабря 2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
д			
6а			
б			
7а			
б			
8			
9			
10а			
б			
в			
г			
11			
12			