Тензорная, симметрическая и внешняя алгебры

А2◇1. Постройте для конечномерных векторных пространств U, V над любым полем канонические изоморфизмы $\mathrm{Hom}\big(U\otimes \mathrm{Hom}(U,W)\,,\,W\big)\simeq\ \mathrm{End}\big(\mathrm{Hom}(U,W)\big)\ \simeq\ \mathrm{Hom}\big(\,U\,,\,W\otimes\mathrm{Hom}(U,W)^*\big)$ и выясните, какому эндоморфизму пространства $\mathrm{Hom}(U,W)$ отвечает при этом отображение $c\,:\,U\otimes\mathrm{Hom}(U,W)\to W$, действующее на разложимые тензоры по правилу $c(u\otimes\varphi)=\varphi(u)$. Может ли оператор $\tilde c\,:\,U\to\mathrm{Hom}(U,W)^*\otimes W$, соответствующий c, иметь ненулевое ядро?

А2◇2. Для конечномерных векторных пространств U, V, W постройте канонический изоморфизм

$$\mathrm{End}(U\otimes V\otimes W)\simeq\mathrm{Hom}\big(\mathrm{Hom}(U,V)\otimes\mathrm{Hom}(V,W)\,,\,\mathrm{Hom}(U,W)\big)$$

и выясните, какому линейному отображению $\mathrm{Hom}(U,V)\otimes\mathrm{Hom}(V,W)\to\mathrm{Hom}(U,W)$ отвечает тождественный эндоморфизм пространства $U\otimes V\otimes W$.

Обозначения. Через $\mathrm{Sym}^n(V),\mathrm{Skew}^n(V)\subset V^{\otimes n}$ обозначаются *под*пространства симметричных и кососимметричных тензоров. Через $S^nV=V^{\otimes n}/\mathcal{I}^{(n)}_{\mathrm{sym}}$ и $\Lambda^nV=V^{\otimes n}/\mathcal{I}^{(n)}_{\mathrm{skew}}$ обозначаются *фактор*-пространства по соотношениям коммутирования и антикоммутирования соответственно[1]

А2◇3. Предъявите тензор $t\in V^{\otimes 3}$, не являющийся суммой кососимметричного и симметричного.

А2◇4. Фиксируем базисный вектор η в одномерном пространстве $\Lambda^{\dim V}V$ и зададим между пространствами Λ^kV и Λ^mV с $k+m=\dim V$ спаривание $\langle\,*\,,\,*\,\rangle\,:\,\Lambda^kV\times\Lambda^mV\to\Bbbk$ правилом $\omega_1\wedge\omega_2=$ $=\big\langle\,\omega_1\,,\,\omega_2\,\big\rangle\cdot\eta$, где $\omega_1\in\Lambda^kV$, $\omega_2\in\Lambda^mV$. Покажите, что это спаривание невырождено и выясните, как устроен оператор $v^*\ :\ \Lambda^kV\ \to\ \Lambda^{k-1}V$, двойственный относительно него к оператору $v\,:\,\Lambda^mV\to\Lambda^{m+1}V$ левого внешнего умножения $\xi\mapsto v\wedge\xi$ на данный вектор $v\in V$.

А2◇5. Над полем $\Bbbk$ характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами: **а)** симметричных n-линейных форм $\varphi\,:\,V\times V\times\ \cdots\ \times V\to\Bbbk$ **б)** функций $f\,:\,V\to\Bbbk$, задаваемых однородным многочленом степени n от линейных координат в каком-нибудь[2] базисе **в)** $\mathrm{Sym}^n(V^*)$ **г)** $\mathrm{Sym}^n(V)^*$ **д)** $(S^nV)^*$ **е)** (S^nV^*). Какие из построенных изоморфизмов останутся таковыми и над всеми полями конечной характеристики?

А2◇6. Над полем $\Bbbk$ характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами: **а)** кососимметричных n-линейных форм $\varphi\,:\,V\times V\times\ \cdots\ \times V\to\Bbbk$ **б)** $\mathrm{Skew}^n(V^*)$ **в)** $\mathrm{Skew}^n(V)^*$ **г)** $(\Lambda^nV)^*$ **д)** (Λ^nV^*). Какие из них сохранятся в конечной характеристике?

А2◇7 (принцип Аронгольда). Покажите, что пространство $\mathrm{Sym}^n(V)\subset V^{\otimes n}$ для конечномерного V над полем характеристики нуль линейно порождается тензорами $v^{\otimes n}=v\otimes v\otimes\ \cdots\ \otimes v$ с $v\in V$ и явно выразите через них тензор $u\otimes w\otimes w+w\otimes u\otimes w+w\otimes w\otimes u\in\mathrm{Sym}^3V$.

А2◇8. Можно ли обратимой линейной заменой переменных преобразовать многочлен $9\,x^3-15\,yx^2-$ $-\,6\,zx^2+9\,xy^2+18\,z^2x-2\,y^3+3\,zy^2-15\,z^2y+7\,z^3$ в многочлен от $\leqslant 2$ переменных?

А2◇9. Существуют ли ненулевые линейные операторы $F_1,F_2,\dots,F_m\,:\,V\to V$, для которых имеется такой ненулевой набор констант $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$, что $\forall\,n\in\mathbb{N}\ \ \lambda_1F_1^{\otimes n}+\lambda_2F_2^{\otimes n}+\cdots+\lambda_mF_m^{\otimes n}=0$?

А2◇10. Выразите через коэффициенты характеристического многочлена оператора $F\ :\ V\ \to\ V$ **а)** $\mathrm{tr}\,F^{\otimes 2}$ **б)** $\mathrm{tr}\,F^{\otimes 3}$ **в)** $\det F^{\otimes 2}$ **г)** $\det F^{\otimes 3}$, а также след и определитель действия F на пространстве **д)** $\mathrm{Hom}(V,V)$ по правилу $G\mapsto FGF^{-1}$ **е)** S^2V^* по правилу $F\varphi(x)=\varphi\left(F^{-1}x\right)$.

А2◇11. Покажите, что разложение Тейлора многочлена $\det(F)$ на пространстве линейных операторов $F\,:\,V\to V$ имеет вид $\det(\lambda A+\mu B)=\sum\limits_{p+q=\dim V}\lambda^p\mu^q\cdot\mathrm{tr}\left(\Lambda^pA\cdot\Lambda^qB^*\right)$, где $\Lambda^pA\,:\,\Lambda^pV\to\Lambda^pV$ и $\Lambda^qB^*\,:\,\Lambda^pV\simeq\Lambda^qV^*\to\Lambda^qV^*\simeq\Lambda^pV$ суть внешние степени A и B^* (ср. с зад. А2◇4).

А2◇12. Для диагонализуемого оператора F над полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}\,\Bbbk=0$ выразите собственные числа S^nF и Λ^nF через собственные числа F и докажите в $\Bbbk[[t]]$ тождества **а)** $\det(E-tF)^{-1}=$ $=\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{tr}\left(S^kF\right)\cdot t^k$ **б)** $\det(E+tF)=\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{tr}\left(\Lambda^kF\right)\cdot t^k$.

---

[1] т. е. однородные компоненты степени n симметрической и грассмановой алгебр пространства V

[2] а значит, и в любом

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (25 сентября 2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
д			
е			
6а			
б			
в			
г			
д			
7			
8			
9			
10а			
б			
в			
г			
д			
е			
11			
12а			
б			