Тензорные произведения

А1◇1. Имеются ли для любых модулей над любым коммутативным кольцом K с единицей изоморфизмы а) $(M \oplus N) \otimes L \simeq (M \otimes L) \oplus (N \otimes L)$ б) $\mathrm{Hom}(M \oplus N, L) \simeq \mathrm{Hom}(M, L) \oplus \mathrm{Hom}(N, L)$ в) $\mathrm{Hom}(L, M \oplus N) \simeq \mathrm{Hom}(L, M) \oplus \mathrm{Hom}(L, N)$ г) $\mathrm{Hom}(L \otimes M, N) \simeq \mathrm{Hom}(L, \mathrm{Hom}(M, N))$?

А1◇2. Опишите[1]: а) $\mathbb{Z}/(3) \otimes \mathbb{Z}/(4)$ б) $\mathbb{Z}/(6) \otimes \mathbb{Z}/(4)$ в) $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$, где $(m, n) = (1)$ г) $\mathbb{Z}/(p^m) \otimes \mathbb{Z}/(p^n)$, где p — простое.

А1◇3. Опишите: а) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(6), \mathbb{Z}/(5))$ б) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(6), \mathbb{Z}/(10))$ в) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n))$, где $(m, n) = (1)$ г) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(p^m), \mathbb{Z}/(p^n))$, p — простое д) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(30))$ е) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z})$ ж) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/(p^n))$, p — простое

Внимание! Всюду далее речь идёт про конечномерные векторные пространства над произвольным полем $\Bbbk$.

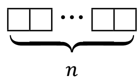
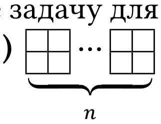
А1◇4. Верно ли, что среди векторов $v_i \in V_i$ тогда и только тогда есть нулевой, когда на этом наборе векторов зануляются все полилинейные отображения $\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$?

А1◇5. Пользуясь каноническим изоморфизмом $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$, запишем операторы $A : U \to V$ и $B : V \to W$ в виде $A = \sum \alpha_\nu \otimes a_\nu$, $B = \sum \beta_\mu \otimes b_\mu$ с $\alpha_\nu \in U^*$, $a_\nu \in V$, $\beta_\mu \in V^*$, $b_\mu \in W$. Запишите аналогичным образом их композицию $BA \in \mathrm{Hom}(U, W) \simeq U^* \otimes W$.

А1◇6. Пусть $e_i \in V$ и $x_i \in V^*$ — двойственные базисы. В какой оператор переходит при изоморфизме из зад. А1◇5 *тензор Казимира* $\sum x_i \otimes e_i \in V^* \otimes V$?

А1◇7. Отображение $\tau : \mathrm{Hom}(V, V) \simeq V^* \otimes V \to (V \otimes V^*)^* \simeq \mathrm{Hom}(V, V)^*$, переводящее $\xi \otimes v$ в линейную форму, значение которой на $v' \otimes \xi'$ равно $\xi(v') \cdot \xi'(v)$, задаёт на пространстве $\mathrm{Hom}(V, V)$ корреляцию. Какой билинейной форме на $\mathrm{Hom}(V, V)$ она отвечает? Вырождена ли эта форма? Симметрична ли? Как она записывается в терминах матриц? Что за квадратичная форма ей соответствует?

А1◇8. Как связана матрица тензорного произведения двух операторов с матрицами самих операторов? Пусть F — вложение, а $E \neq 0$ — тождественный оператор. Верно ли, что $F \otimes E$ — вложение?

А1◇9. Опишите цикловой тип тензорного квадрата нильпотентного оператора в терминах диаграммы Юнга самого оператора. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для операторов циклового типа а)  б)  в) 

А1◇10. Пусть операторы $f : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ и $g : \Bbbk^m \to \Bbbk^m$ диагонализуемы с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$. Найдите все собственные значения $f \otimes g$ и их кратности.

А1◇11. Постройте для конечномерных пространств U, V, W канонические изоморфизмы а) $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$ б) $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U, V), W) \simeq \mathrm{Hom}(V, U \otimes W)$

А1◇12. Постройте изоморфизм пространства n – линейных форм $V^* \times \cdots \times V^* \to \Bbbk$ а) с пространством $V^{\otimes n}$ б) с пространством, двойственным к $V^{*\otimes n}$.

А1◇13. Найдите размерность пространства таких билинейных форм $\varphi : V \times V \to \Bbbk$, что $\forall\, u, v \in V$ а) $\varphi(v, v) = 0$ б) $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

А1◇14. Найдите размерность пространства таких трилинейных форм $\varphi : V \times V \times V \to \Bbbk$, что $\forall\, u, v, w \in V$ а) $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, v)$ б) $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w)$ в) $\varphi(u, u, u) = 0$ г) $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w) = \varphi(u, w, w)$ д*) $\varphi(u, v, v) = \varphi(u, u, v) = 0$ е*) $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, w, u)$ ж*) $\varphi(u, v, w) + \varphi(v, w, u) + \varphi(w, u, v) = 0$

А1◇15. Фиксируем ненулевой $\xi \in V^*$. Оператор $i_\xi : V^{\otimes(n+1)} \to V^{\otimes n}$, двойственный[2] оператору левого тензорного умножения $\mu_\xi : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes(n+1)}$, $\tau \mapsto \xi \otimes \tau$, называется *внутренним умножением* на ξ. Явно опишите действие i_ξ на заданную n-линейную форму $w : V^* \times \cdots \times V^* \to \Bbbk$. Всегда ли i_ξ эпиморфен?

---

[1] т. е. явно укажите каноническое представление абелевой группы в виде прямой суммы циклических групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/(p^m)$

[2] при каноническом отождествлении $V^{\otimes n}$ с $\left(V^{*\otimes n}\right)^*$ из зад. А1◇12

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 1 (8 сентября 2014)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
в			
г			
3а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
4			
5			
6			
7			
8			
9а			
б			
в			
10			
11а			
б			
12а			
б			
13а			
б			
14а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
15			