§9. Категории и функторы

9.1. Категории. Категория $\mathcal{C}$ — это *класс*[1] объектов, обозначаемый $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задано *множество* морфизмов

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)\,.$$

Морфизмы из X в Y удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \to Y$. Для разных пар объектов эти множества стрелок не пересекаются. Объединение всех стрелок категории $\mathcal{C}$ обозначается $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} = \bigsqcup_{X,Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ имеется отображение композиции[2]

$$\mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)\,, \quad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi \quad (= \varphi\psi)\,, \tag{9-1}$$

ассоциативное в том смысле, что $(\chi\circ\varphi)\circ\psi = \chi\circ(\varphi\circ\psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, у каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ есть *тождественный морфизм* $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$, который для любых стрелок $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Z \to X$ удовлетворяет условиям[3] $\varphi \circ \mathrm{Id}_X = \varphi$ и $\mathrm{Id}_X \circ \psi = \psi$.

Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ — это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathcal{C}$. Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ называется *полной*, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$. Категория называется *малой*, если $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ это *множество*, а не больший класс. В этом случае $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ тоже является множеством.

Пример 9.1 (категории, не являющиеся малыми)
Часто возникающие в примерах категории, *не* являющиеся малыми — это категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений, категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений, категория $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ векторных пространств над полем $\Bbbk$ и $\Bbbk$-линейных отображений и её полная подкатегория $vec_{\Bbbk}$ конечномерных пространств, категории R-$\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od$-R левых и правых модулей над кольцом R и R-линейных отображений и их полные подкатегории R-mod и mod-R конечно представимых[4] модулей, категория $\mathcal{A}b = \mathbb{Z}$-$\mathcal{M}od$ абелевых групп и их гомоморфизмов, категория $\mathcal{G}rp$ всех групп и групповых гомоморфизмов, категория $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей и гомоморфизмами, переводящими единицу в единицу, и т. п.

Пример 9.2 (чумы и топологии)
Каждое частично упорядоченное множество M это малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, стрелки суть неравенства:

$$\mathrm{Hom}_M(n, m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leqslant m, \\ \varnothing\,, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

[1] не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики); отметим лишь, что такая формализация возможна и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют

[2] значок «$\circ$», как и знак умножения, принято опускать, если понятно о чём речь

[3] выкладка $\mathrm{Id}' = \mathrm{Id}' \circ \mathrm{Id}'' = \mathrm{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен

[4] модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю

и прозведением стрелок $k \leqslant \ell$ и $\ell \leqslant n$ является стрелка $k \leqslant n$. Важным примером такой категории является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X, стрелками в которой являются включения:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U,W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \nsubseteq W. \end{cases}$$

Пример 9.3 (малые категории и ассоциативные алгебры)
Всякую ассоциативную алгебру A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(e,e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathcal{C}$ можно связать *алгебру стрелок* $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathcal{C}$ с коэффициентами в каком – нибудь коммутативном кольце K:

$$K[\mathcal{C}] = \bigoplus_{X,Y\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Hom}(X,Y) \otimes K = \left\{ \sum x_i\varphi_i \;\middle|\; \varphi_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}),\ x_i \in K \right\},$$

где для множества M мы обозначаем через $M \otimes K$ свободный K-модуль с базисом M, образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K. Умножение в алгебре $K[\mathcal{C}]$ задаётся композицией стрелок

$$\varphi\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на их линейные комбинации. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц[1], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y,X) стоят элементы из своего пространства $\mathrm{Hom}(X,Y) \otimes K$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами $e_f \circ f = f \circ e_f = f$. В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X, являющихся началами и концами стрелок, линейной комбинацией которых является f.

9.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ в категории $\mathcal{C}$ называется *мономорфизмом* (соотв. *эпиморфизмом*), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). Стрелка $\varphi : X \to Y$ называется *изоморфизмом* (или *обратимой* стрелкой), если существует такая стрелка $\psi : Y \to X$, что $\varphi\psi = \mathrm{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \mathrm{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными* друг к другу.

Пример 9.4 (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы)
Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — сохраняющие порядок отображения[2]. Категория Δ_{big} не является малой[3], но содержит полную малую подкатегорию $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$,

[1] возможно бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов
[2] т. е. такие $\varphi : X \to Y$, что $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$
[3] по упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 114

объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geqslant 0, \tag{9-2}$$

со стандартным порядком. Множество (9-2) называется n-мерным *комбинаторным симплексом*, а категория Δ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \operatorname{Ob}\Delta_{\text{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \xrightarrow{\sim} [n]$ с *единственным* $[n] \in \operatorname{Ob}\Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

Упражнение 9.1. Сколько всего стрелок в множестве $\operatorname{Hom}_\Delta([n],[m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных? Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \operatorname{Id}_{[n]} \quad \text{(тождественное отображение)} \tag{9-3}$$

$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \quad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{9-4}$$

$$s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1] \quad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{9-5}$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

9.1.2. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathcal{C}$ связана *противоположная* категория $\mathcal{C}^{\text{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\operatorname{Ob}\mathcal{C}^{\text{opp}} = \operatorname{Ob}\mathcal{C}, \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{opp}}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X), \quad \varphi^{\text{opp}} \circ \psi^{\text{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\text{opp}}.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре C^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением.

9.2. Функторы. Функтор[1] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ это отображение $\operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений[2]

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)), \quad \varphi \mapsto F(\varphi), \tag{9-6}$$

что $F(\operatorname{Id}_X) = \operatorname{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $F(\varphi\circ\psi) = F(\varphi)\circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр функторы суть *гомоморфизмы* одной алгебры стрелок в другую. Если все отображения (9-6) сюрьективны, функтор F называется *полным*[3]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (9-6) инъективны, функтор F называется *строгим*[4]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иногда называют *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\operatorname{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие

[1] иногда вместо слова «функтор» говорят *ковариантный функтор*

[2] по одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$

[3] по-английски: *full*

[4] по-английски: *faithful*

из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой[1], морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре.

Пример 9.5 (геометрическая реализация комбинаторных симплексов)
Зададим функтор $\varDelta \to \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n-мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n-мерный симплекс[2]

$$\varDelta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_\nu = 1\,,\ x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,, \tag{9-7}$$

а стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ — единственное аффинное отображение $\varphi_* : \varDelta^n \to \varDelta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (9-4) и (9-5) алгебры стрелок категории $\varDelta$ переводятся этим функтором, соответственно, во *вложение* i-той грани $\varDelta^{(n-1)} \hookrightarrow \varDelta^n$ и в *вырождение* вдоль i-того ребра[3] $\varDelta^n \twoheadrightarrow \varDelta^{(n-1)}$.

9.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ или *предпучком* объектов категории $\mathcal{D}$ на категории $\mathcal{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

Пример 9.6 (триангулированные пространства)
Обозначим через $\varDelta_{\mathrm{s}} \subset \varDelta$ неполную подкатегорию, объектами которой являются комбинаторные симплексы: $\mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ob}\,\varDelta$, а качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*[4] отображения. Категория $\varDelta_{\mathrm{s}}$ называется *полусимплициальной категорией*.

Упражнение 9.2. Убедитесь, что алгебра стрелок $K[\varDelta_{\mathrm{s}}]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (9-4).

Предпучок множеств $X : \varDelta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории $\varDelta_{\mathrm{s}}$ называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, точки которого следует воспринимать как дизъюнктный набор n-мерных симплексов (9-7), из коих будет склеиваться пространство $|X|$. Стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ в категории $\varDelta_{\mathrm{s}}$ биективно соответствуют n-мерным граням m-мерного симплекса $\varDelta^m$, и отображение $X(\varphi) : X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ, задаёт *правило склейки*: оно указывает данному m-мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n-мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к нему в качестве φ-той n-мерной грани.

---

[1]например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля

[2]т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$

[3]т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й

[4]т. е. сохраняющие порядок и инъективные

Упражнение 9.3. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерным симплексами[1] б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом, а также триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерным симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом и д) триангуляция 2-мерного тора одним 0-мерным, тремя 1-мерными и двумя 2-мерным симплексами? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Пример 9.7 (симплициальные множества)
Предпучок множеств $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из симплициального множества X также можно изготовить топологическое пространство $|X|$, склеив стандартные правильные симплексы Δ_x^n, биективно сопоставленные точкам $x \in X_n$, согласно отображениям

$$\varphi^* \overset{\text{def}}{=} X(\varphi) : X_m \to X_n ,$$

предусмотренным функтором X для всех неубывающих отображений $\varphi : [n] \to [m]$ категории Δ. А именно, для каждого $x \in X_m$ надо приклеить каждую точку $s \in \Delta^n_{\varphi^*(x)}$ к точке $\varphi_*(s) \in \Delta_x^m$, где $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$ — аффинное отображение симплексов, действующее на вершины как φ. Результат такой склейки формально описывается как топологическое фактор пространство топологического произведения[2] $\prod\limits_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему все отождествления

$$(x, \varphi_* s) \simeq \left(\varphi^* x, s\right) , \quad \varphi : [n] \to [m] , \quad x \in X_m , \quad s \in \Delta^n .$$

Стрелка $\varphi = \delta\sigma : [n] \to [m]$, являющаяся композицией наложения $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, предписывает вклеить n-мерный симплекс Δ_z^n, отвечающий точке $z = \sigma^* y = \sigma^* \delta^* x$ из образа φ^*, в пространство $|X|$ в виде k-мерного симплекса Δ_y^k, предварительно выродив его линейной проекцией $\sigma_* : \Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^k$, и этот k-мерный симплекс станет δ-той гранью в m-мерного симплекса Δ_x^m. По этой причине симплексы $z \in X_n$, попадающие в образ какого-либо отображения σ^*, отвечающего стрелке $\sigma : [k] \to [n]$ с $k > n$, называются *вырожденными*: в пространстве $|X|$ их видно как симплексы меньшей размерности. Использование вырожденных симплексов позволяет комбинаторно описывать более общие клеточные структуры, чем триангуляции. Например, «псевдотриангуляция» n-мерной сферы S^n, состоящая из одной 0-нульмерной вершины и одной n-мерной клетки, соответствующая описанию сферы как топологического фактора $S^n = \Delta^n / \partial\Delta^n$ стандартного n-мерного симплекса по его границе[3], является геометрической реализацией $|X|$ симплициального множества $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, у которого $X_k = X(k)$ получается из множества $\mathrm{Hom}_\Delta([k], [n])$

[1]т. е. можно ли получить окружность в качестве геометричекой реализации полусимплициального множества X, у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты

[2]в котором множества X_n рассматриваются с *дискретной*, а симплексы $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства

[3]т. е. склеивании всех точек границы в одну; скажем, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника

отождествлением всех неэпиморфных отображений в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \to X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \to [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [k] \to [n]$ в класс стрелки $\varphi\zeta : [k] \to [n]$.

Упражнение 9.4. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок и найдите количество элементов в каждом множестве X_k, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример 9.8 (предпучки и пучки сечений)
Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X. Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\text{opp}} \to \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathcal{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \to F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W, на подмножество U, а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \to X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s : U \to E$, что[1] $p \circ s = \operatorname{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p : X \times Y \to X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X, Y)$ пространства X в пространство Y, имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \to Y$

3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* $\mathcal{O}_X$: предпучок дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$ на гладком вещественном многообразии X, предпучок локальных голоморфных функций $X \to \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X, предпучок локальных рациональных функций $X \to \Bbbk$ на алгебраическом многообразии X над полем $\Bbbk$ и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

4) постоянный *предпучок* S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

Предпучок F называется *пучком*, если для любого открытого W, любого семейства открытых подмножеств $U_i \subset W$, покрывающих W, и любого набора локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, таких что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ для всех i, j, существует единственное такое сечение $s \in F(W)$, что $s|_{U_i} = s_i$ для всех i. В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может и не быть ни одного), предпучок F называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный

[1] это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею

предпучок — не является пучком, поскольку для покрытия дизъюнктного объединения $W = U_1 \sqcup U_2$ множествами U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(W)$. Тем не менее, имеется и

5) постоянный *пучок* $S^{\sim}$, у которого $S^{\sim}(U)$ это *непрерывные* отображения $U \to S$ в множество S, рассматриваемое с *дискретной* топологией.

Упражнение 9.5. Опишите первообразные действительной функции $1/x$.

9.2.2. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ любой категории $\mathcal{C}$ связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(X, Y)\,,$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi_* : \operatorname{Hom}(X, Y_1) \to \operatorname{Hom}(X, Y_2)$ левого умножения на φ : $\varphi_*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ \psi$, и предпучок $h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(Y, X)\,,$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi^* : \operatorname{Hom}(Y_2, X) \to \operatorname{Hom}(Y_1, X)$ правого умножения на φ : $\varphi^*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \psi \circ \varphi$.

Например, предпучок $h_{[n]} : \Delta_s \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_s задаёт стандартную триангуляцию стандартного n-мерного симплекса: множество её k-мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \operatorname{Hom}([k], [m])$ это в точности множество всех k-мерных граней. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subset U$ и пустое множество сечений над любым $W \not\subset U$. Вот ещё несколько примеров.

Пример 9.9 (двойственность в категории векторных пространств)
Предпучок $h_{\Bbbk} : \mathcal{V}ec_{\Bbbk}^{\text{opp}} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_{\Bbbk}(V) = \operatorname{Hom}(V, \Bbbk) = V^*$, а линейному отображению $\varphi : V \to W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \to \Bbbk$.

Пример 9.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)
Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств, содержащих $\geqslant 2$ элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1]. Тавтологическое включение $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \Delta_{\text{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \Delta_{\text{big}}^{\text{opp}} \to \nabla_{\text{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\text{big}}^{\text{opp}} \to \Delta_{\text{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \operatorname{Ob} \Delta_{\text{big}}$ и $Y \in \operatorname{Ob} \nabla_{\text{big}}$ в множества

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\Delta_{\text{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, [1])\,,$$

[1]отметим, что минимальный и максимальный элементы различны

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi\,, \quad \text{если } \varphi(x) \leqslant \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi : Z_1 \to Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Z_2, [1]) \to \mathrm{Hom}(Z_1, [1])$, $\xi \mapsto \xi \circ \varphi$.

По-другому можно сказать, что оба дуализирующих предпучка $h_{[1]}$ сопоставляют конечному упорядоченному множеству Z множество его «дедекиндовых сечений»: множество X^* для $X \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{big}}$ это множество *всех*[1] таких разбиений $X = X_0 \sqcup X_1$, что $x_0 < x_1$ для всех $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$. Аналогично, множество Y^* для $Y \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$ это множество всех *собственных*[2] разбиений $Y = Y_0 \sqcup Y_1$. Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \to Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

9.3. Естественные преобразования. Для пары функторов $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *естественным* (или *функториальным*) *преобразованием* F в G называется такое занумерованное объектами $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \to G(X)$ в категории $\mathcal{D}$, что для любой стрелки $\varphi : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ возникающая в категории $\mathcal{D}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{9-8}$$

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \overset{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$-модуля, и естественное преобразование $f : F \to G$ это $K[\mathcal{C}]$-линейный гомоморфизм между этими модулями: для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

Пример 9.11 (категория функторов)

Функторы из малой категории $\mathcal{C}$ в произвольную категорию $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathcal{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \to G$. Для малой категории $\mathcal{C}$ мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathcal{D})$ через $p\mathcal{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква $\mathcal{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{Set}$, т. е. $p\mathcal{Sh}(\mathcal{C}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, \mathcal{Set})$.

Упражнение 9.6. Проверьте, что описанное в n° 9.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{Sh}(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{Set})$.

[1] включая несобственные разбиения, в которых одно из подмножеств X_i пустое

[2] т. е. таких, что оба $Y_i \neq \varnothing$

9.3.1. Эквивалентности категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG естественно изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, т. е. имеются естественные по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \xrightarrow{\sim} X \quad \text{и} \quad FG(Y) \xrightarrow{\sim} Y\,, \tag{9-9}$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (9-9) не означает равенств $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y.

Пример 9.12 (выбор базиса)
Обозначим через $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ категорию конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$, а через $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ — её малую полную подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства $\Bbbk^n$, где $n \geqslant 0$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом пространстве $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ изоморфизм[1]

$$f_V : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^{\dim(V)}\,, \tag{9-10}$$

причём для всех координатных пространств $\Bbbk^n$ положим $f_{\Bbbk^n} = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$. Рассмотрим функтор $F : \mathcal{V}ec \to \mathcal{C}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\Bbbk^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \to W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W. Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{V}ec$. По построению мы имеем точное равенство[2] $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Противоположная композиция $GF : \mathcal{V}ec \to \mathcal{V}ec$ принимает значения в несопоставимой с $\mathcal{V}ec$ по мощности малой подкатегории $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}ec$. Однако изоморфизмы (9-10) задают естественное преобразование из $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}ec}$ в GF, т. к. в силу определения действия функтора F на стрелки все диаграммы (9-8) коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{V}ec}(V) = V \arrow[r, "\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}ec}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"'] & W = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}ec}(W) \arrow[d, "f_W"] \\
GF(V) = \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}"] & \Bbbk^{\dim W} = GF(W)
\end{tikzcd}$$

Тем самым, тождественный функтор $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}ec}$ естественно изоморфен композиции GF.

Упражнение 9.7. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна симплициалной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$ (см. прим. 9.4 на стр. 115).

[1] переводящий выбранный базис в стандартный базис в $\Bbbk^n$

[2] а не изоморфизм функторов

Лемма 9.1
Функтор $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[1] и каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта $X = X(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ указаны $X = X(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X)$, причём когда $Y = G(X(Y))$, мы положим $f_{G(X)} = \mathrm{Id}_{G(X)}$. Зададим функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а для стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке[2] $\psi : X(Y_1) \to X(Y_2)$, что $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ и для любой стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"'] & Y_2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
GF(Y_1) = X_1 \arrow[r, "GF(\varphi)=G(\psi)"] & X_2 = GF(Y_2)\,.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF. □

Упражнение 9.8. Покажите, что функторы дуализации из прим. 9.9 и прим. 9.10 являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями категорий.

9.4. Представимые функторы. Предпучок $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку h_X для некоторого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, называется *представимым*, и X в этом случае называют *представляющим объектом* предпучка F. Двойственным образом, ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору h^X для некоторого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, называемого *копредставляющим объектом* функтора F.

Упражнение 9.9. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств $U \otimes V$ копредставляет функтор $\mathcal{V}ec \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \to W$.

Множество $X_n = X([n])$ всех n-мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \Delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных*[3] отображений из стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса в X , т. е. как $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta_{\mathrm{s}})}\left(h_{[n]}, X\right)$. Обобщением этого наблюдения является

Лемма 9.2 (лемма Ионеды 1)
Для любого предпучка множеств $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на произвольной категории $\mathcal{C}$ имеется функториальная по $F \in p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X : \operatorname{Hom}(X, A) \to F(X)\,, \tag{9-11}$$

[1] т. е. все отображения $G : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами

[2] поскольку $G : \operatorname{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна

[3] т. е. переводящих грань в грань той же размерности и линейных на каждой грани

которое посылает стрелку $\varphi : X \to A$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (9-11) значение отображения $f_A : h_A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (9-11), любого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi : X \to A$ мы имеем коммутативную диаграмму (9-8)

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(X,A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{9-12}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$. Это означает, что естественное преобразование $f : h_A \to F$ однозначно восстанавливается по элементу $a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$. Каждому элементу $a \in F(A)$ при этом отвечает преобразование (9-11), переводящее $\varphi \in \mathrm{Hom}(X,A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$, естественное, поскольку для любой стрелки $\psi : Y \to X$ и всех $\varphi \in h_A(X)$ имеем $f_Y\,(h_A(\psi)\varphi) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)\,\big(f_X(\varphi)\big)$, т. е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \to F(Y)$. □

Упражнение 9.10 (лемма Ионеды 2). Для ковариантного функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ биекцию $F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

Следствие 9.1
Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории $\mathcal{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизмы $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$.

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. □

Следствие 9.2
Если объект $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ (соотв. представляющий предпучок $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Если имеются два таких объекта A, B, что $F = h^A = h^B$ (соотв. $F = h_A = h_B$), то тождественному естественному преобразованию $\mathrm{Id}_F : F \to F$ отвечает по сл. 9.1 изоморфизм $B \xrightarrow{\sim} A$ (соотв. $A \xrightarrow{\sim} B$). □

9.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи сл. 9.2 можно переносить теоретико множественные конструкции из категории $\mathcal{S}et$ в произвольные категории. А именно, будем называть результатом применения интересующей нас теоретико множественной операции к набору объектов $X_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ такой объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, который представляет предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящий $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ в результат применения рассматриваемой операции к множествам $\mathrm{Hom}(Y, X_i)$. Разумеется, это неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта — функтор вполне может оказаться непредставимым. Но если он представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства.

Пример 9.13 (произведение $A \times B$)
Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ как объект, представляющий функтор $Y \mapsto \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)$ из $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ в $\mathcal{S}et$. Если он существует, то для всех Y имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B) .$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$, изображающих элемент $\beta_{A \times B}(\mathrm{Id}_{A \times B}) \in \operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B)$. Она универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B$ существует единственная такая стрелка $\varphi \times \psi : Y \to A \times B$, что $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$.

Упражнение 9.11. Убедитесь, что для каждой диаграммы $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$, также обладающей этим универсальным свойством, имеется единственный изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$.

Пример 9.14 (копроизведение $A \otimes B$)
Двойственным образом, копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор $Y \mapsto \operatorname{Hom}(A, Y) \times \operatorname{Hom}(B, Y)$ из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму $A \xrightarrow{i_A} A \otimes B \xleftarrow{i_B} B$, универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$ в $\mathcal{C}$ имеется единственный такой морфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to Y$, что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ i_A$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ i_B$.

Упражнение 9.12. Убедитесь, что если универсальная тройка $A \xrightarrow{i_A} A \otimes B \xleftarrow{i_B} B$ существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с отображениями $i_{A,B}$, и явно опишите прямые произведения и копроизведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, модулей над фиксированным коммутативным кольцом, всех групп, коммутативных колец.

9.5. Сопряжённые функторы. Если функторы $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ связаны функториальным по $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ изоморфизмом

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \tag{9-13}$$

то F называется *левым сопряжённым* функтором к G, а G — *правым сопряжённым* к F. С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$\lambda : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad \varrho : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F . \tag{9-14}$$

Стрелка $\lambda_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования λ над $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, является образом элемента $\mathrm{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (9-13), написанном для $X = G(Y)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \mathrm{Id}_{G(Y)}\,.$$

Двойственным образом, стрелка $\varrho_X : X \to GF(X)Y$ получается из $\mathrm{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (9-13), написанном для $Y = F(X)$:

$$\mathrm{Id}_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X))\,.$$

Пример 9.15 (свободные модули)
Обозначим через R-$\mathcal{M}od$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом R, а через $G : R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$ — забывающий функтор, сопоставляющий модулю множество его элементов. Для любого множества $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}et$ ковариантный функтор $R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$, копредставим *свободным* R-модулем с базисом E. Мы будем обозначать такой свободный модуль через $R \otimes E$. По определению, он состоит из формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{e\in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in R$, лишь конечное число из которых отлично от нуля.

Упражнение 9.13. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)\,. \tag{9-15}$$

Изоморфизм (9-15) означает, что функтор $E \mapsto R \otimes E$ является левым сопряжённым к забывающему функтору G. Естественное преобразование $\varrho_E : E \hookrightarrow G(A \otimes E)$ вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R \otimes E$, а естественное преобразование $\lambda_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$ задаёт R-линейный эпиморфизм из огромного свободного модуля, базисом в котором является множество всех векторов модуля M, на модуль M, переводя базисный вектор m в элемент $m \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в точно такую же комбинацию, но вычисленную внутри M. Например, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ изоморфно пространству всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным носителем, а преобразование $\lambda_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции вещественное число, равное сумме всех её (ненулевых) значений.

9.5.1. Тензорные произведения и Hom. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Тензорным произведением $M \underset{R}{\otimes} N$ правого R-модуля M на левый R-модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп[1] $M \otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями

$$(mx) \otimes n - m \otimes (xn)\,, \quad \text{где} \quad m \in M\,,\ x \in R\,,\ n \in N\,.$$

Это абелева группа, на которой кольцо R никак не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx) \underset{R}{\otimes} n = m \underset{R}{\otimes} (xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R-модуль N задаёт функтор из категории правых R-модулей в абелевы группы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b\,, \quad X \mapsto X \underset{R}{\otimes} N\,,$$

[1] или, что то же самое, $\mathbb{Z}$-модулей

переводящий стрелку $\varphi : X_1 \to X_2$ в стрелку $\varphi \otimes 1 : m \underset{R}{\otimes} n \mapsto \varphi(m) \underset{R}{\otimes} n$. Если левый R-модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S с единицей и правое действие S коммутирует с левым действием R (такие N называются *R-S бимодулями*), функтор тензорного умножения на N отображает $\mathcal{M}od$-R в $\mathcal{M}od$-S: кольцо S действует на $M \otimes N$ справа по правилу $(m \otimes n)y = m \otimes (ny)$. С другой стороны, имеется функтор $h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_S(N, Y)$, который принимает значения в $\mathcal{M}od$-R: правое действие $x \in R$ на $\mathrm{Hom}_S(N, Y)$ переводит S-линейную справа стрелку $\varphi : N \to Y$ в стрелку $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$ (так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$).

Предложение 9.1

Тензорное умножение на R-S-бимодуль N сопряжено слева функтору h^N, т. е. имеется естественный по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od$-$R$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od$-$S$ изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(X \underset{R}{\otimes} N, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)\big)\,. \tag{9-16}$$

Доказательство. Отображение из левой части (9-16) в правую сопоставляет S-линейному справа гомоморфизму $\varphi : X \underset{R}{\otimes} N \to Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, $n \mapsto \varphi(x \otimes n)$. Каждый из них S-линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x \underset{R}{\otimes} ns) = \varphi(x \underset{R}{\otimes} n)s = \varphi_x(n)s\,,$$

а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y)$, R-линейно справа:

$$\varphi_{xr} n = \varphi(xr \underset{R}{\otimes} n) = \varphi(x \underset{R}{\otimes} rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n\,.$$

Обратное отображение из правой части (9-16) в левую переводит семейство S-линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, которые R-линейно справа зависят от $x \in X$, в S-линейный справа гомоморфизм $\varphi : x \underset{R}{\otimes} n \mapsto \psi_x(n)$. □

Пример 9.16 (индуцирование и коиндуцирование)

Если кольцо A содержится в кольце B и у них общая единица, каждый правый B-модуль X одновременно является и правым A-модулем, что задаёт *функтор ограничения*

$$\mathrm{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \to \mathcal{M}od\text{-}A\,. \tag{9-17}$$

Рассматривая B как B-A бимодуль и беря в предл. 9.1 $S = A$, а $N = R = B$, получим в качестве правого A-модуля $X \underset{B}{\otimes} B \simeq X$ ограничение $\mathrm{res}\,X$ A-модуля X и функториальный по B-модулю X и A-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(\mathrm{res}\,X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)\big)\,.$$

Правый B-модуль $\mathrm{coind}\,Y \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A-модуля Y. Функтор коиндуцирования $\mathrm{coind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

Рассматривая B как A-B бимодуль и полагая в предл. 9.1 $S = N = B$, а $R = A$, получим в качестве правого A-модуля $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y) \simeq Y$ ограничение $\operatorname{res} Y$ B-модуля Y, и функториальный по A-модулю X и B-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(X \underset{A}{\otimes} B, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(X, \operatorname{res} Y)\,.$$

Правый B-модуль $\operatorname{ind} X \overset{\text{def}}{=} X \underset{A}{\otimes} B$ называется *индуцированным* с A-модуля X. Функтор индуцирования $\operatorname{ind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$ и $B = \Bbbk[G]$ являются групповыми алгебрами (с коэффициентами в поле $\Bbbk$) конечной группы G и её подгруппы H, мы получаем уже исследованные нами в n° 7.3 на стр. 92 и n° 7.3.3 на стр. 96 функторы (ко)индуцирования линейных представлений группы G над полем $\Bbbk$ с представлений её подгруппы H. Как мы видели, в этом случае индуцированный и коиндуцированный модули оказываются изоморфными друг другу.

Пример 9.17 (сингулярные симплексы)
Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \varDelta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \operatorname{Ob} \varDelta$ множество $S_n(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\varDelta^n, Y) = h_Y(\varDelta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\varDelta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y, а неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение $\varphi^* : \varDelta^m \to \varDelta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ. Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\varDelta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\varDelta) \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, из прим. 9.7 на стр. 118, ибо имеет место естественный по симплициальному множеству X и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y))\,, \tag{9-18}$$

являющийся категорным аналогом изоморфизма (9-16) для модулей над кольцами. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию $\varDelta$ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup\limits_{n \geqslant 0} \varDelta^n$ правильных симплексов, на котором имеется левое действие стрелок φ категории $\varDelta$ аффинными отображениями и коммутирующее с ним правое действие стрелок категории $\mathcal{T}op$, непрерывно отображающих D в произвольные топологические пространства. Поэтому множество сингулярных симплексов $S(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}op(D, Y)$ является правым модулем над категорией $\varDelta$, как и симплициальное множество X, геометрическую реализацию которого можно понимать как произведение $|X| = X \underset{\varDelta}{\otimes} D$ — фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup\limits_{n \geqslant 0} X_n \times \varDelta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, что превращает (9-18) в

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(X \underset{\varDelta}{\otimes} D, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}\varDelta}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}op(D, Y)\big)\,, \tag{9-19}$$

что уже ничем не отличается от (9-16).

Упражнение 9.14. Постойте взаимно обратные изоморфизмы в (9-19) явно.

Предложение 9.2

Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \to \mathcal{S}et\,, \quad Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big)\,, \tag{9-20}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор (9-20) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \xrightarrow{\sim} h_G^X$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h_G^{X_2} \to h_G^{X_1}$ заключающееся в правом умножении на φ: стрелка $\psi : X_2 \to G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. По сл. 9.1 из леммы Ионеды композиция естественных преобразований $\left(f^{X_1}\right)^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

Упражнение 9.15. Докажите двойственное утверждение: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ был представим предпучок $h_Y^G : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$, и в таком случае $G(X)$ представляет этот предпучок.

9.6. Пределы диаграмм. Любую малую категорию $\mathcal{N}$ можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории $\mathcal{N}$. Всякий функтор $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ даёт реализацию такой диаграммы в категории $\mathcal{C}$, т. е. является диаграммой в категории $\mathcal{C}$ с вершинами в объектах $X_\nu = X(\nu)$, занумерованных множеством $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$, и стрелками $\varkappa_{\mu\nu} = X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$, занумерованными множеством $\operatorname{Mor}\mathcal{N}$. Каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* $\overline{Y}$, в которой все объекты $\overline{Y}_\nu = Y$ и все стрелки равны Id_Y. С любой диаграммой $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et\,,\ Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, что имеется естественный по $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)\,, \tag{9-21}$$

то представляющий объект L называют *пределом*[1] диаграммы X и пишут $L = \varprojlim X_\nu$. Двойственным образом, объект $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et\,,\ Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})$, называется *копределом*[2] диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и обозначается $C = \varinjlim X_\nu$. В этом случае имеется функториальная по $Y \in \mathcal{C}$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})\,. \tag{9-22}$$

[1] а также *обратным* или *проективным* пределом и обозначают $\lim \leftarrow$

[2] копределы иногда также называют *прямыми* или *инъективными пределами* и обозначают $\lim \to$

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». А именно, полагая $Y = L$ в формуле (9-21), можно сопоставить тождественному эндоморфизму Id_L предела $L = \varprojlim X_\nu$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ естественное преобразование $f : \overline{L} \to X$, представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu : L \to X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для всех $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любого набора стрелок $\psi_\nu : Y \to X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, существует единственный такой морфизм $\alpha : Y \to \varprojlim X_\nu$, что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν.

Двойственным образом, для копредела $\varinjlim X_\nu$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеется канонический набор стрелок $\iota_\nu : X_\nu \to \varinjlim X_\nu$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, такой что для всех $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любого набора стрелок $\psi_\nu : X_\nu \to Y$, коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X, существует единственный такой морфизм $\beta : \varinjlim X_\nu \to Y$, что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν.

Упражнение 9.16. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

Пример 9.18 (начальный и конечный объекты)
Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ есть единственная стрелка $X \to \mathrm{Fin}$ и единственная стрелка $\mathrm{Or} \to X$.

Упражнение 9.17. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Пример 9.19 (прямые (ко) произведения)
Малая категория $\mathcal{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно $\prod_\nu X_\nu$ и $\coprod_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из прим. 9.13 и прим. 9.14. Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

Пример 9.20 ((ко) уравнители)
(Ко) предел диаграммы вида $\bullet \rightrightarrows \bullet$, т. е. пары стрелок

$$X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} Y$$

называется *(ко) уравнителем*[1] этих стрелок. В категории множеств уравнитель пред-

[1] по-английски *(co)equalizer*

ставляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \to Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y по наименьшему отношению эквивалентности[1] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

Упражнение 9.18. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \to B$ в категории $\mathcal{Ab}$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «образующих и соотношений».

Пример 9.21 (послойные произведения)
Предел диаграммы вида $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$ называется *послойным*[2] *произведением*. Конкретная реализация такой диаграммы выглядит как $X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$, и её предел обозначается $X \times_B Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} X \times_B Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd} \tag{9-23}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \to X \times_B Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

Упражнение 9.19. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (9-23) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

[1] Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. (y_1, y_2), $(y_2.y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности, и всякое отображение $\xi : Y \to Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $\xi' : Y \to Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \to Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ, *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее* последней).

[2] или *расслоенным*

В категории множеств отображение $X \underset{B}{\times} Y \to B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

Пример 9.22 (послойные копроизведения)
Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \underset{B}{\otimes} Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \underset{B}{\otimes} Y \end{tikzcd}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi'"] & Z \end{tikzcd}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \underset{B}{\otimes} Y \to Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

Упражнение 9.20. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[1], коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

9.6.1. (Ко) замкнутость. Категория $\mathcal{C}$ называется (*ко*) *замкнутой*, если для любой малой категории $\mathcal{N}$ каждая диаграмма $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в $\mathcal{C}$.

Предложение 9.3
Для замкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращением стрелок. Надо предъявить универсальный набор мофизмов φ_ν с общим началом в объекты диаграммы, решающий уравнения $\varphi_\mu = \varkappa_{\mu\nu}\varphi_\nu$, где $\varkappa_{\mu\nu} = X(\nu \to \mu) : X(\nu) \to X(\mu)$ пробегает все стрелки диаграммы. Образуем произведение $A = \prod_\mu X(\mu)$ всех объектов диаграммы, и ещё одно

[1] в теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*

произведение, в которое каждый объект X_μ входит столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается:

$$B = \prod_{\nu\to\mu} F_{\nu\mu}\,, \quad \text{где} \quad F_{\nu\mu} \overset{\text{def}}{=} X_\mu\,.$$

Для каждой стрелки $\nu \to \mu$ зададим два отображения $A \to F_{\nu\mu}$:

$$f_{\nu\mu} = \mathrm{Id}_{X_\mu} \circ \pi_\mu \quad \text{и} \quad g_{\nu\mu} = \varkappa_{\mu\nu} \circ \pi_\nu\,,$$

где $\pi_\alpha : A \to X_\alpha$ означают канонические стрелки из произведения в сомножители. По универсальному свойству произведения B имеются два морфизма $f, g : A \to B$, поднимающие стрелки $f_{\nu\mu}$ и $g_{\nu\mu}$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \to A$, задающим набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$ с требуемыми универсальными свойствами. □

Замечание 9.1. Для того, чтобы в категории $\mathcal{C}$ существовали (ко) пределы всех *конечных* диаграмм, в условиях предл. 9.3 достаточно требовать существования в $\mathcal{C}$ конечных (ко) произведений.

Следствие 9.3
Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом замкнуты и козамкнуты.

Доказательство. Сделайте упр. 9.18. □

Пример 9.23 (пределы частично упорядоченных диаграмм)
Будем называть диаграмму $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ чумовой, если категория $\mathcal{N}$ является чумом, как в прим. 9.2 на стр. 114. В категории $\mathcal{S}et$ предел такой диаграммы равен

$$\varprojlim X \simeq \left\{(x_\nu) \in \prod_\nu X_\nu \mid X(\nu \to \mu)x_\nu = x_\mu \text{ при } \nu < \mu\right\}.$$

Упражнение 9.21. Убедитесь в этом.

Описание копредела более витиеватое. Назовём *хвостом* диаграммы X такой набор элементов $x_\nu \in X(\nu)$, что каждый индекс ν представлен в нём не более одного раза, но вместе с каждым представленным индексом ν представлены и все индексы $\mu > \nu$ и для каждой представленной в наборе пары индексов $\nu < \mu$ элемент x_ν переводится в элемент x_μ стрелкой $X(\nu \to \mu)$. Назовём хвосты $\{x_\alpha\}$ и $\{y_\beta\}$ *эквивалентными*, если для любых их элементов x_α и y_β существует такой индекс $\gamma \geqslant \alpha, \beta$, что

$$X(\alpha \to \gamma)\, x_\alpha = X(\beta \to \gamma)\, y_\beta\,.$$

Упражнение 9.22. Убедитесь, что это действительно отношение эквивалентности и что множество классов эквивалентных хвостов изоморфно $\varinjlim X$.

В анализе и топологии особенно популярны чумы $\mathcal{N}$, в которых $\forall\, \mu, \nu\; \exists\, \varkappa \geqslant \mu, \nu$. Такие чумы иногда называют *направленностями*. Соответствующие им диаграммы $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$

называются *прямыми*[1] системами, а контравариантные диаграммы $\mathcal{N}^{\text{opp}} \to \mathcal{C}$ — *обратными*[2] системами. Так, любой замкнутый относительно пересечений набор открытых множеств образует обратную систему в категории $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств данного топологического пространства X. Примером такой системы является набор открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$. Её пределом в категории множеств является пересечение всех открытых окрестностей Z. В категории $\mathcal{U}(X)$ предела может и не быть.

Упражнение 9.23. Убедитесь, что в $\mathcal{U}(X)$ послойное произведение $U \underset{X}{\times} V = U \cap V$.

Вот ещё один похожий пример: конечные наборы точек

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_\infty = 1 ,$$

разбивающие отрезок $[0, 1]$ на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории ∇_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0, 1]$.

Пример 9.24 (локализация коммутативного кольца)
Рассмотрим любую не содержащую нуля мультипликативную систему[3] S в произвольном коммутативном кольце K с единицей. Зададим на S структуру категории, полагая $\text{Hom}_S(s, t) \overset{\text{def}}{=} \{a \in K \mid as = t\}$, и определим функтор $S \to \mathcal{M}od_K$ из этой категории в категорию K-модулей, посылая каждый объект $s \in S$ в свободный K-модуль ранга один с образующей, которую мы обозначим символом $\left[\frac{1}{s}\right]$, а каждую стрелку $a \in \text{Hom}_S(s_1, s_2)$ — в гомоморфизм, переводящий базисный элемент $\left[\frac{1}{s_1}\right]$ в $a \cdot \left[\frac{1}{s_2}\right]$.

Упражнение 9.24. Покажите, что копредел получившейся диаграммы в категории $\mathcal{M}od_K$ существует и изоморфен локализации[4] KS^{-1}.

9.6.2. Функториальность (ко) пределов. Естественное преобразование f диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ в диаграмму $Y : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это набор стрелок $f_\nu : X_\nu \to Y_\mu$, по одной для каждого $\nu \in \text{Ob}\,\mathcal{N}$, перестановочных со стрелками из диаграмм. Если диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и $Y : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ имеют в категории $\mathcal{C}$ пределы $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и любого естественного преобразования $f : X \circ \tau \to Y$ существует единственный такой морфизм $\lim f : N \to M$, что при всех $\mu \in \text{Ob}\,\mathcal{M}$ коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} L_X \arrow[r, "\pi_{\tau(\mu)}"] \arrow[d, "\varphi"] & X_{\tau(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"'] \\ L_Y \arrow[r] & Y_\mu , \end{tikzcd} \tag{9-24}$$

[1] или *индуктивными*
[2] или *проективными*
[3] напомню, что это означает, что $1 \in S$ и $s, t \in S \Rightarrow st \in S$
[4] т. е. модулю дробей a/s с $a \in K$, $s \in S$, где под дробью понимается класс эквивалентности пары a/s по отношению $a_1/s_1 \sim a_2/s_2$, означающему, что $\exists\, s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. В самом деле, композиции $f_\mu \circ \pi_{\tau(\mu)} : L_X \to Y_\mu$ задают систему стрелок из L_X в элементы диаграммы Y, перестановочные со всеми её стрелками, что даёт единственный морфизм $L_X \to \lim Y = L_Y$, делающий все диаграммы (9-24) коммутативными. Двойственным образом, если существуют копределы $C_X = \varinjlim X_\nu$ и $C_Y = \varinjlim Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $f : X \to Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $\varinjlim f : C_X \to C_Y$, такой что коммутативны все диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_\nu \arrow[r, "\iota_\nu"] \arrow[d, "f_\nu"'] & C_X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y_{\tau(\nu)} \arrow[r] & C_Y \end{tikzcd},$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из вершин диаграммы в копредел. При $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ и $\tau = \mathrm{Id}$ из предл. 9.2 на стр. 129 и равенств (9-21) и (9-22) на стр. 129 – 129 получаем

Предложение 9.4
Для заданных малой категории $\mathcal{N}$ и (ко)замкнутой категории $\mathcal{C}$ копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, переводящему $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ в постоянную диаграмму $\overline{C}$. □

Замечание 9.2. Если не предполагать (ко)замкнутости, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, где определён.

Определение 9.1 (перестановочность с (ко) пределами)
Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом X в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ X$ в $\mathcal{D}$.

Предложение 9.5
Если функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. В силу сопряжённости F и G имеем функториально по $D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\varinjlim X), D\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\varinjlim X, G(D)\big) \simeq$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}\left(X, \overline{G(D)}\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{D})}\left(F \circ X, \overline{D}\right).$$

Тем самым, $F(\varinjlim X) \simeq \varinjlim(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. □

Следствие 9.4
Копредел коммутирует с копределами, а предел — с пределами всякий раз, когда они определены.

Следствие 9.5
Пусть стрелки $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ задают естественное преобразование диаграмм

$$X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b\,.$$

Если существуют копределы $C_X = \varinjlim X_\nu$ и $C_Y = \varinjlim Y_\nu$, то существует

$$\varinjlim \operatorname{coker} \varphi_\nu \simeq \operatorname{coker}\left(\varinjlim f_\nu : C_X \to C_Y\right),$$

а если существуют пределы $L_X = \varprojlim X_\nu$ и $L_Y = \varprojlim Y_\nu$, то существует и предел

$$\varprojlim \ker \varphi_\nu \simeq \ker\left(\varprojlim f_\nu : L_X \to L_Y\right).$$

Доказательство. Будучи (ко)уравнителем f_ν и нулевого морфизма (ко)ядро является (ко)пределом. □

Следствие 9.6
Тензорное умножение на (левый) модуль N над произвольным кольцом S с единицей перестановочно с копределами диаграмм (правых) S-модулей. В частности, для любого $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(K, L)$ имеется канонический изоморфизм абелевых групп

$$\operatorname{coker}\left(\varphi \underset{S}{\otimes} \operatorname{Id}_N : K \underset{S}{\otimes} N \to L \underset{S}{\otimes} N\right) \simeq \operatorname{coker}(\varphi) \underset{S}{\otimes} N\,.$$

Доказательство. По предл. 9.1 на стр. 127, применённому к кольцам S и $R = \mathbb{Z}$, функтор $\mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \underset{S}{\otimes} N$, сопряжён слева функтору $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}} b(N, Y)$. □

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 9.5. Типичный ответ: «$\ln|x| + C$, где C — произвольная константа» *неверен*[1]. На самом деле деле C является сечением *постоянного пучка* $\mathbb{R}^{\sim}$ над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Упр. 9.10. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование $f_X : \mathrm{Hom}(A, X) \to F(X)$, посылающее стрелку $\varphi : A \to X$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A : h^A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi : A \to X$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} h^A(A) = \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "h^A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(A,X) = h^A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{9-25}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$.

Упр. 9.12. В категориях множеств и топологических пространств произведения и копроизведения суть прямые[2] произведения и дизъюнктные объединения соответственно. В категории абелевых групп и модулей над фиксированным кольцом и произведения и копроизведения суть прямые произведения[3]. В категории всех групп произведения и копроизведения суть прямые и свободные[4] произведения. В категории коммутативных колец с единицей — это прямые и тензорные произведения колец.

Упр. 9.17. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 9.20. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \to A$ наделяют A и B структурами K-алгебр, и копроизведение $A \underset{K}{\otimes} B$ это *тензорное произведение* K-алгебр, т. е. фактор свободного K-модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \varkappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \varkappa_i \in K$, $a_i \in A$, $\beta_j \in B$ (ср. с n° 9.5.1). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \underset{K}{\otimes} b_1) \cdot (a_2 \underset{K}{\otimes} b_2) = (a_1 a_2) \underset{K}{\otimes} (b_1 b_2)$.

[1] и в былые годы случалось, что абитуриентам ставили за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике

[2] теоретико множественные и топологические

[3] или прямые суммы, что то же самое

[4] например, свободное произведение двух экземпляров группы $\mathbb{Z}$ — это свободная (некоммутативная) группа $\mathbb{F}_2$ с двумя образующими