§7. Представления конечных групп.

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что G — конечная группа, а $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле, такое что $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$.

7.1. Скалярное произведение и базисные идемпотенты. Левое регулярное представление $L : \Bbbk[G] \hookrightarrow \mathrm{End}(\Bbbk[G])$ инъективно вкладывает групповую алгебру в алгебру всех линейных эндоморфизмов $\mathrm{End}(\Bbbk[G])$ векторного пространства $\Bbbk[G]$. На последней имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции.

Упражнение 7.1. Убедитесь, что значение билинейной формы $\mathrm{tr}(AB)$ на паре разложимых операторов $A = \alpha \otimes a$ и $B = \beta \otimes b$ равно $\alpha(b) \cdot \beta(a)$, откуда вытекает и симметричность и невырожденность.

Ограничение этой формы на $L(\Bbbk[G])$ задаёт на $\Bbbk[G]$ симметричное скалярное произведение

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{tr}\left(L_f L_g\right) = \mathrm{tr}\left(L_{fg}\right) . \tag{7-1}$$

Поскольку след левого умножения на единицу группы равен $|G|$, а умножение на любой другой элемент группы бесследно, скалярные произведения элементов группы задаются формулой

$$(g, h) = \begin{cases} |G| & \text{при } h = g^{-1} \\ 0 & \text{при } h \neq g^{-1}. \end{cases} \tag{7-2}$$

Таким образом, скалярное произведение невырождено[1], и двойственным базисом к базису из групповых элементов g является базис из элементов $g^* = g^{-1}/|G|$. В частности, каждый элемент $z \in \Bbbk[G]$ разлагается по базису из групповых элементов в виде

$$z = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g^{-1}, z) \cdot g \tag{7-3}$$

Упражнение 7.2. Покажите, что левое и правое умножение на заданный элемент сопряжены друг другу относительно скалярного произведения: $(fg, h) = (f, gh)$ и выведите отсюда, что ортогональное дополнение к любому левому идеалу в $\Bbbk[G]$ является правым идеалом, а ортогональное дополнение к правому — левым[2].

Изоморфизм $\mathfrak{rep} : \Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$ из теоремы Машке[3] позволяет вычислять скалярные произведения (7-1) в терминах следов действия элементов в неприводимых представлениях.

Предложение 7.1 (формула Планшереля)
Для любых $f, g \in \Bbbk[G]$ $\quad (f, g) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \dim\left(U_\lambda\right) \cdot \mathrm{tr}\left(\lambda(fg)\right)$.

[1] отметим, что если характеристика поля делит порядок группы, то это не так

[2] тем самым, ортогональное дополнение к любому двустороннему идеалу тоже двусторонний идеал

[3] см. теор. 5.4 на стр. 73

Доказательство. Вычислим $\operatorname{tr}\left(L_{fg}\right)$ в алгебре $\bigoplus_{\lambda\in \operatorname{Ir}(G)} \operatorname{End}(U_\lambda)$. Он равен сумме по всем неприводимым представлениям λ следов левого умножения на $\lambda(fg)$ в $\operatorname{End}(U_\lambda)$. След левого умножения на матрицу M в матричной алгебре $\operatorname{Mat}_n(\Bbbk)$ равен $n\cdot \operatorname{tr}(M)$, поскольку каждая матричная единица E_{ij} входит в ME_{ij} с коэффициентом m_{ii}. □

Определение 7.1 (базисные идемпотенты)
Элементы $e_\lambda = \mathfrak{rep}^{-1}\left(0\ \dots\ ,0,\ \operatorname{Id}_{U_\lambda},\ 0,\ \dots\ 0\right) \in I_\lambda \subset \Bbbk[G]$, действующие тождественным оператором в неприводимом представлении λ и нулевым оператором во всех остальных неприводимых представлениях называются *базисными*[1] *идемпотентами*. Они образуют базис в центре групповой алгебры и перемножаются по правилам

$$e_\lambda e_\varrho = \begin{cases} e_\lambda & \text{при } \varrho = \lambda \\ 0 & \text{при } \varrho \neq \lambda\,. \end{cases} \tag{7-4}$$

В любом представлении $\Bbbk[G] \to \operatorname{End}(V)$ каждый из неприводимых идемнотентов e_λ действует как G-инвариантный проектор на λ-изотипную компоненту $V_\lambda \subset V$.

Упражнение 7.3. Проверьте, что главный левый идеал $\Bbbk[G]\cdot e_\lambda$ является минимальным (по включению) левым идеалом и как G-модуль (относительно действия G умножениями слева) изоморфен неприводимому представлению U_λ. Покажите также, что двусторонний идеал, порождённый e_λ, есть I_λ.

Следствие 7.1
Базисные идемпотенты составляют ортогональный базис центра групповой алгебры и имеют скалярные квадраты $(e_\lambda, e_\lambda) = \dim^2 U_\lambda$. □

Следствие 7.2
Разложение $\Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Ir}(G)} I_\lambda$ левого регулярного представления в прямую сумму изотипных подмодулей является *ортогональным* разложением, и неприводимые идемпотенты являются *ортогональными проекциями* единицы $1 \in \Bbbk[G]$ на идеалы I_λ.

Следствие 7.3
Базисный идемпотент e_λ выражается через элементы группы по формуле

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum_{g\in G} \operatorname{tr}\left(\lambda(g^{-1})\right)\cdot g\,, \tag{7-5}$$

и каждое представление $\Bbbk[G] \to \operatorname{End}(V)$ переводит правую часть этого равенства в G-инвариантный проектор на λ-изотипный подмодуль $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Согласно формуле (7-3) $e_\lambda = |G|^{-1}\sum_{\mu\in\operatorname{Ir}(G)} (g^{-1}, e_\lambda)\cdot g$. По формуле Леви-Планшереля $(g^{-1}, e_\lambda) = \sum_{\mu\in\operatorname{Ir}(G)} \dim\left(U_\mu\right)\cdot \operatorname{tr}\left(\mu(g^{-1}e_\lambda)\right) = \dim\left(U_\lambda\right)\cdot \operatorname{tr}\left(\lambda(g^{-1})\right)$, т. к. умножение слева на e_λ аннулирует все неприводимые U_μ с $\mu \neq \lambda$, а на U_λ действует тождественным оператором. □

[1] а также *неприводимыми* или *минимальными*

7.2. Характеры. Для произвольного линейного представления $\varrho : [G] \to \mathrm{GL}(V)$ линейная форма на $\Bbbk[G]$, сопоставляющая элементу след его действия на V

$$\chi_\varrho : \Bbbk[G] \to \Bbbk, \quad \chi_\varrho(f) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr} \varrho(f), \tag{7-6}$$

называется *характером*[1] представления ϱ. В силу того, что след оператора не меняется при сопряжении, характер любого представления постоянен на классах сопряжённых элементов, и изоморфные представления имеют равные характеры. Формула (7-5) для проектора на λ-изотипную компоненту переписывается в терминах характеров как

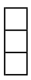
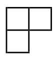
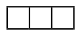
$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\lambda\left(g^{-1}\right) \cdot g\,, \tag{7-7}$$

Пример 7.1 (характеры перестановочных представлений)
Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. В частности, характер регулярного представления имеет вид

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & \text{если} \quad g = e \\ 0 & \text{если} \quad g \neq e\,. \end{cases}$$

Значение характера тавтологического представления симметрической группы S_n перестановками базисных векторов координатного пространства $\Bbbk^n$ на перестановке циклового типа λ равно $m_1(\lambda)$, т. е. числу строк длины 1 диаграммы λ. Поскольку это представление является прямой суммой тривиального одномерного, с тождественно единичным характером, и симплициального, мы заключаем, что значение симплициального характера S_n на классе сопряжённости C_λ, состоящем из перестановок циклового типа λ, равно $\chi_\Delta(C_\lambda) = m_1(\lambda) - 1$.

Упражнение 7.4. Убедитесь, что характеры неприводимых представлений симметрической группы S_3 задаются таблицей

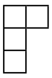
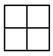
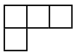
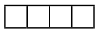
классы			
число элементов	1	3	2
значения характеров:			
тривиального	1	1	1
знакового	1	−1	1
треугольного	2	0	−1

(7-8)

и что проекторы на изотипные копоненты, получающиеся из этой таблицы по формуле (7-7), совпадают с полученными ранее в прим. 5.4 на стр. 74.

[1] не следует путать эти *аддитивные* характеры с мультипликативными характерами абелевых групп, обсуждавшимися в n° 5.4.1 на стр. 69

Пример 7.2 (неприводимые характеры S_4)
Характеры геометрических представлений обычно легко вычисляются прямым сложением собственных значений соответствующих поворотов и отражений. Например, легко видеть, что значения характеров пяти представлений симметрической группы S_4 из прим. 5.4 задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	1	−1	0	−1
кубического	3	−1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

(7-9)

четвёртая строка которой объясняется так: след единицы равен размерности представления; одна транспозиция и пара независимых транспозиций действуют поворотами на 180° вокруг прямой, и собственные числа такого вращения суть 1, −1 и −1; цикл длины 3 и цикл длины 4 действуют поворотами на 120° и 90° соответственно, и их собственные числа суть $1, \omega, \omega^2$ и $1, i, -i$.

Лемма 7.1
Для любых двух представлений V, W группы G с характерами χ_U и χ_V

$$\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g) \tag{7-10}$$
$$\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g) \tag{7-11}$$
$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \tag{7-12}$$
$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g) \tag{7-13}$$

Доказательство. Поскольку любой оператор g из конечной группы полупрост, в пространствах V и W имеются базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ из собственных векторов g. Пусть α_i и β_j — соответствующие наборы собственных чисел. Набор собственных чисел g в представлении $V \oplus W$ получается объединением этих наборов, откуда следует (7-10). Собственными числами g в представлении $V \otimes W$ являются всевозможные попарные произведения $\alpha_i\beta_j$, что даёт (7-11). Формула (7-12) следует из того, что матрица g в двойственном представлении транспонирована к матрице g^{-1} в исходном (см. n° 5.4). Последняя формула следует из двух предыдущих. □

Упражнение 7.5. Докажите, что производящие функции для характеров симметрических и внешних степеней представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ имеют вид:

$$\sum_{\nu\geqslant 0} \chi_{\Lambda^\nu V}(g)\, t^\nu = \det(1 + t\,\varrho(g)) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu\geqslant 0} \chi_{S^\nu V}(g)\, t^\nu = \frac{1}{\det(1 - t\,\varrho(g))}\,.$$

Следствие 7.4

Характер любого представления V выражается через неприводимые характеры χ_λ как

$$\chi_V = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V) \cdot \chi_\lambda \tag{7-14}$$

где $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda \,/\, \dim U_\lambda$ обозначает кратность простого G-модуля U_λ в V. □

7.2.1. Преобразование Фурье. Поскольку любая линейная форма однозначно задаётся своими значениями на базисных векторах, пространство линейных форм $\Bbbk[G]^*$ естественно отождествляется с пространством $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$, так что функция $\varphi : G \to \Bbbk$ переходит в форму $\varphi(\sum x_g \cdot g) = \sum x_g \varphi(g)$, продолжающую φ по линейности. С другой стороны, скалярное произведение на групповой алгебре задаёт изоморфизм

$$\Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]^*, \quad f \mapsto (f, *), \tag{7-15}$$

сопоставляющий вектору функционал скалярного умножения на этот вектор. Прообразом базиса $\Bbbk[G]^*$, двойственного к базису из элементов группы, при этом является базис из элементов $g^* = g^{-1} \,/\, |G|$. Комбинируя эти два отождествления, получаем изоморфизм векторных пространств

$$\varPhi : \Bbbk^G \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G], \quad \varphi \mapsto \widehat{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi\left(g^{-1}\right) \cdot g\,, \tag{7-16}$$

который иногда называют *преобразованием Фурье*. Согласно формуле (7-7) преобразование Фурье переводит характеры неприводимых представлений в элементы групповой алгебры, пропорциональные неприводимым идемпотентам:

$$\hat{\chi}_\lambda = \frac{1}{\dim U_\lambda} \cdot e_\lambda\,. \tag{7-17}$$

Перенесём при помощи изоморфизма (7-15) скалярное произведение из групповой алгебры в пространство функций на группе, полагая по-определению

$$(\varphi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \varphi\left(g^{-1}\right) \psi\left(h^{-1}\right)(g,h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi\left(g^{-1}\right) \psi\left(g\right) \tag{7-18}$$

Упражнение 7.6. Выясните, в какую операцию на групповой алгебре переходит поточечное умножение значений функций и какая операция над функциями соответствует умножению в групповой алгебре.

Из (7-17) и сл. 7.1 немедленно вытекают следующие результаты, полностью сводящие анализ представлений к формальным алгебраическим вычислениям с характерами.

Следствие 7.5

Неприводимые характеры образуют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. □

Следствие 7.6

Для любых G-модулей V и W $\quad \dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$.

Доказательство. Обе части равны $\sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V) m_\lambda(W)$: левая — по сл. 5.5, правая — в силу сл. 7.4 и ортонормальности характеров. □

Следствие 7.7
Кратность вхождения неприводимого представления U_λ в произвольное представление V равна скалярному произведению их характеров: $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda, \chi_V)$.

Доказательство. Скалярно умножаем обе части (7-14) на χ_λ и пользуемся ортонормальностью характеров. □

Следствие 7.8
Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Доказательство. Из ортонормальности характеров и сл. 7.4 вытекает, что

$$(\chi_V, \chi_V) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda^2(V),$$

где все $m_\lambda(V)$ целые неотрицательные. Такая сумма равна единице только если она состоит из одного слагаемого, равного единице. □

Упражнение 7.7. Опишите все неприводимые представления и вычислите их характеры для групп: а) D_n б) A_4 в) A_5 г) S_5.

Замечание 7.1. (скалярное произведение комплексных характеров) Так как все элементы конечной группы аннулируются многочленом $t^{|G|} - 1$, все их собственные числа являются корнями $|G|$-той степени из единицы. Поэтому над полем $\mathbb{C}$ собственные числа оператора g^{-1} комплексно сопряжены собственным числам оператора g, и $\chi\left(g^{-1}\right) = \overline{\chi(g)}$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение комплексных характеров в виде стандартной эрмитовой структуры на пространстве комплекснозначных функций:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \cdot \chi_2(g).$$

Замечание 7.2. (скалярное произведение характеров группы S_n) Так как цикловой тип обратных друг другу перестановок g, $g^{-1} \in S_n$ одинаков, такие перестановки сопряжены, и значит, $\chi\left(g^{-1}\right) = \chi(g)$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение характеров симметрической группы виде стандартной евклидовой структуры на пространстве функций:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \cdot \chi_2(g).$$

В частности, над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ оно *положительно определено*.

Пример 7.3 (внешние степени симплициального представления S_n)
Покажем, что все внешние степени симплициального представления Δ симметрической группы S_n неприводимы. Обозначим через τ тавтологичесое представление S_n перестановками базисных векторов в $\Bbbk^n$. Поскольку $\tau = \Delta \oplus \mathbb{1}$, его m-тая внешняя степень $\Lambda^m\tau = \Lambda^m\Delta \oplus \Lambda^{m-1}\Delta$.

Упражнение 7.8. Покажите, что $\Lambda^m(U \oplus W) \simeq \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=m} \Lambda^\alpha U \otimes \Lambda^\beta W$.

Таким образом, достаточно убедиться, что скалярный квадрат $\left(\chi_{\Lambda^k\tau}, \chi_{\Lambda^k\tau}\right) = 2$. В стандартном базисе $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ пространства $\Lambda^m(\Bbbk^n)$ след перестановки σ равен сумме знаков $\operatorname{sgn} \sigma|_I$ ограничений перестановки σ на все такие подмножества I, что $\sigma(I) \subset I$. Поэтому

$$\left(\chi_{\Lambda^k\tau}, \chi_{\Lambda^k\tau}\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{I\,:\,\sigma(I)\subset I}\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\right)\cdot\left(\sum_{J\,:\,\sigma(J)\subset J}\operatorname{sgn}(\sigma|_J)\right) =$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{I,J\,:\,\substack{\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}}\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_J) = \frac{1}{n!}\sum_{I,J}\sum_{\sigma\,:\,\substack{\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}}\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_J)\,.$$

Совокупность всех таких перестановок σ, что $\sigma(I) \subset I$ и $\sigma(J) \subset J$, представляет собою прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \smallsetminus (I \cap J)$, $J \smallsetminus (I \cap J)$, $\{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus (I \cup J)$ и изоморфное $S_k \times S_{m-k} \times S_{m-k} \times S_{n-2m+k}$, где $k = k(I, J) = |I \cap J|$. Поскольку $\operatorname{sgn}(\sigma|_I)\cdot\operatorname{sgn}(s|_J) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\cap J})^2 \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)})\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)}) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)})\cdot\operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)})$, предыдущую сумму можно переписать как

$$\frac{1}{n!}\sum_{I,J} k!\cdot(n-2m+k)!\cdot\left(\sum_{g\in S_{m-k}}\operatorname{sgn}(g)\right)\cdot\left(\sum_{h\in S_{m-k}}\operatorname{sgn}(h)\right)\,. \tag{7-19}$$

Последние две суммы ненулевые только при $k = m$ и $k = m - 1$, когда они равны 1. В первом случае $I = J$ и соответствующий кусок суммы (7-19) равен

$$\frac{1}{n!}\sum_I m!\cdot(n-m)! = 1\,,$$

ибо состоит из $\binom{n}{m}$ одинаковых слагаемых $\binom{m}{n}^{-1}$. Во втором случае $|I \cap J| = (m-1)$ и соответствующий кусок суммы (7-19) равен

$$\frac{1}{n!}\sum_{I\cap J}\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j\notin I\cap J}}(m-1)!\cdot(n-m-1)!\ ,$$

т. е. представляет собою $\binom{n}{m-1}\cdot(n-m+1)(n-m)$ одинаковых слагаемых вида

$$\frac{(m-1)!\cdot(n-m-1)!}{n!} = \binom{n}{m-1}^{-1}\cdot\frac{1}{(n-m+1)(n-m)}\,,$$

что тоже равно 1.

7.2.2. Кольцо представлений. Целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров конечной группы G образуют коммутативное подкольцо с единицей в алгебре $\Bbbk[G]$ всех функций $G \to \Bbbk$ с операциями поточечного сложения и умножения значений. Это подкольцо называется *кольцом представлений* группы G и обозначается

$$\mathrm{Rep}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} \mathbb{Z} \cdot \chi_\lambda \subset \Bbbk^G .$$

Название связано с тем, что в силу предыдущего линейные комбинации неприводимых характеров с неотрицательными коэффициентами взаимно однозначно соответствуют представлениям группы G. При этом сложению и умножению в $\mathrm{Rep}(G)$ отвечают прямая сумма и тензорное произведение соответствующих представлений. Элементы кольца $\mathrm{Rep}(G)$, содержащие отрицательные кратности неприводимых характеров, называются *виртуальными представлениями*.

7.3. Индуцированные представления. Пусть ассоциативная $\Bbbk$-алгебра A с единицей является подалгеброй ассоциативной $\Bbbk$-алгебры B с той же единицей, что и в A. Любое представление W алгебры B одновременно является и представлением алгебры A. Пространство W, рассматриваемое как модуль над A, называется *ограничением* B-модуля W на A и обозначается $\mathrm{res}\, W$ или $\mathrm{res}_A^B W$, если важно указать, о каких B и A идёт речь. Простейшим примером этой ситуации является овеществление комплексных векторных пространств: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то n-мерное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ может рассматриваться как вещественное векторное пространство $W_\mathbb{R} = \mathrm{res}_\mathbb{R}^\mathbb{C} W$ размерности $2n$.

Наоборот, по любому A-модулю V можно построить B-модуль

$$\mathrm{ind}\, V = B \bigotimes_A V ,$$

который называется *индуцированным* с A-модуля V и определяется как фактор тензорного произведения векторных пространств $B \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными разностями $ba \otimes v - b \otimes av$ с $b \in B$, $a \in A$ и $v \in V$. По построению, в пространстве $B \bigotimes_A V$ выполняются равенства $ba \bigotimes_A v = b \bigotimes_A av$, т. е. элементы алгебры A «проносятся» через знак тензорного произведения. Поэтому такое произведение называется *тензорным произведением над* A. Структура модуля над B задаётся правилом

$$b(b' \otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} (bb') \otimes v .$$

Простейшим примером этой ситуации является комплексификация вещественного векторного пространства: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то из n-мерного вещественного векторного пространства V можно изготовить комплексное векторное пространство $\mathbb{C} \otimes V$ той же размерности n, но уже над полем $\mathbb{C}$.

Если важно указать алгебры B и A явно, мы будем писать $\mathrm{ind}_A^B V$.

Предложение 7.2
Отображение $\tau_A : V \to B \bigotimes_A V$, $v \mapsto 1 \bigotimes_A v$, является A-гомоморфизмом, и для любого A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ в любой B-модуль W существует единственный такой

B-гомоморфизм $\psi : B \underset{A}{\otimes} V \to W$, что $\psi \circ \tau_A = \varphi$. Иначе говоря, для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_B(\mathrm{ind}\, V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(V, \mathrm{res}\, W)\,, \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_A\,. \tag{7-20}$$

Доказательство. Для каждого B-гомоморфизма $\psi : B \underset{A}{\otimes} U \to V$ композиция

$$\varphi = \psi \circ \tau_A : V \to W\,, \quad v \mapsto \psi(1 \underset{A}{\otimes} u)$$

является A-гомоморфизмом, поскольку $\varphi(av) = \psi(1 \underset{A}{\otimes} av) = \psi(a \underset{A}{\otimes} v) = a\psi(1 \underset{A}{\otimes} v) = a\varphi(v)$. Тем самым, отображение (7-20) определено корректно. Для данного A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ такой B-гомоморфизм $\psi : B \underset{A}{\otimes} V \to W$, что $\varphi = \psi \circ \tau_A$, обязан действовать на разложимые тензоры по правилу $b \otimes v \mapsto b\varphi(v)$. Тем самым, он единствен. Будучи билинейным по b и v, это правило корректно задаёт линейный оператор $B \otimes V \to W$, который переводит соотношения $ba \otimes v - b \otimes av$ в нуль: $ba\psi(v) - b\psi(av) = 0$ в силу A-линейности ψ. Поэтому он корректно спускается до линейного отображения $B \underset{A}{\otimes} V \to W$, перестановочность которого с левым умножением на элементы $b \in B$ очевидна. □

Упражнение 7.9. Убедитесь, что универсальное свойство из предл. 7.2 определяет B-модуль $B \underset{A}{\otimes} V$ вместе с A-линейным отображением τ_A однозначно с точностью до единственного B-линейного изоморфизма, перестановочного с τ_A, и проверьте, что ограничение и индуцирование представлений перестановочны с прямыми суммами и с тензорными произведениями представлений.

7.3.1. Индуцированные представления групп. В ситуации, когда $B = \Bbbk[G]$ и $A = \Bbbk[H]$ являются групповыми алгебрами конечной группы G и произвольной её подгруппы $H \subset G$, ограничение и индуцирование сопоставляют каждому линейному представлению $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ его *ограничение* $\mathrm{res}\, W$ на подгруппу H

$$\mathrm{res}\, \varrho \stackrel{\text{def}}{=} \varrho|_H : H \to \mathrm{GL}(W)\,,$$

а каждому линейному представлению $\lambda : H \to \mathrm{GL}(V)$ — *индуцированное* им представление $\mathrm{ind}\, \lambda : G \to \mathrm{GL}(\Bbbk[G] \underset{k[H]}{\otimes} V)$ группы G, так что имеет место канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}\, V, W) \simeq \mathrm{Hom}_H(V, \mathrm{res}\, W)$. Если необходимо подчеркнуть, о каких группе G и подгруппе $H \subset G$ идёт речь, мы будем писать res_H^G и ind_H^G.

На языке характеров сопряжение и индуцирование являются встречными гомоморфизмами колец представлений

$$\mathrm{Rep}(H) \underset{\text{res}}{\overset{\text{ind}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Rep}(G)$$

сопряжёнными относительно канонического скалярного произведения (7-18) на $\Bbbk^G$

$$(\chi_{\mathrm{ind}\, V}, \chi_W)_{\Bbbk^G} = (\chi_V, \chi_{\mathrm{res}\, W})_{\Bbbk^H}\,.$$

В частности, кратность неприводимого G-модуля $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U)$ в разложении представления, индуцированного с неприводимого H-модуля $\mu : H \to \mathrm{GL}(S)$, равна кратности S в разложении ограничения V на подгруппу H:

$$m_\lambda\,(\mathrm{res}\,\mu) = m_\mu\,(\mathrm{ind}\,\lambda)\ . \tag{7-21}$$

Это равенство называется *законом взаимности Фробениуса*[1].

Предложение 7.3 (транзитивность индуцирования)
Для пары вложенных подгрупп $K \subset H \subset G$ и любого представления $\varrho : K \to \mathrm{GL}(U)$ имеется канонический изоморфзм G-модулей $\mathrm{ind}_H^G\,\mathrm{ind}_K^H\,U \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_H^G\,U$.

Доказательство. Поскольку для любого G-модуля W имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_K(U,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(\mathrm{ind}_K^H\,U,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G\,\mathrm{ind}_K^H\,U,W)$, $\psi \mapsto \psi\circ\tau_K\circ\tau_H$, отображение $\tau_K\circ\tau_H : U \to \mathrm{ind}_H^G\,\mathrm{ind}_K^H\,U$ универсально в смысле предл. 7.2. По упр. 7.9 оно отождествляется с отображением $U \to \mathrm{ind}_K^G\,U$ единственным изоморфизмом. □

7.3.2. Строение индуцированного представления. Тензорное произведение

$$\Bbbk[G]\otimes U = \bigoplus_{g\in G}(\Bbbk\cdot g)\otimes V$$

представляет собою прямую сумму $|G|$ копий пространства V, занумерованных элементами $g\in G$. Факторизация по соотношениям $(gh)\otimes v = g\otimes(vu)$ склеивает между собою все прямые слагаемые, занумерованные элементами из одного смежного класса gH так, что $gh\otimes v$ отождествляется с $g\otimes hv$. В результате тензорное произведение над $\Bbbk[H]$ оказывается изоморфно прямой сумме $r=[G:H]$ копий пространства V занумерованных какой-либо фиксированной системой $\{g_1,g_2,\dots,g_r\}$ представителей классов смежности

$$\Bbbk[G]\bigoplus_{\Bbbk[H]}V \simeq g_1V\oplus g_2V\oplus g_3V\oplus\,\cdots\,\oplus g_rV\,. \tag{7-22}$$

В этом разложении каждое $g_\nu V$ представляет собой копию пространства V, а стоящий слева значок g_ν указывает, что данная копия соответствует смежному классу $g_\nu H$. Если писать $g_\nu v$ для обозначения вектора $v\in V$, лежащего в g_ν-той копии $g_\nu V$ пространства V, то векторы $w\in\Bbbk[G]\bigotimes_{k[H]}V$ однозначно запишутся суммами вида

$$\sum_{\nu=1}^{r} g_\nu v_\nu\,,\quad \text{где}\quad v_\nu\in V\,.$$

Левое умножение на элемент $g\in G$ в группе G осуществляет перестановку смежных классов: для любого $g\in G$ и каждого $\nu=1,\,2,\,\dots\,,r$ найдутся единственные элемент $h=h(g,\nu)\in H$ и номер $\mu=\mu(g,\nu)$, $1\leqslant\mu\leqslant s$, такие что $gg_\nu = g_\mu h$. В этих обозначениях действие элемента $g\in G$ на вектор $g_\nu v\in g_\nu V$ происходит по правилу $gg_\nu v \overset{\text{def}}{=} g_\mu hv\in g_\mu V$, где $hv\in V$ есть результат действия оператора $h\in H$ на вектор $v\in V$ в соответствии с представлением подгруппы H в $\mathrm{GL}(V)$.

[1] или *двойственностью Фробениуса*

Пример 7.4
Пусть $G = S_3$ и $H \simeq S_2$ — подгруппа, порождённая транспозицией $\sigma = |12\rangle$. В качестве представителей смежных классов G/H выберем e, τ и τ^2, где $\tau = |123\rangle$. Представление $W = \operatorname{ind} \mathbb{1}$, индуцированное тривиальным одномерным представлением, трёхмерно с базисом e, τ, τ^2 и образующие $\sigma, \tau \in S_3$ действуют на этот базис матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Тем самым, W изоморфно тавтологическому представлению S_3 и является суммой тривиального одномерного представления и двумерного представления группой треугольника. Представление $W' = \operatorname{ind} \operatorname{sgn}$, индуцированное одномерным знаковым представлением, также трёхмерно с тем же базисом, но σ и τ теперь действуют на него матрицами

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это представление является прямой суммой знакового представления в одномерном пространстве, натянутом на $e + \tau + \tau^2$ и треугольного представления в ортогональной плоскости. Представление, индуцированное с двумерного левого регулярного представления $\Bbbk[S_2]$, это 6-мерное левое регулярное представление группы S_3 в

$$\Bbbk[S_3] = e \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau^2 \cdot \Bbbk[S_2] \,.$$

Упражнение 7.10. Убедитесь, что регулярное представление любой подгруппы всегда индуцирует регулярное представление объемлющей группы.

Предложение 7.4
Если группа G имеет абелеву подгруппу $H \subset G$, то размерность любого неприводимого представления группы G не превышает[1] индекса $[G : H]$.

Доказательство. Пусть представление U группы G неприводимо, и L — одномерный H-подмодуль в $\operatorname{res} U$. В силу взаимности Фробениуса $\operatorname{ind} L$ содержит U с ненулевой кратностью, откуда $\dim U \leqslant \dim \operatorname{ind} L = [G : H]$. □

Предложение 7.5
Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ раскладывается в объединение $C \cap H = D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_m$ различных классов H-сопряжённости. Тогда для любого представления V подгруппы H характер индуцированного им представления принимает на классе C значение

$$\chi_{\operatorname{ind} V}(C) = [G : H] \cdot \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| \,/\, |C| \,.$$

[1] ниже, в **??** мы увидим, что если абелева подгруппа H нормальна в G, то размерности всех неприводимых группы G делят индекс $[G : H]$

В частности, для тривиального одномерного представления $V = \mathbb{1}$ имеем

$$\chi_{\mathrm{ind}\,\mathbb{1}} = [G : H] \cdot |C \cap H| / |C| . \tag{7-23}$$

Доказательство. Поскольку элемент $g \in C$ переставляет слагаемые $g_\nu V$ разложения (7-22), след его действия равен сумме следов действий на тех слагаемых $g_\nu V$, которые остаются при этой перестановке на месте, что означает равенство $gg_\nu = g_\nu h$ для некоторого $h = g_\nu^{-1} g g_\nu \in H$. При этом действие элемента g на таком слагаемом $g_\nu V$ совпадает с действием элемента h на пространстве V, и его след равен $\chi_V(h) = \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu)$. Поэтому

$$\chi_{\mathrm{ind}\,V}(g) = \sum_{\substack{\nu :\\ g_\nu^{-1} g g_\nu \in H}} \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G :\\ s^{-1} g s \in H}} \chi_V(s^{-1} g s) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{s \in G :\\ s^{-1} g s \in D_i}} \chi_V(D_i) .$$

Во втором равенстве мы заменили каждое слагаемое левой суммы на $|H|$ равных друг другу слагаемых, получающихся заменой g_ν на всевозможные $s \in g_\nu H$, а в третьем — собрали вместе все слагаемые, у которых $s^{-1} g s$ лежит в одном классе H-сопряжённости D_i. Поскольку всего имеется $|D_i|$ различных произведений $s^{-1} g s \in D_i$ и каждое из них по формуле для длины орбиты получается из $|G| / |C|$ различных $s \in G$,

$$\chi_{\mathrm{ind}\,V}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| \cdot |G| / |C| ,$$

что и утверждалось. □

Упражнение 7.11 (формула проекции). Убедитесь, что для любых G-модуля W и H-модуля V имеется канонический изоморфизм G-модулей[1]

$$\mathrm{ind}\big((\mathrm{res}\, W) \otimes V\big) \simeq W \otimes \mathrm{ind}\, V .$$

7.3.3. Коиндуцированные представления. В теории представлений ассоциативных алгебр имеется ещё один способ сопоставить A-модулю V модуль над алгеброй B, содержащей A в качестве подалгебры, а именно — *коиндуцированный модуль*

$$\mathrm{coind}\, V \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_A(B, V) ,$$

на котором имеется *левое* действие алгебры B *правым* умножением аргумента:

$$b : \psi \mapsto b\psi , \quad \text{где} \quad b\psi(b') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi(b'b) .$$

Упражнение 7.12. Проверьте равенство $(b_1 b_2)\psi = b_1(b_2\psi)$.

Коиндуцированный модуль обладает универсальным свойством, двойственным к описанному в предл. 7.2. А именно, каноническое отображение

$$\tau^A : \mathrm{Hom}_A(B, V) \to V , \quad \varphi \mapsto \varphi(1) ,$$

[1] тензорные произведения в обеих частях суть тензорные произведения представлений групп H и G, описанные в n° 5.4 на стр. 68

A-линейно, и для любого B-модуля W и любого A-гомоморфизма $\varphi : W \to V$ существует единственный B-гомоморфизм $\psi : W \to \mathrm{Hom}_A(B, V)$, такой что $\tau^A \circ \psi = \varphi$. То есть для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_B(W, \mathrm{coind}\, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{res}\, W, V), \quad \psi \mapsto \tau^A \circ \psi, \tag{7-24}$$

сопоставляющий B-гомоморфизму $\psi : W \to \mathrm{Hom}_A(B, V)$, $w \mapsto \psi_w$, A-гомоморфизм

$$\tau^A \circ \psi : W \to V, \quad w \mapsto \psi_w(1).$$

Обратное отображение переводит A-гомоморфизм $\varphi : W \to V$ в B-гомоморфизм

$$\psi : W \to \mathrm{Hom}_A(B, V), \quad w \mapsto \psi_w, \quad \text{где}$$
$$\psi_w : B \to V, \quad b \mapsto \varphi(bw).$$

Упражнение 7.13. Убедитесь, что оба гомоморфизма корректно определены и обратны друг другу.

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$, $B = \Bbbk[G]$ суть групповые алгебры конечной группы G и её подгруппы $H \subset G$, преобразование Фурье[1] индуцирует изоморфизм векторных пространств $\Phi \otimes \mathrm{Id}_V : \mathrm{Hom}(\Bbbk[G], V) \simeq \Bbbk[G]^* \otimes V \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G] \otimes V$, действующий на операторы ранга 1 по правилу

$$\xi \otimes v \mapsto \hat{\xi} \otimes v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi\left(g^{-1}\right) \cdot g \otimes v = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \otimes \left(\xi \otimes v(g^{-1})\right),$$

а значит, переводящий произвольный линейный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ в тензор

$$\widehat{\varphi} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes \varphi(g),$$

называемый *преобразованием Фурье* оператора φ. Преобразование Фурье перестановочно с левым действием G, ибо для всех $s \in G$

$$\widehat{s\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes s\varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes \varphi(gs) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} sg^{-1} \otimes \varphi(g) = s\widehat{\varphi},$$

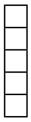
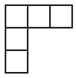
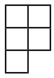
а его композиция с проекцией $\Bbbk[G] \otimes V \twoheadrightarrow \Bbbk[G] \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} V$ устанавливает изоморфизм подпространства H-инвариантных операторов $\mathrm{Hom}_H(\Bbbk[G], V) \subset \mathrm{Hom}(\Bbbk[G], V)$ с индуцированным G-модулем $\mathrm{ind}\, V = \Bbbk[G] \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} V$.

Упражнение 7.14. Докажите последнее утверждение.

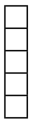
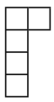
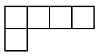
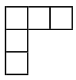
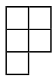
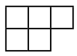
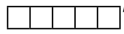
Таким образом, индуцированное и коиндуцированное представления конечной группы канонически изоморфны друг другу посредством преобразования Фурье.

[1] см. формулу (7-16) на стр. 89

Упр. 7.7. Группа $\mathfrak{A}_5$ имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся на композицию с внешним автоморфизмом $\mathfrak{A}_5$, который задаётся сопряжением любой транспозицией внутри S_5) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимые характеров $\mathfrak{A}_5$ такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	−1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	−1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	−1	−1
пятимерный	5	−1	1	0	0

Группа S_5 имеет знаковое одномерное представление sgn и симплициальное представление Δ. Представления $\mathrm{sgn} \otimes \Delta$ и $\Lambda^2\Delta$ тоже неприводимы, а 2-я симметрическая степень раскладывается как $S^2\Delta = \mathrm{sgn} \oplus \Delta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое 5-мерное представление, которое геометрически описывается как действие $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq S_5$ на гармонических четвёрках точек[1] в $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$. Ответ:

классы							′
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	−1	−1	1	1	−1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	−1	−1
четырёхмерный $\vartheta \otimes \alpha$	4	−2	0	1	0	1	−1
шестимерный $\Lambda^2\vartheta$	6	0	0	0	−2	0	1
пятимерный $\zeta \subset S^2\vartheta$	5	1	−1	−1	1	1	0
пятимерный $\zeta \otimes \alpha$	5	−1	1	−1	1	−1	0

Упр. 7.8. Выберите в $U \otimes W$ базис, согласованный с этим прямым разложением и рассмотрите соответствующий ему базис из мономов m-той степени.

[1]Точки $a, b, c, d \in \mathbb{P}_1$ называются *гармоническими*, если их двойное отношение $[a, b, c, d] = -1$, т. е. в карте, где $a = \infty$, точка b является серединой отрезка cd. Поскольку каждая тройка точек однозначно дополняется до гармонической и одна и та же четвёрка происходит из 4 троек, в $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ имеется $\binom{6}{2}/4 = 5$ гармонических четвёрок точек, и действие на них группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ задаёт изоморфизм $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \xrightarrow{\sim} S_5$.

Упр. 7.10. Каноническое отображение B-модулей $B \underset{A}{\otimes} A \to B$, ассоциированное с вложением A-модулей $A \hookrightarrow B$, является изоморфизмом для любого расширения $A \subset B$ ассоциативных алгебр с единицами.

Упр. 7.14. Зафиксируем систему представителей $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ смежных классов G/H. Тогда $G = g_1 H \sqcup \dots \sqcup g_r H = H g_1^{-1} \sqcup \dots \sqcup H g_r^{-1}$, и каждый H-инвариантный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ однозначно задаётся указанием s векторов $v_\nu = \varphi\left(g_\nu^{-1}\right) \in V$ ибо действует на остальные базисные векторы по правилу $\varphi\left(h g_\nu^{-1}\right) = h v_\nu$. Поэтому

$$\dim \operatorname{Hom}_H(\Bbbk[G], V) = [G : H] \cdot \dim V = \dim \Bbbk[G] \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} V .$$

Преобразование Фурье от H-инвариантного оператора $\varphi : g_\nu^{-1} \mapsto v_\nu$ равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} \varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\nu} \sum_{h \in H} g_\nu h^{-1} \underset{\Bbbk[H]}{\otimes} \varphi\left(h g_\nu^{-1}\right) = \frac{|H|}{|G|} \sum_{\nu} g_\nu v_\nu \in \bigoplus_{\nu} g_\nu V$$

и зануляется только когда все $v_\nu = 0$.