§5. Знакомство с теорией представлений.

5.1. Представления множества операторов. Для произвольного множества R условимся обозначать через $R \otimes \Bbbk$ векторное пространство с базисом R над полем $\Bbbk$, состоящее из всевозможных конечных формальных линейных комбинаций элементов из R с коэффициентами в $\Bbbk$, а через $A_R \stackrel{\text{def}}{=} T(R\otimes\Bbbk)$ — тензорную алгебру этого векторного пространства, т. е. свободную ассоциативную $\Bbbk$-алгебру, порождённую множеством R.

Например, если множество $R = \{t\}$ состоит из одного элемента t, векторное пространство $t \otimes \Bbbk = \Bbbk \cdot t$ одномерно, а ассоциативная алгебра $A_t \simeq \Bbbk[t]$ изоморфна алгебре многочленов от одной переменной[1].

Отображение множества R в алгебру линейных эндоморфизмов какого-нибудь векторного пространства W

$$\varrho : R \to \operatorname{End}(W) \tag{5-1}$$

называется *линейным представлением* множества R эндоморфизмами пространства W. В силу универсального свойства свободной алгебры A_R, линейные представления (5-1) биективно соответствуют гомоморфизмам алгебр

$$\widetilde{\varrho} : A_R \to \operatorname{End}(W)\,. \tag{5-2}$$

Гомоморфизм (5-2) называется *линейным представлением* алгебры A_R в пространстве W. Пространство W с фиксированным отображением (5-1) или гомоморфзмом (5-2) называется R-модулем или A_R-модулем. И то, и то означает фиксацию для каждого $f \in R$ линейного оператора $\varrho(f) : W \to W$. Тензоры

$$f = \sum x_{f_1 f_2 \dots f_m} f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_m \in A_R$$

с $f_\nu \in R$ и $x_{f_1 f_2 \dots f_m} \in \Bbbk$ при этом представляются линейными операторами

$$\widetilde{\varrho}(f) = \sum x_{f_1 f_2 \dots f_m} \varrho(f_1) \circ \varrho(f_2) \circ \dots \circ \varrho(f_m) : W \to W\,.$$

Образ гомоморфизма (5-2) состоит из всех операторов $W \to W$, которые можно получить, беря конечные линейные комбинации и композиции операторов, представляющих элементы множества R. Он называется *ассоциативной оболочкой* множества операторов $\varrho(R) \subset \operatorname{End}(W)$ и обозначается $\operatorname{Ass}\big(\varrho(R)\big) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{im}\widetilde{\varrho}$. Когда понятно, о каком представлении ϱ идёт речь, мы обозначаем результат применения оператора $\widetilde{\varrho}(f)$, где $f \in A_R$, к вектору $w \in W$ просто через fw. Для подпространства $U \subset W$ и набора операторов $F \subset A_R$ мы полагаем $FU \stackrel{\text{def}}{=} \{fu \mid f \in F\,,\ u \in U\}\,.$

[1] изоморфизм сопоставляет базисному тензору $t \otimes t \otimes \dots \otimes t \in (\Bbbk \cdot t)^{\otimes n}$ моном t^n

Определение 5.1 (разложимость и (полу) простота)
Подпространство $U \subset W$ называется *R-подмодулем*[1], если $RU \subset U$. Как обычно, мы называем подмодуль U *собственным*, если он отличен от нуля и от всего W. Модуль называется *неприводимым*[2], если у него нет собственных подмодулей, *разложимым* — если он является прямой суммой собственных подмодулей, и *вполне приводимым*[3] — если он является прямой суммой неприводимых подмодулей.

Упражнение 5.1. Убедитесь, что для заданных подпространств $U_1, U_2 \subset W$ условия $RU_1 \subset U_2$ и $A_R U_1 \subset U_2$ равносильны, и выведите отсюда, что простота, полупростота и разложимость модуля W относительно множества операторов и относительно ассоциативной оболочки этих операторов означают одно и то же.

Пример 5.1 (пространство с одним оператором)
Если множество R состоит из одного элемента t, то $A_R \simeq \Bbbk[t]$ является кольцом многочленов от этого элемента. Представление $\varrho : R \to \operatorname{End} W$ заключается в выборе на пространстве W линейного оператора $f = \varrho(t) : W \to W$ и наделяет пространство W структурой модуля над кольцом многочленов, которая задаётся гомоморфизмом

$$\widetilde{\varrho} = \mathrm{ev}_f : \Bbbk[t] \to \operatorname{End}(W), \quad t \mapsto f, \tag{5-3}$$

переводящим многочлен $F \in \Bbbk[t]$ в результат подстановки в него оператора f вместо переменной t. Если пространство W конечномерно, гомоморфизм (5-3) имеет ненулевое ядро $\ker \mathrm{ev}_f = (\mu_f)$, где μ_f — приведённый многочлен наименьшей степени, такой что[4] $\mu_f(f) = 0$. Ассоциативная оболочка оператора f, т. е. образ гомоморфизма (5-3), представляет собою множество всех многочленов от оператора f и изоморфна фактор алгебре $\Bbbk[t]/(\mu_f)$. По теореме о строении конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов конечномерный $\Bbbk[t]$-модуль W, будучи модулем кручения, изоморфен прямой сумме фактор модулей

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_2^{m_2})} \oplus \cdots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})}, \tag{5-4}$$

где все многочлены $p_i \in \Bbbk[t]$ неприводимы и приведены, а действие оператора состоит в умножении на t, и два таких модуля изоморфны, если и только если они отличаются друг от друга перестановкой прямых слагаемых. В частности, всякое неразложимое пространство с оператором изоморфно простран-

[1] а также *R-инвариантным* подпространством
[2] или *простым*
[3] а таже *полупростым*
[4] напомню, что он называется *минимальным многочленом* оператора f

ству $\Bbbk[t]/(p^m)$ с оператором умножения на t, и два таких пространства с разными p или m не изоморфны друг другу.

Упражнение 5.2. Убедитесь, что $\Bbbk[t]$-модуль $\Bbbk[t]/(p^m)$ неприводим, если и только если $m = 1$.

Тем самым, всякое неприводимое пространство с оператором изоморфно $\Bbbk[t]/(p)$, где $p \in \Bbbk[t]$ приведён и неприводим, а оператор действует умножением на t, а всякое полупростое — прямой сумме нескольких таких пространств.

Упражнение 5.3. Докажите, что оператор f над произвольным полем $\Bbbk$ диагонализуем тогда и только тогда, когда он аннулируется многочленом, полностью разлагающимся в $\Bbbk[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей[1].

Пример 5.2 (коммутирующие операторы)
Если все операторы из R коммутируют друг с другом, то каждое собственное подпространство любого оператора $f \in R$ является R-подмодулем, т. к. любой перестановочный с f оператор g переводит собственный для f вектор v с $fv = \lambda v$ в собственный вектор с тем же собственным числом: $f(gv) = g(fv) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$. Из этого наблюдения индукцией по $\dim V$ выводится, что над алгебраически замкнутым полем все операторы из R имеют в V общий собственный вектор: это так, если все операторы скалярны, если же хоть один из операторов не скалярен, то у него есть ненулевое собственное подпространство, которое является R-модулем размерности, меньшей $\dim V$, и по индукции в нём есть вектор, собственный для всех операторов из R.

Аналогично проверяется, что если все операторы из R диагонализуемы, то их можно диагонализовать одновременно в одном общем базисе. Для этого надо разложить V в прямую сумму собственных подпространств какого-нибудь нескалярного оператора $f \in R$. Такое разложение R-инвариантно, и по упр. 5.3 ограничение каждого оператора из R на каждое собственное подпространство f диагонализуемо на этом подпространстве. Используя индукцию по размерности, мы одновременно диагонализуем все операторы из R на каждом прямом слагаемом.

Следствие 5.1
Над алгебраически замкнутым полем все конечномерные простые модули над любым множеством коммутирующих операторов одномерны, и любой конечномерный модуль над множеством диагонализуемых коммутирующих операторов полупрост. □

5.1.1. Гомоморфизмы представлений. Линейный оператор $\varphi : W_1 \to W_2$ между R-модулями, заданными отображениями $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$, называется гомоморфизмом R-модулей[2], если он перестановочен с

[1] в частности, если оператор диагонализуем на всём пространстве, то он диагонализуем и на любом своём инвариантном подпространстве

[2] а также *сплетающим оператором* или *R-линейным отображением*

действием всех операторов из R, т. е. если для всех $f \in R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \\ W_1 \arrow[u, "\varrho_1(f)"] \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \arrow[u, "\varrho_2(f)"'] \end{tikzcd}.$$

Множество всех R-линейных гомоморфизмов обозначается через

$$\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\varphi : W_1 \to W_2 \mid \forall w \in W_1, \forall f \in R\ \varphi(fw) = f\varphi(w)\}.$$

Упражнение 5.4. Убедитесь, что $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{A_R}(W_1, W_2)$ является векторным подпространством в $\mathrm{Hom}(W_1, W_2)$ и что композиции R-линейных отображений R-линейны, а ядро и образ гомоморфизма R-модулей являются R-подмодулями.

Лемма 5.1 (лемма Шура)
Всякий ненулевой гомоморфизм неприводимых R-модулей является изоморфизмом. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то все R-линейные эндоморфизмы неприводимого R-модуля скалярны, т. е. имеют вид $\lambda \cdot \mathrm{Id}$, где $\lambda \in \Bbbk$.

Доказательство. Пусть представления $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$ неприводимы и $\varphi : W_1 \to W_2$ перестановочен со всеми операторами из R. Поскольку $\ker\varphi \subset W_1$ и $\mathrm{im}\,\varphi \subset W_2$ являются R-подмодулями, оба они несобственные, и либо $\ker\varphi = W_1$, т. е. $\varphi = 0$, либо $\ker\varphi = 0$ и $\mathrm{im}\,\varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq 0 \Rightarrow \mathrm{im}\,\varphi = W_2$, т. е. φ инъективен и сюрьективен. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и $\varphi : W \to W$ является R-линейным автоморфизмом R-модуля W, то каждый из операторов $\lambda \cdot \mathrm{Id}_W - \varphi$ с $\lambda \in \Bbbk$ тоже R-линеен и при некотором λ имеет ненулевое ядро. Так как W неприводим, оно совпадает со всем W. □

Следствие 5.2
Если основное поле алгебраически замкнуто, а R-модули U и W неприводимы, то

$$\dim \mathrm{Hom}_R(U, W) = \begin{cases} 0 & \text{если } U \text{ и } W \text{ не изоморфны} \\ 1 & \text{если } U \text{ и } W \text{ изоморфны.} \end{cases}$$

Доказательство. Любые два ненулевых изоморфизма $\varphi, \psi : U \xrightarrow{\sim} W$ пропорциональны, поскольку $\psi^{-1}\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}_U$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk^*$. □

5.2. Полупростые модули над ассоциативной алгеброй. Пусть A — ассоциативная алгебра над произвольным полем $\Bbbk$, а V — любое векторное пространство над $\Bbbk$. Всякий гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varrho : A \to \mathrm{End}\,V$, называется *линейным представлением* алгебры A в векторном пространстве V, и пространство V называется в этой ситуации A-модулем. Представления ассоциативных алгебр являются специальными примерами представлений множеств операторов и к ним в полной мере приложима терминология из опр. 5.1 на стр. 68. Для двух A-модулей U, W мы полагаем

$$\mathrm{Hom}_A(U,V) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid \forall f \in A, \forall u \in U\ \varphi(fu) = f\varphi(u)\}$$

и называем такие отображения $\varphi : U \to W$ *A-линейными*.

Упражнение 5.5. Пусть на пространстве V задан оператор π, удовлетворяющий уравнению $\pi^2 = \pi$. Покажите, что а) $V = \ker\pi \oplus \mathrm{im}\,\pi$ и π проектирует V на $\mathrm{im}\,\pi$ вдоль $\ker\pi$ б) если π является A-линейным гомоморфизмом, то подпространства $\ker\pi$ и $\mathrm{im}\,\pi$ являются A-подмодулями в) для любого A-линейного проектора π оператор $1 - \pi$ является A-линейным проектором на $\ker\pi$.

Предложение 5.1 (критерии полупростоты)
Следующие свойства конечномерного[1] A-модуля W попарно эквивалентны:

1) W полупрост (т. е. является прямой суммой простых A-модулей)

2) W линейно порождается простыми подмодулями

3) $\forall$ A-подмодуля $U \subset W$ $\exists$ A-подмодуль $V \subset W : W = U \oplus V$

4) $\forall$ A-подмодуля $U \subset W$ $\exists\, \pi \in \mathrm{End}_A(W) : \pi^2 = \pi$ и $\mathrm{im}\,\pi = U$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Покажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть W линейно порождается набором простых подмодулей V_α. Тогда для любого подмодуля $U \subsetneq W$ можно выбрать из числа V_α такие подмодули $V_1, V_2, \dots, V_m$, что

$$W = U \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m\,.$$

А именно, возьмём в качестве V_1 произвольный неприводимый модуль, не содержащийся в U (таковой существует, поскольку $U \neq W$ и W линейно порождается простыми подмодулями). Так как подмодуль V_1 прост, пересечение $V_1 \cap U \subsetneq V_1$ нулевое. Поэтому сумма U и V_1 прямая. Если $U \oplus V_1 \neq W$, то повторяем рассуждение с заменой U на $U \oplus V_1$: выбираем неприводимый подмодуль $V_2 \not\subset U \oplus V_1$ и видим, что сумма U, V_1 и V_2 тоже прямая. Через конечное число шагов[2] получающаяся прямая сумма исчерпает всё пространство W. Отметим, что при $U = 0$ это же рассуждение доказывает импликацию (2) $\Rightarrow$ (1).

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) очевидна: проектор π_V модуля $W = U \oplus V$ на U вдоль V перестановочен с действием A. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) доказывается индукцией по $\dim W$. Если $\dim W = 1$ или если W прост, доказывать нечего. Если W обладает собственным подмодулем $U \subsetneq W$, и $\pi : W \twoheadrightarrow U$ соответствующий

[1] требование конечномерности не является здесь существенным, и преодолевается надлежащим применением леммы Цорна

[2] в бесконечномерном случае в этом месте следует применить лемму Цорна

проектор, то по упр. 5.5 $W = U \oplus V$, где $V = \ker \pi$ тоже является A-подмодулем. Заметим теперь, что если свойство (4) выполняется в модуле W, то оно выполняется и во всех его подмодулях $M \subset W$, поскольку любой подмодуль $N \subset M$ является одновременно подмодулем в W, и ограничение на M A-линейного проектора $W \twoheadrightarrow N$ даёт A-линейный проектор $M \twoheadrightarrow N$. В частности, свойство (4) выполнено в U и в V. Поскольку их размерности строго меньше $\dim W$, по индукции, U и V являются прямыми суммами простых модулей. Поэтому $W = U \oplus V$ тоже является прямой суммой простых подмодулей. □

Следствие 5.3
Прямые суммы, подмодули и фактор модули полупростых модулей также являются полупростыми модулями.

Доказательство. Прямая сумма полупростых модулей линейно порождается простыми подмодулями слагаемых. Каждое инвариантное подпространство в подмодуле полупростого модуля является образом A-инвариантного проектора. Фактор модуль полупростого модуля линейно порождается образами его простых подмодулей. По лемме Шура эти образы либо нулевые, либо изоморфны исходным простым подмодулям, т. е. тоже просты. □

Упражнение 5.6. Покажите, что для любого векторного пространства V имеет место изоморфизм алгебр $\mathrm{End}\left(V^{\oplus n}\right) \simeq \mathrm{Mat}_n\left(\mathrm{End}(V)\right)$.

Теорема 5.1 (теорема о двойном централизаторе)
Пусть конечномерное[1] векторное пространство V полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$. Обозначим через $B = \mathrm{End}_A(V)$ алгебру всех операторов, перестановочных с подалгеброй[2] A. Тогда алгебра всех операторов, перестановочных с подалгеброй B, совпадает с A, т. е. $\mathrm{End}_B(V) = A$.

Доказательство. Включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$ очевидно из определений. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и покажем, что для любого оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ найдётся оператор $a \in A$, такой что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i. Отсюда сразу следует равенство $\varphi = a$.

Рассмотрим n-кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\mathrm{End}_B(V)$, полагая $f\,(v_1, v_2, \dots, v_n) = (f v_1, f v_2, \dots, f v_n)$. Обозначим вектор $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in W$ через e. Нам надо показать, что $\varphi e \in Ae$. Поскольку W является полупростым A-модулем, A-подмодуль $Ae \subset W$ является образом некоторого A-линейного проектора $\pi : W \twoheadrightarrow Ae$, тождественно действующего на самом Ae. Если π коммутирует с φ, то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in Ae$, что и требуется. Остаётся проверить, что π и в самом деле коммутирует с φ.

[1] в этой теореме конечномерность уже существенна

[2] Подалгебра $\mathrm{End}_A(V)$ называется *централизатором* подалгебры A в алгебре $\mathrm{End}(V)$, чем и объясняется название теоремы. В англоязычной литературе подалгебру $\mathrm{End}_A(V)$ иногда называют «*commutator of A*», а теор. 5.1 — «*double commutator theorem*». В русском языке термин «коммутатор» в этом контексте никогда не используется.

Для этого, следуя упр. 5.6, запишем действие эндоморфизма $\pi : V^{\oplus n} \to V^{\oplus n}$ матрицей (π_{ij}) с элементами[1] $\pi_{ij} \in \mathrm{End}(V)$. Поскольку π перестановочен с действием A на W, каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V, т. е. лежит в $\mathrm{End}_A(V) = B$. Поэтому диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, коммутирует с π. □

Следствие 5.4 (теорема Бернсайда)
Пусть основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Если конечномерное пространство V неприводимо над множеством операторов $R \subset \mathrm{End}(V)$, то ассоциативная оболочка $\mathrm{Ass}(R) \subset \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. В частности, все конечномерные неприводимые представления $A \to \mathrm{End}(V)$ любой ассоциативной алгебры A эпиморфны.

Доказательство. По лемме Шура[2] $\mathrm{End}_{\mathrm{Ass}(R)}(V) = \Bbbk$. По теор. 5.1 $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Ass}(R)$. □

Упражнение 5.7. Покажите, что над любым полем $\Bbbk$ верно и обратное: если $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$, то R-модуль V неприводим.

5.3. Изотипные компоненты. Зафиксируем простой A-модуль U и для любого A-модуля W зададим на тензорном произведении $\mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U$ структуру A-модуля правилом $a(\varphi \otimes u) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \otimes (au)$ для всех $a \in A$. Каноническая свёртка

$$c : \mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U \to W, \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u), \tag{5-5}$$

является A-линейным гомоморфизмом. Её образ называется *U-изотипной компонентой* модуля W и обозначается $W_U \subset W$. Он равен сумме всех изоморфных U неприводимых подмодулей в W: поскольку всякий ненулевой гомоморфизм $\psi : U \to W$ инъективен, любой вектор вида $\sum \psi_i(u_i) \in W$ с $u_i \in U$ и $\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U, W)$ лежит в сумме подмодулей $\psi_i(U) \subset W$, изоморфных U, и наоборот, если векторы $v_i \in \mathrm{im}\,\psi_i$ лежат в образах A-линейных вложений $\psi_i : U \hookrightarrow W$, то $\sum v_i = c\left(\sum \psi_i \otimes \psi_i^{-1} v_i\right)$.

Предложение 5.2
Всякий гомоморфизм A-модулей $\varphi : V \to W$ переводит U-изотипную компоненту $V_U \subset V$ в U-изотипную компоненту $W_U \subset W$. В частности, для любого подмодуля $V \subset W$ выполнено равенство $V_U = V \cap W_U$.

Доказательство. Образ $\varphi(v)$ любого вектора вида $v = \sum \psi_i(u_i)$ с $\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U, V)$ и $u_i \in U$ также имеет вид $\sum \varphi\psi_i(v)$ с $\varphi\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U, W)$. □

[1] оператор $\pi_{ij} : V \to V$ задаёт проекцию на i-тое слагаемое суммы $V^{\oplus n}$ результата применения π к j-тому слагаемому этой суммы

[2] см. лем. 5.1 на стр. 70

Предложение 5.3
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каноническая свёртка (5-5) инъективна, т. е. задаёт изоморфизм $c : \mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U \xrightarrow{\sim} W_U$.

Доказательство. Поскольку модуль W_U линейно порождается простыми подмодулями, изоморфными U, он раскладывается в прямую сумму таких подмодулей:

$$W_U = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s . \tag{5-6}$$

Зафиксируем для каждого i вложение $\psi_i : U \hookrightarrow W$ с образом $\psi_i(U) = V_i$. Тогда $\mathrm{Hom}_A(U, W) = \mathrm{Hom}_A(U, W_U) = \bigoplus \mathrm{Hom}_A(U, V_i)$ является по сл. 5.2 прямой суммой одномерных пространств $\Bbbk \cdot \psi_i$, порождённых вложениями ψ_i. Поэтому элементы модуля $\mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U$ однозначно записываются в виде $\sum \psi_i \otimes u_i$ с $u_i \in U$. Если

$$c\left(\sum \psi_i \otimes u_i\right) = \sum \psi_i(u_i) = 0 ,$$

то каждый из s векторов $\psi_i(u_i)$, лежащих в разных компонентах прямой суммы (5-6), равен нулю в отдельности, а поскольку все ψ_i инъективны, все $u_i = 0$. □

Предложение 5.4 (изотипное разложение)
Если A-модуль W полупрост, то в любом его разложении в прямую сумму простых подмодулей сумма тех слагаемых, что изоморфны U, совпадает с U-изотипной компонентой $W_U \subset W$. В частности, она не зависит от выбора разложения W в прямую сумму простых подмодулей, и имеется каноническое *изотипное разложение*

$$W = \bigoplus_U W_U , \tag{5-7}$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A-модулям U, для которых $\mathrm{Hom}_A(U, W) \neq 0$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{Hom}_A(U, W) = \bigoplus \mathrm{Hom}_A(U, V_i)$ и $\mathrm{Hom}_A(U, V_j) = 0$ для всех $V_j \not\simeq U$, образ канонической свёртки (5-5) лежит в сумме тех подмодулей V_i, что изоморфны U. □

Определение 5.2
Для простого модуля U и полупростого модуля W целое неотрицательное число

$$m_U \stackrel{\text{def}}{=} \dim W_U \,/\, \dim U , \tag{5-8}$$

равное количеству изоморфных модулю U слагаемых любого разложения модуля W в прямую сумму неприводимых подмодулей, называется *кратностью* простого модуля U в полупростом модуле W.

Следствие 5.5
Для всех конечномерных полупростых A-модулей V, W над алгебраически замкнутым полем $\dim \mathrm{Hom}_A(V,W) = \sum_U m_U(U)\cdot m_U(W) = \dim \mathrm{Hom}_A(W,V)$, где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A-модулям U.

Доказательство. Пусть $V = \oplus V_i$ и $W = \oplus W_j$, где все V_i и W_j неприводимы. По лемме Шура пространства $\mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ нулевые при $V_i \not\simeq W_j$ и одномерные при $V_i \simeq W_j$. Поэтому $\mathrm{Hom}_A(V,W) = \bigoplus\limits_{ij} \mathrm{Hom}_A(V_i,W_j)$ имеет размерность $\sum\limits_U m_U(U)\cdot m_U(W)$ и то же самое верно для $\dim \mathrm{Hom}_A(W,V)$. □

5.4. Линейные представления групп. Действие группы G на векторном пространстве V линейными преобразованиями, т. е. гомоморфизм групп $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G в векторном пространстве V. Пространство V называется в этом случае G-модулем. Прямая сумма, тензорное произведение, а также внешние и симметрические степени G-модулей U, W канонически наделяются такими структурами G-модулей, что операторы $g \in G$ действуют по правилам $g(u \dotplus w) \overset{\text{def}}{=} (gu) \dotplus (gw)$, $g(u\otimes w) \overset{\text{def}}{=} (fu)\otimes(gw)$, $g(u_1\wedge u_2) \overset{\text{def}}{=} (gu_1)\wedge(gu_2)$, $g(u_1\cdot u_2) \overset{\text{def}}{=} (gu_1)\cdot(gu_2)$ соответственно. Для любого G-подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является G-модулем с действием $g[v] \overset{\text{def}}{=} [gv]$.

Упражнение 5.8. Убедитесь, что эти правила корректно задают гомоморфизмы группы G в $\mathrm{GL}(U\oplus W)$, $\mathrm{GL}(U\otimes W)$, $\mathrm{GL}\big(\Lambda(U)\big)$, $\mathrm{GL}\big(S(U)\big)$ и $\mathrm{GL}(W/V)$ соответственно.

Для каждого представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *двойственное представление*

$$\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$$

определяется так, чтобы свёртка векторов с ковекторами сохранялась под действием группы G, т. е. для всех $g \in G$, $\xi \in V^*$ и $w \in V$ выполняется равенство

$$\langle\, \varrho^*(g)\xi\,,\, \varrho(g)w\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, w\,\rangle\,. \tag{5-9}$$

Так как каждый оператор $\varrho(g)$ обратим, равенство (5-9) равносильно равенству

$$\langle\, \varrho^*(g)\xi\,,\, v\,\rangle = \left\langle\, \xi\,,\, \varrho\left(g^{-1}\right) v\,\right\rangle$$

для всех $v \in W$, откуда $\varrho^*(g) = \varrho\left(g^{-1}\right)^*$ это двойственный к $\varrho(g)^{-1}$ оператор, переводящий ковектор $\xi \in V^*$ в ковектор $\xi\circ g^{-1} : v \mapsto \xi\left(g^{-1}v\right)$. В частности, матрицы операторов $\varrho(g)$ и $\varrho^*(g)$ в двойственных базисах пространств V и V^* транспонированы и обратны друг другу.

Упражнение 5.9. Убедитесь, что $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ является гомоморфизмом групп.

Для любых двух представлений $\varrho : G \to \mathrm{GL}(U)$ и $\lambda : G \to \mathrm{GL}(W)$ представление $\varrho^*\otimes\lambda$ задаёт действие группы G на пространстве $U^*\otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U,V)$ всех линейных операторов $\varphi : U \to V$ по правилу

$$g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}\,. \tag{5-10}$$

Упражнение 5.10. Убедитесь в этом.

Подпространство неподвижных векторов представления (5-10) обозначается

$$\mathrm{Hom}_G(U,V) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall g \in G \; g\varphi = \varphi g\}$$

и называется пространством *G-инвариантных* операторов[1].

Лемма 5.2

Пусть $|G| = n$, а основное поле $\Bbbk$ содержит все n корней n-той степени из единицы и $\operatorname{char} \Bbbk \nmid n$. Тогда в любом конечномерном представлении группы G над полем $\Bbbk$ все её элементы действуют диагонализуемыми операторами.

Доказательство. Каждый оператор из группы G аннулируются многочленом $t^n - 1$, который в силу сделанных предположений не имеет кратных корней и полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители. По упр. 5.3 такой оператор диагонализуем. □

5.4.1. Представления конечных абелевых групп. Пусть G — произвольная конечная абелева группа, основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$. Из лем. 5.2 и сл. 5.1 на стр. 69 следует, что всякое конечномерное линейное представление группы G является прямой суммой одномерных. Так как любой линейный оператор на одномерном пространстве скалярен, одномерное представление описывается мультипликативным гомоморфизмом

$$\chi : G \to \Bbbk^*, \quad gv = \chi(g)v \quad \forall g \in G \, \forall v \in V, \tag{5-11}$$

сопоставляющим каждому элементу группы скаляр, которым этот элемент действует на пространстве представления. Гомоморфизмы (5-11) называются (*мультипликативными*) *характерами* абелевой группы G. Одномерный G-модуль, отвечающий характеру χ, обозначается через V_χ.

Упражнение 5.11. Убедитесь, что $V_\chi \simeq V_\psi$ как G-модули тогда и только тогда, когда $\chi = \psi$ как гомоморфизмы из G в $\Bbbk^*$.

Поскольку $\chi^{|G|}(g) = \chi\left(g^{|G|}\right) = \chi(e) = 1$ для всех $g \in G$, множество значений любого характера лежит в мультипликативной подгруппе $\boldsymbol{\mu}_{|G|}(\Bbbk) \subset \Bbbk^*$ корней $|G|$-той степени из 1 в поле $\Bbbk$. Сами характеры образуют мультипликативную абелеву подгруппу в алгебре $\Bbbk^G$ всех функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$. Эта группа обозначается $G^\wedge$ и называется *двойственной по Понтрягину* к группе G. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_e \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению.

Упражнение 5.12. Проверьте, что характер тензорного произведения одномерных представлений абелевой группы равен произведению их характеров, а характер двойственного представления обратен характеру исходного.

[1] а также *сплетающих* операторов, *G-линейных* операторов или *G-гомоморфизмов*

Группа G действует на $\Bbbk^G$ по правилу $g : f(x) \mapsto f(gx)$, и V_χ-изотипная компонента этого представления состоит из таких функций $f : G \to \Bbbk$, что $f(gx) = \chi(g)f(x)$ для всех $x, g \in G$. Полагая в этом условии $x = e$, получаем для всех $g \in G$ равенство $f(g) = \chi(g) \cdot f(e)$, означающее, что все такие функции пропорциональны характеру χ. Тем самым, каждая изотипная компонента представления $\Bbbk^G$ одномерна, и его изотипное разложение имеет вид $\Bbbk^G = \bigoplus\limits_{\chi \in G^\wedge} \Bbbk \cdot \chi$. В частности, $|G^\wedge| = |G|$ и характеры образуют базис пространства функций на группе.

Упражнение 5.13. Покажите, что любой набор попарно различных гомоморфизмов $\{\psi_\nu\}$ из произвольной[1] группы G в мультипликативную группу ненулевых элементов произвольного поля $\Bbbk$ линейно независим в векторном пространстве всех функций на G со значениями в поле $\Bbbk$.

Теорема 5.2 (двойственность Понтрягина[2])
Для каждого $g \in G$ функция вычисления $\mathrm{ev}_g : G^\wedge \to \Bbbk$, $\chi \mapsto \chi(g)$, является характером группы $G^\wedge$, и сопоставление $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ задаёт изоморфизм групп $G \xrightarrow{\sim} G^{\wedge\wedge}$.

Доказательство. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g) = \mathrm{ev}_g(\chi_1) \cdot \mathrm{ev}_g(\chi_2).$$

Равенства $\mathrm{ev}_{g_1 g_2}(\chi) = \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\,\mathrm{ev}_{g_2}(\chi)$ показывают, что отображение $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является гомоморфизмом групп. Если элемент $g \in G$ лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$ и g тривиально действует в любом конечномерном представлении группы G. В частности, $f(gx) = f(x)$ для всех функций $f : G \to \Bbbk$, что возможно только если $xg = x$ для каждого $x \in G$, т. е. только при $g = e$. Поскольку $|G^{\wedge\wedge}| = |G|$, установленная нами инъективность гомоморфизма $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ влечёт его биективность. □

5.4.2. Проектор на инварианты. Рассмотрим теперь линейное представление V произвольной, не обязательно абелевой, группы G. Векторы, неподвижные относительно всех преобразований из G образуют в V подмодуль, называемый *модулем G-инвариантов* и обозначаемый

$$V^G \overset{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid gv = v \ \forall\, g \in G \,\}.$$

Если группа G конечна и её порядок не делится на характеристику поля $\Bbbk$, каждое линейное представление V группы G допускает G-инвариантную проекцию на подмодуль инвариантов. Она обозначается $v \mapsto v^\natural$ («v-бекар») и сопо-

[1] в том числе неабелевой

[2] на самом деле двойственность Понтрягина имеет место для всех локально компактных топологических абелевых групп, и конечные абелевы группы являются лишь простейшими примерами таких групп

ставляет вектору $v \in V$ центр тяжести[1] его G-орбиты в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$:

$$v^\natural \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gv\,, \tag{5-12}$$

Упражнение 5.14. Убедитесь прямым вычислением, что при $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ оператор $v \mapsto v^\natural$ перестановочен с действием G и линейно проектирует V на V^G, а также приведите пример конечной группы G и неразложимого G-модуля V над конечным полем $\Bbbk$, имеющего ненулевой подмодуль инвариантов V^G.

Теорема 5.3
Любое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо[2].

Доказательство. Покажем, что любой G-подмодуль $U \subset V$ является образом G-инвариантного проектора. Группа G действует на пространстве всех линейных операторов $\operatorname{Hom}(V,U)$ по правилу $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$. Достаточно убедиться в том, что проекция

$$\varphi \mapsto \varphi^\natural = |G|^{-1}\sum_g g\varphi g^{-1}$$

на инварианты этого действия переводит любой проектор $\pi : V \twoheadrightarrow U$ тоже в проектор V на U. Поскольку $g\pi g^{-1}U \subset U$ для всех $g \in G$, образ $\operatorname{im}\pi^\natural \subset U$. С другой стороны, любой вектор $u \in U$ неподвижен относительно $\pi^\natural$, т. к. $g^{-1}U \subset U$ и $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ влекут $g\pi g^{-1}u = gg^{-1}u = u$. □

5.5. Групповая алгебра. С каждой группой G канонически связана ассоциативная алгебра $\Bbbk[G]$, которая называется *групповой алгеброй* группы G над полем $\Bbbk$ и представляет собою векторное пространство с базисом G, т. е. состоит из всевозможных формальных линейных комбинаций $\sum_{g\in G} c_g\, g$ элементов группы с произвольными коэффициентами $c_g \in \Bbbk$, из которых только конечное число отлично от нуля. Сложение и умножение таких выражений происходит по стандартным правилам раскрытия скобок. При этом константы c_g по определению коммутируют с элементами группы и перемножаются так, как это происходит в поле $\Bbbk$, а элементы группы перемножаются согласно имеющемуся в группе закону композиции, т. е.

$$\begin{gathered}\Big(\sum_g a_g g\Big)\Big(\sum_h b_h h\Big) = \sum_{gh} a_g b_h gh = \sum_f c_f f\,,\\ \text{где}\quad c_f = \sum_{gh=f} a_g b_h = \sum_t a_{ft^{-1}} b_t = \sum_s a_s b_{s^{-1}f}\,.\end{gathered} \tag{5-13}$$

[1] если $|G| \,\vdots\, \operatorname{char}(\Bbbk)$, то сумма весов элементов орбиты нулевая, и центр тяжести не определён корректно

[2] т. е. является прямой суммой простых G-модулей

Группа G вложена в алгебру $\Bbbk[G]$ в качестве мультипликативной подгруппы. Всякое линейное представление $G \to \mathrm{GL}(V)$ канонически продолжается по линейности до представления групповой алгебры $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$, образ которого является одновременно и линейной, и ассоциативной оболочкой всех операторов из группы G.

Упражнение 5.15. Докажите, что сопоставление целому числу m монома t^m устанавливает изоморфизм между а) групповой алгеброй $\Bbbk[\mathbb{Z}]$ аддитивной группы $\mathbb{Z}$ и кольцом полиномов Лорана $\Bbbk[t, t^{-1}]$ б) групповой алгеброй $\Bbbk[\mathbb{Z}/(n)]$ аддитивной группы вычетов $\mathbb{Z}/(n)$ и фактор кольцом $k[t]/(t^n - 1)$.

Замечательным примером элемента групповой алгебры является «усреднение»

$$\pi_{\mathbb{1}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \Bbbk[G], \tag{5-14}$$

образом которого в каждом линейном представлении $\varrho : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ является проектор (5-12) на подмодуль $V^G \subset V$ инвариантов представления ϱ.

Упражнение 5.16. Покажите, что элемент (5-14) лежит в центре[1] алгебры $\Bbbk[G]$.

5.5.1. Центр групповой алгебры конечной группы G

$$Z(\Bbbk[G]) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, x \in \Bbbk[G]\ zx = xz\} = \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, g \in G\ gzg^{-1} = z\}$$

состоит их таких линейных комбинаций $z = \sum_h z_h h \in \Bbbk[G]$, коэффициенты z_h которых постоянны на классах сопряжённости. Поэтому элементы

$$z_C = \sum_{h \in C} h, \tag{5-15}$$

где C пробегает множество $\mathrm{Cl}(G)$ классов сопряжённости группы G, образуют базис групповой алгебры $\Bbbk[G]$. В частности, размерность центра равна $|\mathrm{Cl}(G)|$. Мы будем называть это число *числом классов*. Отметим, что все центральные элементы групповой алгебры в любом линейном представлении $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ изображаются операторами, лежащими в $\mathrm{End}_G(V)$. В частности, в неприводимом представлении над алгебраически замкнутым полем все центральные элементы действуют умножениями на скаляры.

5.5.2. Изотипные разложения. Пусть G — конечная группа. Зафиксируем такое множество $\mathrm{Ir}(G)$ неприводимых представлений группы G, что любой неприводимый G-модуль изоморфен одному и только одному представлению из $\mathrm{Ir}(G)$. Мы будем обозначать элементы множества $\mathrm{Ir}(G)$ через $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U_\lambda)$ и писать в этом случае, что $\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$ или $U_\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$. Согласно теор. 5.3 и предл. 5.4 на стр. 74 каждый конечномерный G-модуль V обладает *изотипным разложением*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} V_\lambda, \tag{5-16}$$

[1] напомню, что *центром* кольца или группы K называется множество всех элементов, мультипликативно коммутирующих со всеми элементами K

каждая компонента V_λ которого является суммой всех простых подмодулей в V, изоморфных заданному $U_\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$, и является образом канонической свёртки

$$c : \mathrm{Hom}_G(U_\lambda, W) \otimes U_\lambda \to V, \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u). \tag{5-17}$$

В любом разложении V в прямую сумму простых G-модулей сумма всех тех слагаемых, что изоморфны U_λ, совпадает с V_λ, и их количество $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$, называется *кратностью* неприводимого представления λ в представлении V. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, каноническая свёртка (5-17) является изоморфизмом на изотипную компоненту V_λ, и для любых двух представлений V и W группы G

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V) m_\lambda(W) = \dim \mathrm{Hom}_G(W, V). \tag{5-18}$$

Пример 5.3 (левое регулярное представление)
Для каждого $\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$ обозначим через $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ λ-изотипную компоненту *левого регулярного представления* $g : x \mapsto gx$ группы G в $\Bbbk[G]$. Таким образом,

$$\Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} I_\lambda. \tag{5-19}$$

Будучи G-подмодулем левого регулярного представления, изотипная компонента I_λ является левым идеалом алгебры $\Bbbk[G]$, а т. к. правое умножение на любой элемент $h : x \to xh$ является G-автоморфизмом левого регулярного представления[1] и, тем самым, переводит каждую изотипную компоненту I_λ в себя, все I_λ являются также и правыми, а значит, двусторонними идеалами алгебры $\Bbbk[G]$. Так как $I_\lambda \cap I_\varrho = 0$ при $\lambda \neq \varrho$, и $I_\lambda \cdot I_\varrho \subset I_\lambda \cap I_\varrho$, мы получаем *соотношения ортогональности*

$$I_\lambda \cdot I_\varrho = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho. \tag{5-20}$$

Упражнение 5.17. Докажите, что I_λ являются минимальными по включению ненулевыми двусторонними идеалами алгебры $\Bbbk[G]$, и что все двусторонние идеалы групповой алгебры исчерпываются прямыми суммами идеалов I_λ.

Лемма 5.3
Любое представление $\varrho : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$, не содержащее в своём разложении неприводимого представления λ, переводит изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ в нуль.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом в $\Bbbk[G]$, для любого $v \in V$ подпространство $I_\lambda \cdot v = \{fv \mid f \in I_\lambda\}$ является G-подмодулем в V, и правило $f \mapsto fv$ задаёт сюрьективный гомоморфизм G-модулей $I_\lambda \twoheadrightarrow I_\lambda \cdot v$. Поскольку такой гомоморфизм переводит λ-изотипный подмодуль в λ-изотипный, подмодуль $I_\lambda \cdot v$ содержится в изотипной компоненте V_λ представления V. Если она нулевая, то $I_\lambda \cdot v = 0$ для всех $v \in V$. □

[1] ибо левое и правое умножение на любые два фиксированных элемента группы перестановочны друг с другом (обязательно продумайте это)

Теорема 5.4 (теорема Машке)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ гомоморфизм алгебр

$$\mathfrak{rep} : \Bbbk[G] \to \prod_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda), \tag{5-21}$$

переводящий элемент $f \in \Bbbk[G]$ в набор операторов, которыми этот элемент действует во всех неприводимых представлениях группы G, является изоморфизмом алгебр. Его ограничение на изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ является изоморфизмом I_λ на матричную алгебру $\mathrm{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Сначала установим инъективность гомоморфизма $\mathfrak{rep}$. Если элемент $h \in \Bbbk[G]$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще на любом конечномерном G-модуле, в частности — в левом регулярном представлении. Но $f \cdot 1 = 0$ влечёт $f = 0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что по лем. 5.3 каждое неприводимое представление $\lambda : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения (5-19) за исключением I_λ. Однако по теореме Бернсайда[1] оно эпиморфно. Поэтому ограничение $\mathfrak{rep}|_{I_\lambda} : I_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U_\lambda)$ является изоморфизмом. Отсюда сразу следует, что неприводимых представлений U_λ имеется лишь конечное число и каждое из них присутствует в изотипном разложении (5-19) левого регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim(I_\lambda) / \dim(U_\lambda) = \dim \mathrm{End}(U_\lambda) / \dim U_\lambda = \dim U_\lambda$. Для доказательства сюрьективности гомоморфизма $\mathfrak{rep}$ остаётся заметить, что по уже доказанному для любого набора операторов $\varphi_\lambda \in \mathrm{End}(U_\lambda)$ найдутся такие элементы $f_\lambda \in I_\lambda$, что $\lambda(f_\lambda) = \varphi_\lambda$. Поскольку $\varrho(f_\lambda) = 0$ для всех неприводимых $\varrho \neq \lambda$, $\mathfrak{rep}(\sum_\lambda f_\lambda) = \prod_\lambda \varphi_\lambda$. □

Следствие 5.6
Число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$, характеристика которого не делит $|G|$, конечно и равно числу классов сопряжённости $|\mathrm{Cl}(G)|$ группы G, а сумма квадратов размерностей всех неприводимых равна порядку $|G|$. При этом $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim U_\lambda$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что размерность центра прямой суммы матричных алгебр равна количеству слагаемых, второе — из равенства размерностей правого и левого пространств в (5-21). □

Пример 5.4 (простенькие представления симметрических групп)
Сопоставление перестановке $g \in S_n$ её циклового типа устанавливает биекцию между классами сопряжённых элементов в S_n и n-клеточными диаграммами Юнга[2]. Таким образом, неприводимые представления симметрической

[1] см. сл. 5.4 на стр. 73
[2] длины строк диаграммы суть длины независимых циклов, на которые раскладывается перестановка

группы S_n биективно соответстуют n-клеточным диаграммам Юнга. У каждой симметрической группы S_n есть два одномерных представления: тривиальное и *знаковое*, в котором перестановка σ действует умножением на знак $\mathrm{sgn}(\sigma)$. Если характеристика поля не делит n, операторы симметризации и альтернирования

$$\mathrm{sym}_n = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} g \quad \text{и} \quad \mathrm{alt}_n = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g$$

являются S_n-инвариантными проекторами на тривиальную и знаковую изотипные компоненты любого S_n-модуля.

Упражнение 5.18. Убедитесь в этом.

Тавтологическое n-мерное представление группы S_n перестановками стандартных базисных векторов e_i пространства $\Bbbk^n$ имеет тривиальный одномерный подмодуль, порождённый вектором $e = \sum e_i$. Индуцированное представление в $(n-1)$-мерном фактор пространстве $\Bbbk^n/\Bbbk \cdot e$ называется *симплициальным*[1], поскольку над полем $\mathbb{R}$ его образ представляет собою несобственную группу правильного $(n-1)$-мерного симплекса с центром в нуле и вершинами в классах векторов e_i по модулю $\Bbbk \cdot e$.

Упражнение 5.19. Покажите, что симплициальное представление неприводимо.

Неприводимые представления группы S_3, имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным и знаковым одномерными представлениями и двумерным представлением U_Δ группой треугольника, т. к. $1^2+1^2+2^2 = 6$. Инвариантный проектор на U_Δ-изотипную компоненту любого представления задаётся оператором

$$\pi_\Delta \overset{\text{def}}{=} 1 - \frac{1}{6}\sum_{g\in S_3}(1+\mathrm{sgn}(g))g = 1 - \frac{1}{3}\left(1+\tau+\tau^2\right) ,$$

где $\tau = |123\rangle \in S_3$ это цикл длины 3.

Упражнение 5.20. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что π_Δ лежит в $Z\big(\Bbbk(S_3)\big)$, идемпотентен, аннулирует тривиальный и знаковый модули и действует тождественным оператором в представлении группой треугольника.

У группы S_4, имеющей 5 классов сопряжённости, кроме одномерного тривиального, одномерного знакового и 3-мерного представления несобственной группой тетраэдра имеется ещё одно трёхмерное представление собственной группой куба, а также двумерное представление группой треугольника, возникающее из факторизации $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $D_2 \subset S_4$. Равенство $2\cdot 1^2 + 2\cdot 3^2 + 2^2 = 24$ указывает на то, что это хорошие кандидаты на полный список неприводимых представлений.

Упражнение 5.21. Покажите, что все 5 представлений действительно неприводимы, причём два трёхмерных представления не изоморфны и получаются одно из

[1] при $n = 2$ оно совпадает со знаковым

другого тензорным умножением на знаковое представление. После этого разложите в сумму неприводимых S_4-модулей представления группы вращений куба в пространстве функций на множестве его а) вершин б) рёбер в) граней.

5.6. Представления Шура полной линейной группы. Пусть $\Bbbk$ — произвольное поле характеристики нуль, а V ненулевое конечномерное векторное пространство над $\Bbbk$. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. Изотипное разложение этого представления

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(S_n)} W_\lambda \tag{5-22}$$

называется разложением по *типам симметрии* тензоров. Про тензоры, лежащие в изотипной компоненте W_λ, говорят, что они имеют тип симметрии λ.

Пример 5.5 (квадратичные и кубические тензоры)
Два неприводимых представления группы $S_2 \simeq \mathbb{Z}/(2)$ задают разложение тензорного квадрата $V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Skew}^2(V)$. Группа S_2 действует на первом слагаемом тривиально, на втором — знакопеременно. Трём неприводимым представлениям S_3: тривиальному, знаковому и группой треугольника отвечает разложение

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3(V) \oplus \mathrm{Skew}^3(V) \oplus W_\Delta\,, \tag{5-23}$$

компоненты которого являются образами S_3-инвариантных проекторов sym_3, alt_3 и π_Δ из прим. 5.4. Пространство неподвижных тензоров последнего

$$W_\Delta = \{t \in V^{\otimes 3} \mid t + \tau t + \tau^2 t = 0\}$$

состоит из всех кубических тензоров, которые аннулируются усреднением по 3-циклу. Такие тензоры называются *лиевскими*[1], а соотношение $t+\tau t+\tau^2 t = 0$, которому они удовлетворяют, называется *тождеством Якоби*. S_3-орбита каждого лиевского тензора порождает в $V^{\otimes 3}$ двумерное векторное пространство, на котором S_3 действует как группа треугольника. Примером лиевского тензора служит

$$[u,[u,w]] = u \otimes u \otimes w - 2\,u \otimes w \otimes u + w \otimes u \otimes u\,,$$

где $u, w \in V$ — линейно независимые векторы, а $[a,b] \overset{\text{def}}{=} a \otimes b - b \otimes a$ обозначает коммутатор в тензорной алгебре $T(V)$.

Упражнение 5.22. Покажите, что подпространство $W_\Delta \subset V^{\otimes 3}$ является линейной оболочкой всех кубических тензоров, которые можно получить из векторов пространства V при помощи бинарной операции взятия коммутатора в $T(V)$.

[1] в честь норвежского математика Софуса Ли

5.6.1. Действие $\mathrm{GL}(V)\times S_n$ на $V^{\otimes n}$. Гомоморфизм групп $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}\left(V^{\otimes n}\right)$, переводящий $f \in \mathrm{GL}(V)$ в $f^{\otimes n}$, задаёт представление полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ в пространстве $V^{\otimes n}$, в котором оператор $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует на разложимые тензоры по правилу $f : v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto fv_1 \otimes fv_2 \otimes \cdots \otimes fv_n$. Так как это действие перестановочно с действием симметрической группы, на пространстве $V^{\otimes n}$ имеется структура модуля над прямым произведением $\mathrm{GL}(V)\times S_n$: пара $f\times g \in \mathrm{GL}(V)\times S_n$ действует как $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f\left(v_{g(1)}\right) \otimes f\left(v_{g(2)}\right) \otimes \cdots \otimes f\left(v_{g(n)}\right)$. Будучи перестановочными с S_n, операторы из $\mathrm{GL}(V)$ переводят в себя каждую изотипную компоненту разложения $V^{\otimes n} = \bigoplus W_\lambda$ по типам симметрии тензоров. Поэтому каждое пространство W_λ тоже является модулем над $\mathrm{GL}(V)\times S_n$.

Для каждого неприводимого S_n-модуля U_λ на тензорном произведении

$$\mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right) \otimes U_\lambda$$

также есть структура $\mathrm{GL}(V)\times S_n$-модуля с действием $f\times g : \varphi \otimes u \mapsto (f^{\otimes n} \circ \varphi) \otimes (gu)$. Согласно предл. 5.3 свёртка $\varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)$ задаёт S_n-инвариантный изоморфизм[1]

$$c : \mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right) \otimes U_\lambda \xrightarrow{\sim} W_\lambda. \tag{5-24}$$

Очевидно, что он перестановочен с действием $\mathrm{GL}(V)\times S_n$. Пространство

$$\mathbb{S}^\lambda V \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right) \tag{5-25}$$

с действием $\mathrm{GL}(V)$ по правилу $f : \varphi \mapsto f^{\otimes n} \circ \varphi$ называется *модулем Шура* над полной линейной группой $\mathrm{GL}(V)$.

Лемма 5.4
Линейная оболочка операторов вида $f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{GL}(V)$ совпадает с централизатором $\mathrm{End}_{S_n}\left(V^{\otimes n}\right)$ действия S_n на $V^{\otimes n}$.

Доказательство. Цепочка канонических изоморфизмов $\mathrm{End}(V^{\otimes n}) \simeq V^{\otimes n *} \otimes V^{\otimes n} \simeq V^{*\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \simeq (V^* \otimes V)^{\otimes n} \simeq \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$ отождествляет подалгебру $\mathrm{End}_{S_n}\left(V^{\otimes n}\right) \subset \subset \mathrm{End}\left(V^{\otimes n}\right)$ с подпространством симметрических тензоров

$$\mathrm{Sym}^n\big(\mathrm{End}(V)\big) \subset \mathrm{End}(V)^{\otimes n},$$

которое линейно порождается тензорами вида $f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{End}(V)$ в силу упр. 5.23 ниже. Утверждение леммы вытекает отсюда по упр. 5.24. □

Упражнение 5.23 (принцип Аронгольда). Покажите, что для любого конечномерного векторного пространства W над произвольным бесконечным полем пространство симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n(W) \subset W^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами вида $w^{\otimes n} = w \otimes w \otimes \cdots \otimes w$.

[1]строго говоря, предл. 5.3 утверждает это над алгебраически замкнутым полем, однако мы увидим ниже, что все комплексные неприводимые представления S_n определены над $\mathbb{Q}$, так что для симметрических групп предл. 5.3 справедливо над $\mathbb{Q}$

Упражнение 5.24. Покажите, что линейная оболочка тензоров $f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{End}(V)$ совпадает с линейной оболочкой тензоров $f^{\otimes n}$ с $f \in \mathrm{GL}(V)$.

Предложение 5.5
Все $\mathrm{GL}(V)$-модули Шура $\mathbb{S}^\lambda V = \mathrm{Hom}_{S_n}\left(U_\lambda, V^{\otimes n}\right)$ неприводимы.

Доказательство. Канонический изоморфизм $\mathbb{S}^\lambda V \otimes U_\lambda \xrightarrow{\sim} W_\lambda$ из формулы (5-24) переводит действие S_n на W_λ в действие $g : \varphi \otimes u \mapsto \varphi \otimes (gu)$. Любой оператор $F \in \mathrm{End}(\mathbb{S}^\lambda V)$ задаёт линейное преобразование $F : \varphi \otimes u \mapsto F(\varphi) \otimes u$ пространства $\mathbb{S}^\lambda V \otimes U_\lambda$, перестановочное с действием S_n. По лем. 5.4 оно лежит в линейной оболочке операторов $f : \varphi \otimes u \mapsto \left(f^{\otimes n} \circ \varphi\right) \otimes u$. Следовательно, образ представления Шура $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}\left(\mathbb{S}^\lambda V\right)$ линейно порождает всю алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}\left(\mathbb{S}^\lambda V\right)$ пространства $\mathbb{S}^\lambda(V)$. По упр. 5.7 такое представление неприводимо. □

5.6.2. Соответствие Шура – Вейля. Соответствие $U_\lambda \leftrightarrow \mathbb{S}^\lambda V$ между неприводимыми представлениями симметрических групп[1] и представлениями полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ называется *соответствием Шура – Вейля*. Тривиальному одномерному представлению группы S_n при этом отвечает представление $\mathrm{GL}(V)$ на пространстве $S^n V$, а одномерному знаковому представлению — представление $\mathrm{GL}(V)$ на пространстве $\Lambda^n V$. Можно показать, что ненулевые $\mathrm{GL}(V)$-модули $\mathbb{S}^\lambda V$ не изоморфны друг другу при разных λ и с точностью до тензорных умножений на одномерные представления $\det^m : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$, в которых $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует умножением на $\det^m(f)$ с фиксированным $m \in \mathbb{Z}$, исчерпывают все такие конечномерные неприводимые представления $\varrho : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$, что элементы матрицы $\varrho(f)$ являются рациональными функциями элементов матрицы f.

[1] обратите внимание, что количество клеток n в диаграмме λ никак не связано с размерностью пространства V и может быть любым, однако некоторые пространства $\mathbb{S}^\lambda V$ при этом могут оказаться нулевыми, как это происходит, к примеру, с внешними степенями $\Lambda^n V$ при $n > \dim V$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 5.2. При $m \geqslant 2$ классы многочленов, делящихся на p, составляют собственный подмодуль в $\Bbbk[t]/(p^m)$. При $m = 1$ фактор кольцо $\Bbbk[t]/(p)$ является полем, т. е. для любого ненулевого класса $[g] \in \Bbbk[t]/(p)$ существует такой многочлен $h \in \Bbbk[t]$, что $h \cdot [g] = [1]$. Поэтому любой класс $[f] \in \Bbbk[t]/(p)$ получается из класса $[g]$ применением оператора $h(t) \cdot f(t)$.

Упр. 5.3. Диагональный оператор с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ аннулируется многочленом $\prod(t-\lambda_i)$. Наоборот, поскольку многочлен, аннулирующий модуль (5-4), делится на максимальную степень каждого элементарного делителя, все элементарные делители имеют вид $t - \lambda$ и входят в разложение (5-4) только в первых степенях, что и означает диагонализуемость оператора умножения на t.

Упр. 5.4. Включения $R \ker f \subset \ker f$ и $R \operatorname{im} f \subset \operatorname{im} f$ проверяются так: если $\varphi(v) = 0$, то $\varphi(fv) = f\varphi(v) = f(0) = 0$ для всех $f \in R$; если $v = \varphi(u)$, то $fv = f\varphi(u) = \varphi(fu)$ для всех $g \in R$.

Упр. 5.7. Для любых векторов $v, w \in V$ рассмотрим произвольный оператор $\varphi : V \to V$ переводящий v в w. Так как $\varphi = \sum \lambda_i f_i$ с $\lambda_i \in \Bbbk$ и $f_i \in R$, вектор $w = \varphi(v) = \sum \lambda_i f_i(w)$ лежит в линейной оболочке R-орбиты вектора v.

Упр. 5.10. Поскольку правило $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$ линейно по φ, его достаточно проверять только на разложимых $\varphi = \xi \otimes w$ с $\xi \in U^*$, $w \in W$. По определению

$$\varrho^* \otimes \lambda(g) : \xi \otimes w \mapsto \varrho(g^{-1})^* \xi \otimes \lambda(g) w = (\xi \circ g^{-1}) \otimes (gw) .$$

Этот оператор переводит $u \in U$ в $\xi(g^{-1}u) \cdot gw = g\left(\xi(g^{-1}u) \cdot w\right) = g \circ (\xi \otimes w) \circ g^{-1}(u)$.

Упр. 5.13. От противного. Рассмотрим линейную зависимость $\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \dots + \lambda_n\psi_n = 0$, содержащую минимальное возможное число слагаемых, и какой-нибудь $h \in G$, для которого $\psi_1(h) \neq \psi_2(h)$. Поскольку $\forall\, g \in G$ выполняется равенство $\sum_i \lambda_i \psi_i(h)\psi_i(g) = \sum_i \lambda_i \psi_i(hg) = 0$, мы получаем ещё одну линейную зависимость между ψ_i с коэффициентами $\lambda_i \cdot \psi_i(h)$. Деля все её коэффициенты на $\psi_1(h)$ и вычитая из первой зависимости, получаем линейную зависимость между ψ_i с нулевым коэффициентом при ψ_1 и ненулевым коэффициентом при ψ_2. Она нетривиальна и содержит меньше слагаемых. Противоречие.

Упр. 5.23. Достаточно показать, что никакая ненулевая линейная форма $\varphi \in \operatorname{Sym}^n(W)^*$ не зануляется на всех тензорах $w^{\otimes n}$. Зафиксируем в W базис $e_1, e_2, \dots, e_d$. Пусть $w = \sum x_i e_i$, а φ переводит стандартный базисный вектор $e_{[m_1 m_2 \dots m_d]} \in \operatorname{Sym}^n(W)$ в число $a_{m_1 m_2 \dots m_d} \in \Bbbk$. Тогда $\varphi\left(w^{\otimes n}\right) = \sum\limits_{m_1 m_2 \dots m_d} a_{m_1 m_2 \dots m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}$. Над бесконечным полем $\Bbbk$ такой многочлен тогда и только тогда является тождественно нулевой функцией от $x_1, x_2, \dots, x_n$, когда все его коэффициенты $a_{m_1 m_2 \dots m_d} = 0$.