§2. Тензорная алгебра

2.1. Тензорные степени векторного пространства. Тензорное произведение n экземпляров векторного пространства V с собой $V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ называется n-той *тензорной степенью* пространства V. Мы полагаем $V^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk$ и $V^{\otimes 1} \stackrel{\text{def}}{=} V$. Тензорное умножение векторов задаёт на бесконечной прямой сумме

$$TV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}$$

структуру ассоциативной (некоммутативной) градуированной алгебры. Фиксация в пространстве V какого-либо базиса $e_1, e_2, \dots, e_d$ отождествляет эту алгебру с алгеброй многочленов от d некоммутирующих друг с другом переменных e_ν: тензорные мономы $e_{\nu_1} \otimes e_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_m}$ составят базис векторного пространства TV над $\Bbbk$, а их перемножение будет заключаться в приписывании друг к другу через значок $\otimes$. Компонента $V^{\otimes n} \subset TV$ при такой интерпретации становится пространством однородных тензорных многочленов степени n.

Алгебра TV называется *тензорной алгеброй* пространства V. Это *свободная ассоциативая $\Bbbk$-алгебра*, порожденная пространством V, в том смысле, что вложение

$$\iota : V \hookrightarrow TV \tag{2-1}$$

в качестве подпространства $V^{\otimes 1}$ обладает универсальным свойством, аналогичным универсальному свойству базиса свободного модуля. А именно, для любой ассоциативной $\Bbbk$-алгебры A и любого $\Bbbk$-линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\alpha : TV \to A$ такой, что $f = \alpha \circ \iota$. Иными словами, гомоморфизмы алгебр $TV \to A$ биективно соответствуют линейным отображениям $V \to A$.

Упражнение 2.1. Проверьте это и убедитесь, что алгебра TV вместе с вложением (2-1) определяется этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с ι.

Предложение 2.1

Для конечномерного пространства V *полная свертка*, сопоставляющая паре разложимых тензоров $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ число

$$\langle\, v\,,\, \xi \,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i) \in \Bbbk\,, \tag{2-2}$$

является невырожденным спариванием между $V^{\otimes n}$ и $\left(V^*\right)^{\otimes n}$ и задаёт изоморфизм

$$\left(V^{\otimes n}\right)^* \simeq \left(V^*\right)^{\otimes n} \tag{2-3}$$

Доказательство. Поскольку правая часть (2-2) полилинейна по каждому v_i и ξ_i, правило $v \mapsto \langle\, v\,,\, \xi\,\rangle$ корректно задаёт линейный функционал $V^{\otimes n} \to \Bbbk$. Так как он полилинейно зависит от каждого ξ_i, сопоставление такого функционала разложимому тензору $\xi \in V^{*\otimes n}$ корректно задаёт линейное отображение $V^{*\otimes n} \to \left(V^{\otimes n}\right)^*$. Конечномерность V существенна для проверки его биективности: выбирая двойственные базисы $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$, видим, что отвечающие им базисы из тензорных мономов $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}$ и $x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \cdots \otimes x_{j_s}$ тоже двойственны. □

Следствие 2.1
Сопоставление разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ полилинейной формы $V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$, $(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)$, задаёт для любого конечномерного пространства V канонический изоморфизм

$$\left(V^*\right)^{\otimes n} \simeq \mathrm{Hom}(V, \dots, V; \Bbbk). \tag{2-4}$$

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения $V^{\otimes n}$ пространство $\left(V^{\otimes n}\right)^*$ линейных отображений $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ изоморфно пространству n-линейных форм $V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$. Остаётся взять композицию этого изоморфизма с изоморфизмом (2-3). □

2.1.1. Частичные свертки. Фиксируем пару инъективных не обязательно монотонных отображений $\{1, 2, \dots, p\} \xleftarrow{I} \{1, 2, \dots, m\} \xrightarrow{J} \{1, 2, \dots, q\}$ и положим $i_\nu = I(\nu)$, $j_\nu = J(\nu)$, так что $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ являются словами одинаковой длины, состоящими из неповторяющихся в пределах каждого слова индексов. Линейный оператор, который для каждого $\nu = 1, 2, \dots, m$ сворачивает i_ν-тый сомножитель в $V^{*\otimes p}$ с j_ν-тым сомножителем в $V^{\otimes q}$, а все остальные тензорные сомножители оставляет в первоначальном порядке:

$$\begin{gathered} c^I_J : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)}, \\ \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \mapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \big(\bigotimes_{i \notin I} \xi_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{j \notin J} v_j\big), \end{gathered} \tag{2-5}$$

называется *частичной сверткой* по индексам I и J. Отметим, что разные отображения I и J приводят к *разным* отображениям свёртки.

Пример 2.1 (свертка вектора с полилинейной формой)
Интерпретируем n-линейную форму $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ как тензор из $V^{*\otimes n}$ посредством изоморфизма из сл. 2.1. Свёртка этого тензора по первому тензорному сомножителю с произвольно выбранным вектором $v \in V$ лежит в $V^{*\otimes(n-1)}$ и является таким образом $(n-1)$-линейной формой на V, которая получается из исходной формы φ фиксацией вектора v в качестве первого аргумента.

Упражнение 2.2. Убедитесь в этом.

Она называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $v \llcorner \varphi$ или $i_v\varphi$. Итак, $i_v\varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$.

2.1.2. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ пересечение всех таких векторных подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$, называется *линейным носителем* тензора t и обозначается $\mathrm{Supp}(t) \subset V$. Иначе его можно охарактеризовать как наименьшее по включению подпространство $U \subset V$, такое что $t \in U^{\otimes n}$, или как наименьшее по размерности подпространство с таким свойством. Тождественность этих описаний вытекает из того, что включения $t \in U^{\otimes n}$ и $t \in W^{\otimes n}$ для некоторых подпространств $U, W \subset V$ влекут включение $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$, в чём легко убедиться, раскладывая t по базису из тензорных мономов, происходящему из такого базиса

$$e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s$$

пространства V, в котором e_i образуют базис в $U \cap W$, u_j и w_k дополняют его до базисов в U и W соответственно, а v_m дополняют объединение всех этих векторов до базиса в V: условие $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ означает, что в t входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме e_i.

2.1.3. Ранг тензора $t \in V^{\otimes n}$ определяется как размерность его линейного носителя: $\mathrm{rk}\, t \overset{\text{def}}{=} \dim \mathrm{Supp}(t)$. Тензор t с $\mathrm{Supp}(t) \subsetneq V$ называется *вырожденным*. Говоря неформально, такой t эффективно зависит от меньшего числа «координат», чем имеется в V, т. е. существует линейная замена базиса, уничтожающая в многочлене t часть переменных. Например, если $\dim \mathrm{Supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторого $c \in \Bbbk$ и $v \in V$, порождающего $\mathrm{Supp}(t)$.

2.1.4. Линейные порождающие носителя. Для нахождения ранга данного тензора t желательно иметь явное описание его носителя как линейной оболочки эффективно вычислимого по t конечного набора векторов. Такое описание даётся в терминах свёрток. Для каждой (не обязательно монотонной) последовательности $J = j_1 j_2 \dots j_{n-1}$ из $n-1$ неповторяющихся индексов $1 \leqslant j_\nu \leqslant n$ обозначим через

$$c_t^J : V^{*\otimes(n-1)} \to V, \quad \xi \mapsto c^{1,2,\dots,(n-1)}_{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}}(\xi \otimes t) \tag{2-6}$$

полную свёртку с тензором t, вычисляющую ν-й сомножитель в $V^{*\otimes(n-1)}$ на j_ν-том сомножителе t для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$. Результатом такой свёртки является линейная комбинация векторов, стоящих в том тензорном сомножителе тензора t, номер которого не содержится в последовательности J. Очевидно, что эта линейная комбинация лежит в $\mathrm{Supp}(t)$.

Теорема 2.1
Пространство $\mathrm{Supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (2-6).

Доказательство. Пусть $\mathrm{Supp}(t) = W$. Чтобы убедиться в том, что образы свёрток (2-6) линейно порождают W, достаточно доказать, что каждая линейная форма $\xi \in V^*$, которая аннулирует все подпространства $\mathrm{im}\left(c_t^I\right)$, аннулирует и подпространство W. Предположим противное: пусть $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует все $c_t^J\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$. Выберем в V^* такой базис $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, чтобы $\xi_1 = \xi$ и ограничения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ на W составляли базис в W^*. Обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_k$ двойственный базис в W и разложим t по этому базису. Значение

$$\xi\left(c_t^I\left(\xi_{\nu_1} \otimes \xi_{\nu_2} \otimes \dots \otimes \xi_{\nu_{n-1}}\right)\right)$$

представляет собою полную свёртку тензора t с базисным тензорным мономом

$$\xi_1 \otimes \xi_{\nu_1} \otimes \xi_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{\nu_{n-1}}$$

по всем n сомножителям в том порядке, что предписан последовательностью J, и равно коэффициенту при соответствующем двойственном мономе в разложении t по базисным тензорным мономам. Выбирая надлежащие J, мы можем таким образом получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе из разложения t. Значит, все они нулевые, и w_1 не входит в $\mathrm{Supp}(t)$, что противоречит его выбору. □

2.2. Симметрические и внешние степени. Полилинейное отображение

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to U \tag{2-7}$$

называется *симметричным*, если при перестановках аргументов оно не изменяет своего значения, и *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение, когда какие-то два из аргументов совпадают.

Упражнение 2.3. Покажите, что значение кососимметричного полилинейного отображения изменяет знак при перестановке любых двух аргументов, а над полем характеристики $\neq 2$ этого условия также и достаточно для кососимметричности.

Симметричные и кососимметричные полилинейные отображения (2-7) составляют в векторном пространстве всех полилинейных отображений $\mathrm{Hom}(V, \dots, V; U)$ подпространства, которые мы будем обозначать, соответственно, через

$$\mathrm{Sym}^n(V, U) \subset \mathrm{Hom}(V, \dots, V; U) \quad \text{и} \quad \mathrm{Skew}^n(V, U) \subset \mathrm{Hom}(V, \dots, V; U)\,.$$

Взятие композиции фиксированного (косо) симметричного отображения

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to U$$

с линейными операторами $F : U \to W$ задаёт линейное отображения $F \mapsto F \circ \varphi$ из пространства $\mathrm{Hom}(U, W)$ в в пространства $\mathrm{Sym}^n(V, W)$ и $\mathrm{Skew}^n(V, W)$ соответственно. Если для всех W это отображение — изоморфизм, (косо)симметричное полилинейное отображение φ называется *универсальным*. Универсальное симметричное полилинейное отображение обозначается

$$\sigma : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to S^n V \tag{2-8}$$

и называется *коммутативным произведением* векторов, а модуль $S^n V$, куда оно действует, называется n-той *симметрической степенью* модуля V . Произведение

$$\sigma(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

обычно обозначается через $v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n$ или просто $v_1 v_2 \dots v_n$. Универсальное кососимметричное полилинейное отображение обозначается

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to \Lambda^n V \tag{2-9}$$

и называется *внешним* (или *суперкоммутативным*) произведением векторов, а модуль $\Lambda^n V$, куда оно действует, называется n-той *внешней степенью* модуля V. Произведение $\alpha(v_1, v_2, \dots, v_n)$ принято обозначать через $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$.

Упражнение 2.4. Покажите, что $S^n V$ и $\Lambda^n V$ (если они существуют) единственны с точностью до единственного изоморфизма, коммутирующего с (супер) коммутативным умножением.

Модули $S^n V$ и $\Lambda^n V$ строятся как фактор модули $V^{\otimes n}$ по соотношениям (анти) коммутирования. Удобно сделать это одновременно для всех n, рассмотрев факторы свободной ассоциативной алгебры пространства V по надлежащим идеалам.

2.2.1. Симметрическая алгебра пространства V. Рассмотрим в тензорной алгебре TV пространства V двусторонний идеал $\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} \subset TV$, порождённый линейным подпространством в $V \otimes V$, натянутым на всевозможные разности

$$u \otimes w - w \otimes u\,. \tag{2-10}$$

Он состоит из конечных линейных комбинаций всевозможных тензоров, которые можно получить из тензоров (2-10), умножая их слева и справа (или одновременно и слева и справа) на любые элементы тензорной алгебры. Пересечение этого идеала с однородной компонентой $V^{\otimes n}$ представляет собою линейную оболочку всевозможных разностей разложимых тензоров вида

$$(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) - (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots) \tag{2-11}$$

(обозначенные многоточиями фрагменты не меняются), а весь идеал является прямой сумой таких однородных компонент:

$$\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \left(\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} \cap V^{\otimes n}\right)\,.$$

Фактор алгебра $SV \stackrel{\text{def}}{=} TV/\mathcal{I}_{\mathrm{sym}}$ называется *симметрической алгеброй* векторного пространства V, а индуцированное в ней умножение называется *симметрическим умножением* и обозначается точкой (которую принято опускать). Симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент:

$$SV = \bigoplus_{n \geqslant 0} S^n V\,, \quad \text{где} \quad S^n V \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} \cap V^{\otimes n})\,.$$

Выбор базиса $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ отождествляет алгебру SV с алгеброй $\Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_d]$ обычных коммутативных многочленов от базисных векторов e_i, а подпространство $S^n V \subset \Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_d]$ — с пространством однородных многочленов степени n.

Упражнение 2.5. Найдите $\dim S^n V$.

Предложение 2.2

Композиция тензорного умножения с факторизацией по $\mathcal{I}_{\mathrm{sym}}$:

$$\sigma : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} S^n(V) \tag{2-12}$$

является универсальной симметрической полилинейной формой (т. е. коммутативным умножением (2-8)).

Доказательство. Любое полилинейное отображение $\varphi : V \times V \times \dots \times V \to W$ единственным образом разлагается в композицию $\varphi = F \circ \tau$, где $F : V^{\otimes n} \to W$ линейно. При этом F пропускается через π тогда и только тогда, когда

$$F(\dots \otimes v \otimes w \otimes \dots) = F(\dots \otimes w \otimes v \otimes \dots),$$

что равносильно тому что $\varphi(\dots, v, w, \dots) = \varphi(\dots, w, v, \dots)$. □

Упражнение 2.6. Убедитесь, что SV является *свободной коммутативной алгеброй*, порождённой V, в том смысле, что для любой коммутативной $\Bbbk$-алгебры A и любого линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\tilde{f} : SV \to A$ такой, что $f = \widetilde{\varphi} \circ \iota$, где $\iota : V \hookrightarrow SV$ вкладывает V в SV в качестве многочленов первой степени. Проверьте также, что SV и ι определяются этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с ι.

2.2.2. Внешняя алгебра пространства V определяется как фактор алгебра

$$\Lambda V \overset{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\text{skew}}$$

свободной ассоциативной алгебры TV по двустороннему идеалу $\mathcal{I}_{\text{skew}} \subset TV$, порожденному всеми тензорами вида

$$v \otimes v \in V \otimes V. \tag{2-13}$$

Упражнение 2.7. Покажите, что подпространство $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes 2}$ содержит все суммы

$$v \otimes w + w \otimes v \quad (\text{с любыми } v, w \in V),$$

и если $1 + 1$ обратимо в K, то $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes 2}$ линейно порождается такими суммами.

Как и в симметричном случае, идеал $\mathcal{I}_{\text{skew}}$ является прямой суммой своих однородных компонент

$$\mathcal{I}_{\text{skew}} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \left(\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}\right)$$

и его компонента n-той степени $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$ является линейной оболочкой разложимых тензоров вида $(\dots \otimes v \otimes v \otimes \dots)$ и по упр. 2.7 содержит все суммы вида

$$(\dots \otimes v \otimes w \otimes \dots) + (\dots \otimes w \otimes v \otimes \dots). \tag{2-14}$$

Фактор алгебра ΛV называется *внешней* (или *грассмановой*) алгеброй пространства V. Как и симметрическая алгебра, она является прямой суммой подпространств

$$\Lambda^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}).$$

Упражнение 2.8. Докажите, что композиция тензорного умножения с факторизацией по идеалу $\mathcal{I}_{\text{skew}}$

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \Lambda^n(V) \tag{2-15}$$

является универсальным кососимметричным полилинейным отображением (2-9). Индуцированное умножение в алгебре ΛV называется *внешним* (а также *суперкоммутативным* или *грассмановым*) и обозначается $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$. Согласно упр. 2.7 оно меняет знак при перестановке любых двух последовательных сомножителей, и стало быть, при произвольной перестановке сомножителей внешнее произведение умножается на знак перестановки.

Выбор базиса $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ отождествляет внешнюю алгебру ΛV с алгеброй *грассмановых многочленов* $\Bbbk\langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$ от базисных векторов e_i. Поскольку

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i\,,$$

каждый грассманов моном степени n линеен по всем входящим в него переменным и с точностью до знака записывается произведением

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n \leqslant d\,. \tag{2-16}$$

Лемма 2.1

Мономы (2-16), индекс $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ которых пробегает все строго возрастающие n-элементные последовательности в $\{1, 2, \dots, d\}$, составляют базис пространства $\Lambda^n V$. В частности, $\Lambda^n V = 0$ при $n > \dim V$ и

$$\dim \Lambda^n V = \binom{\dim V}{n}, \quad \dim \Lambda V = 2^{\dim V}\,.$$

Доказательство. Рассмотрим $\binom{d}{n}$-мерное векторное пространство U, базис которого состоит из символов ξ_I, и зададим кососимметричное полилинейное отображение

$$\alpha : V \times V \times \dots \times V \to U$$

правилом $(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \xi_I$, где $I = (j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, \dots, j_{\sigma(n)})$ — это единственная *возрастающая* перестановка индексов $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Оно универсально, поскольку для любого кососимметричного полилинейного $\varphi : V \times V \times \dots \times V \to W$ правило $F(\alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})) \overset{\text{def}}{=} \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})$ корректно определяет единственно возможный линейный оператор $F : U \to W$ такой, что $\varphi = F \circ \alpha$. Тем самым, имеется канонический изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} \Lambda^n V$, переводящий ξ_I в $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = e_I$. □

2.3. Симметрические и кососимметрические тензоры. Начиная с этого места и до конца параграфа мы будем заниматься конечномерными векторными пространствами над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$.

Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. А именно, для каждого $g \in S_n$ положим

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \dots \otimes v_{g(n)}\,. \tag{2-17}$$

Поскольку правая часть полилинейно зависит от $v_1, v_2, \dots, v_n$, эта формул корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$.

Определение 2.1

Подпространства $\operatorname{Sym}^n V \overset{\text{def}}{=} \{ t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = t \quad \forall\, g \in S_n \}$ и $\operatorname{Skew}^n V \overset{\text{def}}{=} \{ t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = \operatorname{sgn}(g) \cdot t \quad \forall\, g \in S_n \}$ в тензорной степени $V^{\otimes n}$ называются, соответственно, пространствами *симметричных* и *кососимметричных* тензоров.

2.3.1. Симметризация и альтернирование. Над полем характеристики нуль операторы *симметризации* и *альтернирования*

$$\mathrm{sym}_n(t) = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} g(t) \ : \quad V^{\otimes n} \to \mathrm{Sym}^n(V) \tag{2-18}$$

$$\mathrm{alt}_n(t) = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\cdot g(t) \ : \quad V^{\otimes n} \to \mathrm{Skew}^n(V) \tag{2-19}$$

являются проекторами n-той тензорной степени $V^{\otimes n}$ на подпространства симметрических и кососимметрических тензоров соответственно.

Упражнение 2.9. Докажите для любых $t \in V^{\otimes n}$, $s \in \mathrm{Sym}^n(V)$ и $a \in \mathrm{Skew}^n(V)$ при всех $n \geqslant 2$ соотношения а) $\mathrm{sym}_n(t) \in \mathrm{Sym}^n(V)$ б) $\mathrm{alt}_n(t) \in \mathrm{Skew}^n(V)$ в) $\mathrm{sym}_n(s) = s$ г) $\mathrm{alt}_n(a) = a$ д) $\mathrm{sym}_n(a) = \mathrm{alt}_n(s) = 0$.

Пример 2.2 (разложение тензорного квадрата)
При $n = 2$ симметризация и альтернирование доставляют прямое разложение

$$V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Skew}^2(V)\,. \tag{2-20}$$

В самом деле, поскольку каждый разложимый тензор представляется в виде суммы

$$u\otimes w = \frac{u\otimes w + w\otimes u}{2} + \frac{u\otimes w - w\otimes u}{2} = \mathrm{sym}_2(u\otimes w) + \mathrm{alt}_2(u\otimes w)\,,$$

образы проекторов sym_2 и alt_2 порождают $V^{\otimes 2}$, а т. к. каждый из них по упр. 2.9 аннулирует образ другого, эти образы имеют нулевое пересечение. Если интерпретировать $V^{\otimes 2}$ как пространство билинейных форм на V^*, разложение (2-20) будет ни чем иным, как каноническим разложением билинейной формы в сумму симметрической и кососимметрической.

Пример 2.3 (разложение тензорного куба)
Сравнение размерностей показывает, что при $n = 3$ тензор общего вида *не* является суммой своей симметризации и альтернирования. Чтобы найти в пространстве $V^{\otimes 3}$ дополнительное к $\mathrm{Sym}^3(V) \oplus \mathrm{Skew}^3(V)$ подпространство, рассмотрим разность

$$p = E - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = \left(2\,E - T - T^2\right)/\,3\,, \tag{2-21}$$

где через $T : V^{\otimes 3} \to V^{\otimes 3}$ обозначен оператор, отвечающий циклической перестановке $|123\rangle \in S_3$, а через $E = T^3$ — тождественный оператор. Поскольку

$$p^2 = \left(4E + T^2 + T - 4\,T - 4\,T^2 + 2\,E\right)/\,9 = \left(2E - T - T^2\right)/\,3 = p\,,$$

оператор p является проектором.

Упражнение 2.10. Покажите, что:
а) $p\circ\mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3\circ p = p\circ\mathrm{sym}_3 = \mathrm{sym}_3\circ p = 0$ и выведите отсюда, что $V^{\otimes 3}$ является прямой суммой $\mathrm{Sym}^3(V)$, $\mathrm{Skew}^3(V)$ и $\mathrm{im}(p)$
б) $\mathrm{im}(p)$ состоит из 3-линейных форм $\varphi : V^*\times V^*\times V^* \to \Bbbk$, удовлетворяющих

$\forall\, \xi,\eta,\zeta \in V^*$ *тождеству Якоби* $\varphi(\xi,\eta,\zeta)+\varphi(\eta,\zeta,\xi)+\varphi(\zeta,\xi,\eta)=0$, и приведите явный пример такой формы на двумерном пространстве V^* .

При больших n разложение $V^{\otimes n}$ в прямую сумму подпространств тензоров с различными «типами симметрии» становится более сложным и является предметом теории представлений симметрических групп.

2.3.2. Стандартные базисы. В записи симметричного тензора $t \in \mathrm{Sym}^n V$ в виде некоммутативнго многочлена от элементов какого-либо базиса $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$, все тензорные мономы, составляющие одну S_n-орбиту, войдут с одним и тем же коэффициентом, зависящим только от орбиты. Поэтому в качестве базиса пространства $\mathrm{Sym}^n V$ можно взять *полные симметрические тензоры*

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} \overset{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c}\text{сумма всех различных тензорных мономов, состоящих из}\\ m_1 \text{ множителей } e_1,\, m_2 \text{ множителей } e_2,\, \dots,\, m_d \text{ множителей } e_d\end{array}\right) \tag{2-22}$$

занумерованные всевозможными наборами $(m_1, m_2, \dots, m_d)$ целых чисел $0 \leqslant m_\nu \leqslant d$ с сумой $\sum_\nu m_\nu = n$.

Упражнение 2.11. Удостоверьтесь, что сумма в правой части (2-22) состоит из

$$\frac{n!}{m_1!\; m_2!\; \cdots\; m_d!}$$

попарно различных слагаемых.

Аналогично, базис в $\mathrm{Skew}^n V$ образуют *полные кососимметрические тензоры*

$$e_I = e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_n\rangle} \overset{\text{def}}{=} \sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\cdot e_{i_{g(1)}} \otimes e_{i_{g(2)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{g(n)}} \tag{2-23}$$

занумерованные строго возрастающими последовательностями $I = i_1 i_2 \dots i_n$ натуральных чисел $1 \leqslant i_\nu \leqslant d$.

Предложение 2.3

Если $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$, то ограничение симметрического умножения[1] $V^{\otimes n} \to S^n V$ на подпространство симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и ограничение внешнего умножения[2] $V^{\otimes n} \to \Lambda^n V$ на подпространство кососимметрических тензоров $\mathrm{Skew}^n \subset V^{\otimes n}$ являются изоморфизмами векторных пространств. Действие этих изоморфизмов на стандартные базисные мономы (2-22) и (2-23) задаётся формулами

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} \mapsto \frac{(m_1+m_2+\cdots+m_d)!}{m_1!\cdot m_2!\,\cdots\, m_d!}\cdot e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d} \tag{2-24}$$

$$e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_d\rangle} \mapsto n!\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_d} \tag{2-25}$$

Доказательство. Проекция каждого из $n!/(m_1!\,m_2!\cdots m_d!)$ слагаемых суммы (2-22) в симметрическую алгебру равна коммутативному моному $e_1^{m_1}e_2^{m_2}\dots e_d^{m_d}$, а проекция каждого из $n!$ слагаемых суммы (2-23) во внешнюю алгебру равна грассманову моному $e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$. □

[1] т. е. отображения факторизации по соотношениям коммутирования (2-11)

[2] т. е. отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования (2-14)

Предостережение 2.1. Не смотря на изоморфизмы из предл. 2.3, содержащиеся в $V^{\otimes n}$ *под*пространства $\mathrm{Sym}^n V$ и $\mathrm{Skew}^n V$ ни в коем случае не следует путать с *фактор* пространствами $S^n V$ и $\Lambda^n V$, получающимися из $V^{\otimes n}$ склейкой некоторых тензоров между собою. Над полем положительной характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) = p$ симметричные тензоры, степень которых является степенью p, и кососимметричные тензоры, степень которых больше p, *аннулируются* проекциями $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ и $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$. Даже в характеристике нуль стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств *не* отождествляются друг с другом изоморфизмами из предл. 2.3, а переходят лишь в некоторые кратности друг друга. Возникающие при этом поправочные множители необходимо учитывать как при попытке поднять на (супер) симметрические тензоры (супер) коммутативное умножение, которое имеется в симметрической и грассмановой алгебрах, так и при попытке спустить в симметрическую и внешнюю алгебры отображения свёртки, которые имеются между тензорами.

2.4. Поляризация многочленов. По предл. 2.3 над полем нулевой характеристики для любого $f \in S^n V : *$ существует единственная симметричная n-линейная форма

$$\tilde{f} : V \times V \times \dots \times V \to \Bbbk \tag{2-26}$$

которая отображается в f при факторизации $\left(V^*\right)^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V^*$. Она называется *полной поляризацией* однородного многочлена f. При $n = 2$, полная поляризация $\tilde{f}$ представляет собою поляризацию квадратичной формы до до симметричной билинейной, обсуждавшуюся в курсе линейной алгебры. Для произвольного n полная поляризация базисного монома $f = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}$ степени $\sum m_i = n$ имеет вид[1]

$$\tilde{f} = \frac{m_1!\, m_2! \cdots m_d!}{n!} \cdot x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} \,. \tag{2-27}$$

Полная поляризация произвольного многочлена вычисляется отсюда по линейности отображения $f \mapsto \tilde{f}$.

2.4.1. Значение многочлена на векторе. Каждый элемент $f \in S^n V^*$ канонически задаёт функцию $f : V \to \Bbbk$, переводящую вектор $v \in V$ в число

$$\mathrm{ev}_v(f) = f(v) \overset{\text{def}}{=} \tilde{f}(v, v, \dots, v) \in \Bbbk \,, \tag{2-28}$$

называемое *значением* многочлена $f \in S^n V^*$ на векторе $v \in V$. Если зафиксировать двойственные друг другу базисы $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_d \in V^*$ и отождествить симметрическую алгебру SV^* с алгеброй многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_d]$, значение многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на векторе $v = \sum \alpha_i e_i \in V$ будет ничем иным как результатом подстановки в f численных значений координат вектора v

$$f(v) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \,. \tag{2-29}$$

Действительно, полная свёртка (2-28) базисного симметричного тензора

$$\tilde{f} = x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]}$$

[1] см. формулу (2-24) на стр. 23

с тензором $v^{\otimes n}$ представляет собой сумму $n!/(m_1!\cdot m_2!\cdots m_d!)$ одинаковых произведений $x_1(v)^{m_1}\cdot x_2(v)^{m_2}\cdot\cdots\cdot x_d(v)^{m_d} = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\cdots\alpha_d^{m_d}$ и совпадает результатом подстановки $(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ в базисный моном

$$f = \frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdots m_d!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_d^{m_d}\,.$$

Из сказанного вытекает, что результат подстановки координат вектора $v\in V$ в многочлен $f\in S^nV^*$ зависит только от v и f, но не от выбора пары двойственных базисов в V и V^*, используемых для явной записи многочлена и вектора в координатах, и что полная поляризация $\tilde f$ однородного многочлена f однозначно характеризуется как единственная симметричная полилинейная форма от $\deg f$ аргументов, такая что $\tilde f(v,v,\dots,v)=f(v)$ для всех $v\in V$.

2.4.2. Двойственность. Полная свёртка между $V^{\otimes m}$ и $V^{*\otimes m}$ индуцирует над полем характеристики нуль невырожденное спаривание между пространствами S^mV и S^mV^*, сопоставляющее многочленам $f\in S^nV$ и $g\in S^nV^*$ полную свёртку их полных поляризаций $\tilde f\in V^{\otimes m}$ и $\tilde g\in V^{*\otimes m}$.

Упражнение 2.12. Проверьте, что ненулевые спаривания между мономами, составленными из элементов двойственных базисов пространств V и V^*, исчерпываются значениями

$$\left\langle\, e_1^{m_1}e_2^{m_2}\cdots e_d^{m_d}\,,\, x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_d^{m_d}\,\right\rangle = \frac{m_1!\cdot m_2!\cdot\cdots\cdot m_d!}{n!}\,. \tag{2-30}$$

2.4.3. Частные производные. Внутренне произведение[1] с фиксированным вектором $v\in V$ задаёт отображение $i_v : V^{*\otimes n}\to V^{*\otimes(n-1)}$. Применяя его к полной поляризации $\tilde f$ многочлена $f\in S^n(V^*)$ и затем проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1}(V^*)$, мы получаем линейное отображение $\mathrm{pl}_v : S^nV^*\to S^{n-1}V^*$, которое включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n}\supset \operatorname{Sym}^n V^* \arrow[r, "i_v"] \arrow[d] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ S^nV^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1}V^* \end{tikzcd}$$

и переводит многочлен $f(x)=\tilde f(x,x,\dots x)\in S^n(V^*)$ в билинейно зависящий от f и v многочлен $\mathrm{pl}_vf(x)\overset{\text{def}}{=}\tilde f(v,x,\dots x)\in S^{n-1}(V^*)$, называемый *полярой* v относительно f. При $n=2$ эта конструкция задаёт полярное преобразование относительно квадрики $f=0$ в $\mathbb{P}(V)$ и сопоставляет вектору v уравнение его полярной гиперплоскости.

В двойственных базисах $e_1,e_2,\dots,e_d\in V$ и $x_1,x_2,\dots,x_d\in V^*$ свёртка первого тензорного сомножителя в $V^{*\otimes n}$ с вектором $e_i\in V$ переводит базисный симметрический моном (2-22) в точно такой же базисный моном, но только содержащий (m_i-1) множителей e_i, или в нуль, если $m_i=0$. Поэтому, по формуле (2-24) из предл. 2.3

$$\mathrm{pl}_{e_i}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n}\,x_1^{m_1}\cdots x_{i-1}^{m_{i-1}}x_i^{m_i-1}x_{i+1}^{m_{i+1}}\cdots x_d^{m_d} = = \frac{1}{n}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_d^{m_d}\,.$$

[1] см. прим. 2.1 на стр. 16

Из линейности $\mathrm{pl}_v f$ по v и f мы получаем, что поляра вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно многочлена f есть делённая на $\deg f$ *производная* от f в направлении v:

$$\mathrm{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)}\,\partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} .$$

Отметим, что из предыдущего вытекает независимость правой части этой формулы от выбора двойственных координат в V и V^*, а также соотношение $\partial_u\partial_w = \partial_w\partial_u$ и замечательное равенство между кратными производными

$$m!\ \frac{\partial^m f}{\partial u^m}(w) = n!\ \tilde f(\underbrace{u,u,\ \dots\ ,u}_{m},\underbrace{w,w,\ \dots\ ,w}_{n}) = (n-m)!\ \frac{\partial^{n-m} f}{\partial w^{n-m}}(u)\,, \tag{2-31}$$

для любых $u,w \in V$, любого $f \in S^nV^*$ и любого m в пределах $0 \leqslant m \leqslant n$.

Упражнение 2.13. Докажите правило Лейбница: $\partial_v(f\cdot g) = \partial_v(f)\cdot g + f\cdot\partial_v(g)$.

2.4.4. Формула Тейлора. Поскольку полилинейная форма $\tilde f$ симметрична, её аргументы можно писать в любом порядке. Условимся писать $\tilde f(u^m, w^{n-m})$, когда какие-то m аргументов формы $\tilde f$ равны u, а остальные $(n-m)$ равны w. Дословный повтор рассуждения, использованного при раскрытии скобок в биноме $(u+w)^n$, выводит из полилинейности и симметричности формы $\tilde f$ равенство

$$\tilde f(u+w,\, u+w,\, \dots,\, u+w) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \tilde f(u^m, w^{n-m})\,, \quad \text{где} \quad n = \deg f\,.$$

Формула (2-31) позволяет переписать его как *разложение Тейлора*

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!}\,\partial_w^m f(u)\,, \tag{2-32}$$

которое представляет собою *точное равенство*, справедливое для любого многочлена $f \in S^nV^*$ и произвольных векторов $u,w \in V$. Отметим, что правая часть (2-32) симметрична по u и w в виду соотношений (2-31).

Упражнение 2.14. Докажите для любого многочлена $f \in S^nV^*$ и любых n векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ равенство $\tilde f(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dfrac{1}{n!}\,\partial_{v_1}\partial_{v_2}\ \dots\ \partial_{v_n} f$.

2.4.5. Линейный носитель многочлена $f \in S^nV^*$ определятся как минимальное подпространство $W \subset V^*$, такое что $f \in S^nW^*$, и обозначается $\mathrm{Supp}(f)$. Он совпадает с линейным носителем полной поляризации $\tilde f \in \mathrm{Sym}^n V^*$ многочлена f и по теор. 2.1 совпадает с образом отображения $V^{\otimes(n-1)} \to V^*$, задаваемого полной свёрткой[1] с $\tilde f$. Тем самым, $\mathrm{Supp}(f)$ представляет собою линейную оболочку всех $(n-1)$-кратных частных производных

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \cdots \frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}} f(x)\,, \quad \text{где} \quad \sum m_\nu = n-1\,. \tag{2-33}$$

[1] из-за симметричности тензора $\tilde f$ такая свёртка не зависит от выбора последовательности индексов J, по которым она производится

Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (2-33) даёт ровно один коэффициент многочлена f — тот, что стоит при мономе $x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i+1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d}$. Поэтому, если записать многочлен f в виде

$$f = \sum_{\nu_1+\dots+\nu_d=n} \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\, a_{\nu_1\nu_2\dots\nu_d}\, x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_d^{\nu_d}\,, \tag{2-34}$$

то линейная форма (2-33) будет иметь вид

$$n! \cdot \sum_{i=1}^{d} a_{m_1\dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1}\dots m_d} x_i\,. \tag{2-35}$$

Всего таких форм будет[1] $\binom{n+d-2}{d-1}$.

Следствие 2.2
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ однородный многочлен (2-34) тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда ранг $d\times\binom{n+d-2}{d-1}$-матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (2-35), равен единице. В этом случае форма φ, такая что $\varphi^n = f$, также пропорциональна формам (2-35).

Доказательство. Равенство $f = \varphi^n$ означает, что $\mathrm{Supp}(f)$ одномерен и порождён формой φ . В этом случае все формы (2-35) пропорциональны форме φ. Наоборот, если все формы (2-35) пропорциональны, и $\psi \neq 0$ — одна из них, то $\mathrm{Supp}(f) = \Bbbk \cdot \psi$ и $f = \lambda\psi^n$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то $f = \varphi^n$ для $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. □

Пример 2.4 (бинарные формы ранга 1)
Однородный многочлен степени n от двух переменных $f(x_0, x_1) = \sum_k a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} x_1^k$ является чистой n-той степенью $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$ линейной формы , если и только если

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1\,,$$

что равносильно выполнению квадратичных соотношений $a_i a_{j+1} = a_{i+1} a_j$ на коэффициенты a_i многочлена f. В этом случае коэффициенты линейной формы удовлетворяют при всех i соотношению $\alpha_0 a_{i+1} = a_i \alpha_1$.

2.5. Поляризация грассмановых многочленов. Каждому однородному грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V^*$ над полем характеристики нуль согласно предл. 2.3 однозначно соответствует n-линейная кососимметричная форма $\widetilde{\omega} : V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$, которая проектируется в ω при факторизации $V^{*\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$. Эта форма называется *полной поляризацией* грассманова многочлена ω. По форм. (2-25) на стр. 23 полная поляризация базисного грассманова монома $\omega = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ равна

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{n!}\, e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle} = \mathrm{alt}_n \left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \right)\,, \tag{2-36}$$

а поляризации произвольных многочленов вычисляются отсюда по линейности.

[1] количество способов разложить $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых $m_1, m_2, \dots, m_d$

2.5.1. Двойственность. Как и в симметрическом случае, над полем характеристики нуль между пространствами грассмановых многочленов $\Lambda^n V^*$ и $\Lambda^n V$ имеется каноническое невырожденное спаривание, переводящее $\omega \in \Lambda^n V^*$ и $\tau \in \Lambda^n V$ в полную свёртку $\left\langle \widetilde{\omega}\,, \tilde{\tau} \right\rangle \in \Bbbk$ их полных поляризаций $\widetilde{\omega} \in V^{*\otimes n}$ и $\tilde{\tau} \in V^{\otimes n}$.

Упражнение 2.15. Покажите, что свёртка базисных грассмановых мономов $e_I \in \Lambda^n V$ и $x_J \in \Lambda^n V^*$ от двойственных базисных векторов пространств V и V^* отлична от нуля только при[1] $I = J$ и равна в этом случае $1/n!$.

2.5.2. Частные производные в грассмановой алгебре. По аналогии с симметрическим случаем, определим *грассманову производную* кососимметричного многочлена $\omega \in \Lambda^n V^*$ в направлении вектора $v \in V$ формулой

$$\partial_v \omega \overset{\text{def}}{=} \deg \omega \cdot \mathrm{pl}_v \omega\,,$$

в которой через $\mathrm{pl}_v : \Lambda^n V^* \to \Lambda^{n-1} V^*$ обозначена нижняя горизонтальная стрелка коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Skew}^n V^* \arrow[r, "i_v"] \arrow[d] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ \Lambda^n V^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & \Lambda^{n-1} V^* \end{tikzcd}$$

переводящая грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^n V^*$ в проекцию внутреннего произведения $i_v \widetilde{\omega} \in V^{*\otimes(n-1)}$ во внешнюю степень $\Lambda^{n-1} V^*$. Из билинейности $\mathrm{pl}_v \omega$ по v и ω мы заключаем, что производная в направлении вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ является линейной комбинацией производных в направлениях базисных векторов:

$$\partial_v = \sum \alpha_i \, \partial_{e_i}\,.$$

Кроме того, из определения очевидно, что $\partial_{e_j} \omega = 0$, если ω не зависит от x_j. Таким образом, ненулевой вклад в $\partial_v \omega = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}$ вносят только $\partial_{e_{i_1}}, \partial_{e_{i_2}}, \dots, \partial_{e_{i_n}}$. Из формулы (2-36) вытекает, что

$$\partial_{e_{i_1}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} = x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}$$

вне зависимости от того, образуют ли неповторяющиеся индексы $i_1, i_2, \dots, i_n$ строго возрастающую последовательность или нет. Иначе говоря, частная производная грассманова монома вдоль базисного вектора, двойственного к самому левому сомножителю, действует как обычная частная производная $\partial/\partial x_{i_1}$. При дифференцировании по остальным направлениям возникают знаки:

$$\begin{aligned} \partial_{e_{i_k}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} &= \partial_{e_{i_k}} (-1)^{k-1} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} \partial_{e_{i_k}} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n}\,. \end{aligned}$$

[1] мы предполагаем, что обе последовательности индексов I, J строго возрастают

Тем самым, дифференцирование грассманова монома в направлении базисного вектора, двойственного к k-той слева переменной, ведёт себя как $(-1)^{k-1}\partial/\partial x_{i_k}$. Удобно воспринимать это явление как *грассманово правило Лейбница*

$$\partial_v(\omega \wedge \tau) = \partial_v(\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega}\omega \wedge \partial_v(\tau) \tag{2-37}$$

Упражнение 2.16. Докажите справедливость формулы (2-37) для любых однородных грассмановых многочленов $\omega, \tau \in \Lambda V^*$ и любого вектора $v \in V$.

Кососимметричность полной поляризации $\widetilde{\omega}(u, w, *, \dots, *) = -\widetilde{\omega}(w, u, *, \dots, *)$ влечёт за собою равенство $i_w i_v = -i_w i_v$ для отображений $\mathrm{Skew}^n(V^*) \to \mathrm{Skew}^{n-2}(V^*)$. Поэтому грассмановы частные производные *антикоммутируют* между собой:

$$\partial_u \partial_w = -\partial_w \partial_u\,.$$

В частности, $\partial_v^2 \omega \equiv 0$ для любых v и ω.

2.5.3. Линейный носитель грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ это наименьшее подпространство $W \subset V$, такое что $\omega \in \Lambda^n W$. Оно обозначается $\mathrm{Supp}(\omega)$ и совпадает с носителем поляризации $\widetilde{\omega}$. По теор. 2.1 носитель грассманова многочлена степени n является образом отображения $V^{*\otimes(n-1)} \to V$, задаваемого полной свёрткой[1] с тензором $\widetilde{\omega}$ и линейно порождается векторами

$$\partial_J \omega \overset{\text{def}}{=} \partial_{e_{j_1}} \partial_{e_{j_2}} \dots \partial_{e_{j_{n-1}}} \omega\,,$$

где $J = j_1 j_2 \dots j_{n-1}$ пробегает всевозможные последовательности из $n-1$ неповторяющихся[2] натуральных чисел $1 \leqslant j_\nu \leqslant d$. Если записать ω в виде суммы

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

в которой $I = i_1 i_2 \dots i_n$ пробегает произвольные последовательности неповторяющихся индексов и коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по $i_1 i_2 \dots i_n$, вклад в $\partial_J \omega$ дадут только мономы $a_I e_I$ с $I \supset J$. В итоге, с точностью до общего знака,

$$\partial_J \omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} i}\, e_i\,. \tag{2-38}$$

Предложение 2.4

Следующие условия на грассманов многочлен $\omega = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, где коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по индексам $i_1 i_2 \dots i_n$, эквивалентны:

1) $\omega = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$

[1] в силу кососимметричности тензора $\widetilde{\omega}$ такая свёртка с точностью до знака не зависит от выбора последовательности сворачиваемых сомножителей

[2] в силу кососимметричности грассмановых частных производных можно было бы ограничиться только строго возрастающими последовательностями, но мы умышленного не делаем этого, чтобы упростить запись дальнейших формул

2) $u \wedge \omega = 0 \;\; \forall\, u \in \mathrm{Supp}(\omega)$

3) для любых наборов неповторяющихся индексов $i_1 i_2 \, \dots \, i_{m+1}$ и $j_1 j_2 \, \dots \, j_{m-1}$ выполняется *соотношение Плюккера*[1] $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \widehat{i_\nu} \dots i_{m+1}} = 0\,.$

Доказательство. Условие (1) означает, что многочлен ω лежит в старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \mathrm{Supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\mathrm{Supp}(\omega)$. Его равносильность условию (2) вытекает из следующего общего факта:

Упражнение 2.17. Докажите, что $\omega \in \Lambda U$ тогда и только тогда однороден степени $\dim U$, когда $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in U$.

Соотношение Плюккера выражает обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $\partial_{j_1 \dots j_{m-1}} \omega \wedge \omega$ и является координатной записью условия (2) на вектор $u = \partial_{j_1 \dots j_{m-1}} \omega$ из формулы (2-38). Поскольку такие векторы линейно порождают пространство $\mathrm{Supp}(\omega)$, соотношения Плюккера равносильны условию (2). □

Упражнение 2.18. Выпишите соотношения Плюккера для грассмановой квадратичной формы ω от четырёх переменных и выведите из них, что такая форма тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

[1] «крышка» в $a_{i_1 \dots \widehat{i_\nu} \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.1. Для любого линейного отображения $f : V \to A$ отображение

$$V \times V \times \cdots \times V \to A\,,$$

переводящее $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в произведение $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \cdots \cdot \varphi(v_n) \in A$ полилинейно, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $V^{\otimes n} \to A$, которые все вместе задают гомоморфизм алгебр $TV \to A$, продолжающий f, причём всякий гомоморфизм $TV \to A$, продолжающий f, должен переводить разложимый тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ в $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \cdots \cdot \varphi(v_n) \in A$, и стало быть, должен совпадать с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что SV и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 1.1 на стр. 5.

Упр. 2.2. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V^{*\otimes n}$ и формула

$$i_v\varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v,\, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$$

линейна по v и по φ, достаточно проверять её для форм φ, переводимых изоморфизмом из сл. 2.1 в разложимые тензоры $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n$.

Упр. 2.3. Для любых v, w имеем

$$0 = \varphi(\dots\,,\,(v+w),\,\dots\,,\,(v+w),\,\dots) = \varphi(\dots\,,\,v,\,\dots\,,\,w,\,\dots) + \varphi(\dots\,,\,w,\,\dots\,,\,v,\,\dots)$$

Наоборот, равенство $\varphi(\dots\,,\,v,\,\dots\,,\,v,\,\dots) = -\varphi(\dots\,,\,v,\,\dots\,,\,v,\,\dots)$ влечёт при $1 \neq -1$ равенство $\varphi(\dots\,,\,v,\,\dots\,,\,v,\,\dots) = 0$.

Упр. 2.4. Годятся дословно те же формальные соображения, что и в доказательстве лем. 1.1 на стр. 5.

Упр. 2.5. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$, или число решений уравнения $m_1 + m_2 + \cdots + m_d = n$ в неотрицательных целых числах $m_1, m_2, \dots, m_d$.

Упр. 2.6. Для любого линейного отображения $f : V \to A$ отображение

$$V \times V \times \cdots \times V \to A\,,$$

переводящее $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в произведение $\prod \varphi(v_i)$ в A полилинейно и симметрично, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $S^nV \to A$, которые все вместе задают гомоморфизм алгебр $SV \to A$, продолжающий f. Наоборот, любой гомоморфизм $SV \to A$, продолжающий f, должен переводить разложимый тензор $\prod v_i \in S^nV$ в $\prod \varphi(v_i) \in A$, и стало быть, будет совпадать с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что SV и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 1.1 на стр. 5.

Упр. 2.7. Первое вытекает из равенства $0 = (v+w)\otimes(v+w) = v \otimes w + w \otimes v$, второе — из того, что равенство $v \otimes v + v \otimes v = 0$ при $1 + 1 \neq 0$ влечёт равенство $v \otimes v = 0$.

Упр. 2.8. Модифицируйте доказательство предл. 2.2 на стр. 19.

Упр. 2.9. Для $t \in V^{\otimes n}$ и $g \in S_n$ обозначим через $g(t)$ результат действия g на t перестановкой тензорных сомножителей, как в (2-17). Утверждения (а) и (б) вытекают из того, что для каждого $h \in S_n$ выполняются равенства

$$h\Big(\sum_{g\in S_n} g(t)\Big) = \sum_{g\in S_n} hg(t) = \sum_{g'\in S_n} g'(t)$$

$$h\Big(\sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\cdot g(t)\Big) = \mathrm{sgn}(h)\cdot\sum_{g\in S_n}\mathrm{sgn}(hg)\cdot hg(t) = \mathrm{sgn}(h)\cdot\sum_{g'\in S_n}\mathrm{sgn}(g)\cdot g'(t)$$

(ибо отображение $g \mapsto g' = hg$ взаимно однозначно), мы заключаем, что

$$h(\mathrm{sym}_n(t)) = \mathrm{sym}_n(t) \quad \text{и} \quad h(\mathrm{alt}_n(t)) = \mathrm{sgn}(h)\cdot\mathrm{alt}_n(t)\,.$$

Утверждения (в) и (г) очевидны (обе суммы состоят из $n!$ одинаковых слагаемых). В (д) суммы по чётным и по нечётным перестановкам будут состоять из одних и тех же (и одинаковых внутри каждой из сумм) слагаемых, отличающихся знаком.

Упр. 2.10. Первое утверждение в пункте (а) проверяется прямым вычислением. Что касается второго, то из равенства $\mathrm{sym}_3 + \mathrm{alt}_3 + p = E$ вытекает, что образы $\mathrm{im}(\mathrm{sym}_3) = \mathrm{Sym}^3(V)$, $\mathrm{im}(\mathrm{alt}_3) = \mathrm{Skew}^3(V)$ и $\mathrm{im}(p)$ линейно порождают $V^{\otimes 3}$, поскольку любой $t \in V^{\otimes 3}$ представляется как $t = E(t) = \mathrm{sym}_3(t) + \mathrm{alt}_3(t) + p(t)$. Эта сумма прямая в силу того, что, с одной стороны, каждый из трёх операторов являются проектором и действует на своём образе тождественно, а с другой стороны, аннулирует образы двух оставшихся операторов в следствие равенств $p\circ\mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3\circ p = p\circ\mathrm{sym}_3 = \mathrm{sym}_3\circ p = 0$ и равенств $\mathrm{sym}_3\circ\mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3\circ\mathrm{sym}_3 = 0$, вытекающих из упр. 2.9. Например, если $t \in \mathrm{im}(p)\cap\big(\mathrm{im}(\mathrm{sym}_3)+\mathrm{im}(\mathrm{alt}_3)\big)$, то $t = p(t)$, а записывая t как $\mathrm{sym}_3(t_1) + \mathrm{alt}_3(t_2)$, получим $p(t) = 0$, откуда $t = 0$.

Утверждение пункта (б) равносильно тому, что $\mathrm{im}(p) \subset V^{\otimes 3}$ является аннулятором образа оператора $\mathrm{Id} + T + T^2 : V^{*\otimes 3}\to V^{*\otimes 3}$:

$$\mathrm{im}(p) = \{t \in V^{\otimes 3} \mid \big\langle (\mathrm{Id} + T + T^2)\xi\,,\, t\big\rangle = 0\ \forall\,\xi \in V^{*\otimes 3}\}\,,$$

где $\langle\, * \,,\, * \,\rangle$ означает полную свёртку между $V^{*\otimes 3}$ и $V^{\otimes 3}$. Легко видеть, что для любых $g \in S_n$, $\xi \in V^{*\otimes n}$, $t \in V^{\otimes n}$ выполняется равенство $\langle\, g\xi\,,\, t\,\rangle = \big\langle\, \xi\,,\, g^{-1}t\,\big\rangle$. Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что образ p совпадает с ядром оператора

$$\mathrm{Id}^{-1} + T^{-1} + T^{-2} = \mathrm{Id} + T^2 + T = 3(\mathrm{alt}_3 + \mathrm{sym}_3)\,,$$

действующего на $V^{\otimes 3}$. Но из решения упр. 2.10 (а) видно, что $\mathrm{alt}_3 + \mathrm{sym}_3$ — это проектор $V^{\otimes 3}$ на подпространство $\mathrm{Sym}^3 V \oplus \mathrm{Skew}^3 V$ вдоль подпространства $\mathrm{im}(p)$.

Упр. 2.11. Стабилизатор каждого слагаемого в симметрической группе S_n состоит из

$$m_1!\, m_2! \,\cdots\, m_d!$$

независимых перестановок одинаковых сомножителей между собою. Остаётся применить формулу для длины орбиты.

Упр. 2.13. Поскольку утверждение линейно по v, f и g достаточно проверить его для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1}\dots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1}\dots x_d^{k_d}$, что делается прямо по определению.

Упр. 2.14. Это следует из равенства $\tilde{f}(v, x, \dots, x) = \frac{1}{n} \cdot \partial_v f(x)$, где $n = \deg f$.

Упр. 2.16. Это аналогично упр. 2.13.

Упр. 2.17. Фиксируем в U базис $e_1, e_2, \dots, e_m$. Если $\omega \notin \Lambda^m U$, то в ω есть моном e_I, не содержащий какого-нибудь базисного вектора — скажем, e_i. Тогда $e_i \wedge \omega \neq 0$, поскольку будет содержать ненулевой моном $e_{i \sqcup I}$, возникающий только из произведения e_i на e_I и, стало быть, не способный ни с чем сократиться. Наоборот, если $\omega \in \Lambda^m U$, то $\omega = \lambda \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_m$ и $e_i \wedge \omega = 0 \ \forall\, i$, а значит, $u \wedge \omega = 0 \ \forall\, u \in U$.