Кольцо представлений симметрических групп

Обозначения для симметрических многочленов. Через m_λ, s_λ мы обозначаем мономиальный[1] многочлен и многочлен Шура[2], через h_k, e_k, p_k мы обозначаем полный[3], элементарный[4] и степенной[5] многочлены степени k и для каждого набора неотрицательных целых чисел $h_\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ (например, для диаграммы Юнга) мы полагаем $h_\eta = h_{\eta_1} h_{\eta_2} \cdots h_{\eta_m}$ и аналогично для e_η и p_η. Через $\Lambda = \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} \Lambda^k$ обозначается градуированное кольцо симметрических многочленов с целыми коэффициентами от бесконечного числа переменных x_i. Его однородная компонента k-той степени Λ^k образована семействами однородных многочленов k-той степени $f = \{f^{(n)}\}$ от $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (по одному многочлену для каждого n), такими что $f^{(n+m)}(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots 0) = f^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Напомним, что m_λ и s_λ образуют базисы Λ как модуля над $\mathbb{Z}$. Будем называть *характеристическими числами* ϑ_f^λ и c_f^λ симметрической функции $f \in \Lambda$ коэффициенты её разложений $f = \sum\limits_\lambda \vartheta_f^\lambda \cdot m_\lambda = \sum\limits_\lambda c_f^\lambda \cdot s_\lambda$ по базисам $\{m_\lambda\}$ и $\{s_\lambda\}$. Таким образом, ϑ_f^λ есть коэффициент при x^λ у $f(x)$, а $\vartheta_{s_\lambda}^\mu = c_{h_\mu}^\lambda = c_{e_\mu}^{\overline{\lambda}} = K_{\lambda\mu}$ есть *число Костки*, равное количеству таблиц формы λ и состава[6] μ. Введём Λ скалярное произведение, в котором базис s_λ ортонормален. Ортогональная инволюция $\Lambda \xrightarrow{s_\lambda \leftrightarrow s_{\overline{\lambda}}} \Lambda$ переводит $h_k \leftrightarrow e_k$ и является кольцевым автоморфизмом Λ. Для любого коммутативного кольца A мы полагаем $\Lambda_A = A \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \Lambda$. Напомним, что $E(t) = \sum\limits_{k\geqslant 0} e_k t^k = \prod\limits_{j\geqslant 1}(1 + x_j t)$, $H(t) = \sum\limits_{k\geqslant 0} h_k t^k = \prod\limits_{j\geqslant 1}\left(1 + x_j t + x_j^2 t^2 + \cdots\right)$ и $P(t) = \sum\limits_{k\geqslant 1} p_k t^{k-1} = \sum\limits_{j\geqslant 1} \frac{d}{dt} \ln \frac{1}{1 - x_j t}$ связаны в $\Lambda_{\mathbb{Q}}[[t]]$ соотношениями $H(t)E(-t) = 1$, $P(t)H(t) = H'(t)$ и $P(-t)E(t) = E'(t)$, которые позволяют рекуррентно пересчитывать h_k, e_k и p_k друг в друга по формулам $\sum\limits_{\alpha=1}^{k} (-1)^\alpha e_\alpha h_{k-\alpha} = 1$, $k h_k = \sum\limits_{\alpha=1}^{k} p_\alpha h_{k-\alpha}$, $k e_k = \sum\limits_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} p_\alpha e_{k-\alpha}$, и что многочлены p_λ образуют базис в $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ над $\mathbb{Q}$, а $\omega(p_\lambda) = (-1)^{\sum(\lambda_i - 1)} p_\lambda$. Через $\Delta(x) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_m) = \det\left(x_j^{i-1}\right)$ обозначается определитель Ван Дер Монда.

А9◇1°. Свяжем с диаграммой $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0)$ строго убывающую последовательность $\ell = (\ell_1 > \ell_2 > \cdots > \ell_k \geqslant 0)$, которая получается приписыванием строк λ справа к треугольной диаграмме $\delta = (k-1, k-2, \dots, 1, 0)$, т. е. имеет $\ell_i = \lambda_i + k - i$. Равен ли ϑ_f^λ сумме $\sum\limits_\mu K_{\mu\lambda} c_f^\mu$, а c_f^λ — коэффициенту при x^ℓ у $\Delta(x) \cdot f(x)$?

А9◇2°. Вычислите скалярное произведение (h_λ, m_λ).

А9◇3 (формула Коши). Покажите, что $\prod\limits_{ij} \frac{1}{1 - x_i x_j} = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y)$ для любых двух наборов переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

А9◇4°. Для неотрицательного целочисленного мультииндекса $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ с $\sum \eta_i = n$ обозначим через $z_\eta = 1^{\eta_1} \cdot \eta_1! \cdot 2^{\eta_2} \cdot \eta_2! \cdot \cdots \cdot n^{\eta_n} \cdot \eta_n!$ число элементов в стабилизаторе перестановки циклового типа $\lambda = \lambda(\eta)$), содержащего η_i строк длины i для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, а через $p^\eta = p_{\lambda(\eta)} = p_1^{\eta_1} p_2^{\eta_2} \cdots p_n^{\eta_n}$ — соответствующий степенной многочлен. Выведите из формулы Коши[7], что $\sum\limits_\eta \frac{1}{z_\eta} c_{p^\eta}^\lambda c_{p^\eta}^\mu = \delta_{\lambda\mu}$, и вычислите (p^η, p^ζ).

---

[1] т. е. сумму всех мономов из $\mathfrak{S}_n$-орбиты монома $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$

[2] т. е. сумму по всем таблицам T формы λ на алфавите $x_1, x_2, \dots, x_n$ мономов x^T, получающихся перемножением всех букв таблицы

[3] т. е. сумму всех мономов степени k

[4] т. е. сумму всех мономов степени k, линейных по каждой переменной

[5] т. е. сумму k-тых степеней всех переменных

[6] т. е. образованных μ_1 единицами, μ_2 двойками, μ_3 тройками и т. д.

[7] подсказка: надо проэкспоненцировать равенство $\log\left(\prod\limits_{ij} \frac{1}{1 - x_i y_j}\right) = \sum\limits_{k\geqslant 1} p_k(x) p_k(y)$ и воспользоваться тождеством Коши

A9◇5. Покажите, что характеристические числа $c^{\lambda}_{p^\eta}$, рассматриваемые как функции класса сопряжённости $C_\eta \subset \mathfrak{S}_n$, составляют ортонормированный базис $\mathbb{Z}$-модуля $Z\left(\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]\right)$ относительно стандартного скалярного произведения на $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$.

A9◇6* (формулы Джамбелли – Якоби – Труди). Выведите из разложений h_λ и e_λ по базису s_λ, что $s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right) = \det\left(e_{\overline{\lambda}_i+j-i}\right)$.

Кольцо представлений симметрических групп. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через R^n группу Гротендика $\mathfrak{S}_n$-модулей, т. е. свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\bigoplus\limits_{|\lambda|=n} \mathbb{Z}\cdot[V_\lambda]$, порождённый классами неприводимых представлений V_λ, сложение в котором индуцировано прямой суммой представлений, и положим $R_0 = \mathbb{Z}$. Определим на $R = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} R^n$ структуру градуированного коммутативного кольца с единицей, введя в нём умножение $[V]\circ[W] = \operatorname{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{m+n}}(V\otimes W)$, где $V_\lambda \in R_n$, $V_\mu \in R_m$, $S_n\times S_m$ вложена в S_{n+m} как подгруппа, переводящая в себя первые n и последние m символов, а действие $S_n\times S_m$ на $V_\lambda\otimes V_\mu$ задаётся тензорным произведением операторов. Для каждой диаграммы Юнга λ веса n обозначим через U_λ представление $\mathfrak{S}_n$ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\cdot a_\lambda$, где $a_\lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{R}_l}\sigma$ есть строчный симметризатор Юнга[8].

A9◇7. Убедитесь, что V_λ входит в разложение U_λ на неприводимые.

A9◇8. Покажите, что характер φ_λ представления U_λ равен

$$\varphi_\lambda(C_\eta) = \sum_{r_{\alpha\beta}} \prod_{\beta=1}^{n} \frac{i_\beta!}{r_{1\beta}!\,r_{2\beta}!\cdots r_{n\beta}!} = \vartheta^{\lambda}_{p^\eta} = c^{\lambda}_{p^\eta} + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda}c^{\mu}_{p^\eta}$$

(первая сумма идёт по всем неотрицательным целочисленным прямоугольным матрицам $(r_{\alpha\beta})$ размера $1\leqslant\alpha\leqslant k$, $1\leqslant\beta\leqslant n$, таким что $\sum\limits_{\alpha} r_{\alpha\beta} = i_\beta$ $\sum\limits_{\beta}\beta\cdot r_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha$) и сравните кратность V_μ в U_λ с числом Костки $K_{\mu\lambda}$.

A9◇9. Покажите, что имеется изометрический изоморфизм колец $R \xrightarrow{\sim} \Lambda$, переводящий представления U_λ и V_λ в полиномы h_λ и s_λ соответственно. Какая операция над представлениями соответствует при этом изоморфизме ω-инволюции?

A9◇10 (правила Пьери). Пусть $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{n+m}$ переводит в себя первые n номеров. Покажите, что для любых n-клеточной диаграммы λ и $(n+m)$-клеточной диаграммы ν

$$V_\nu \text{ входит в } \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+m}}(V_\lambda) \iff V_\lambda \text{ входит в } \operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+m}}(V_\nu) \iff \lambda\subset\nu$$

причём кратность каждый раз равна числу стандартных косых таблиц формы $\nu\smallsetminus\lambda$.

A9◇11. Выясните, как раскладывается на неприводимые тензорный и симметрический квадраты симплициального представления $\mathfrak{S}_n$.

A9◇12 (формула Фробениуса I). Сравните значение неприводимого характера $\chi_\lambda(C_\eta)$ с $c^{\lambda}_{p^\eta}$ и с коэффициентом при x^ℓ у $\Delta\cdot p^\eta$.

A9◇13 (формула Фробениуса II). Вычислив $\chi_\lambda(e)$, покажите, что $\dim V_\lambda = \frac{n!}{\ell_1!\cdots\ell_k!}\prod\limits_{i<j}(\ell_i-\ell_j)$.

A9◇14. Вычислите $\chi_\lambda(C_\eta)$ для **а)** $\lambda=(n-1,1)$ **б)** $\lambda=(n-2,1,1)$ **в)** $\lambda=(n-2,2)$.

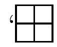
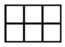
A9◇15. Докажите, что значение неприводимого характера χ_λ группы $\mathfrak{S}_n$ на цикле максимальной длины ненулевое, только когда $\lambda=(a,1^b)$ является *крюком*, и равно в этом случае $(-1)^b$.

A9◇16*. Докажите формулу крюков (см. зад. A7◇12).

A9◇17. Перечислите все случаи, когда $\dim V_\lambda < n$ для неприводимого $\mathfrak{S}_n$-модуля[9] V_λ.

---

[8] напомним, что это представление индуцировано с тривиального одномерного представления строчной подгруппы $\mathfrak{R}\simeq\mathfrak{S}_{\lambda_1}\times\mathfrak{S}_{\lambda_2}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\lambda_k}\subset\mathfrak{S}_n$, см. листок № 7 и лекции

[9] ответ: тривиальное, знаковое, симплициальное, их произведение, а ещё ,  и